

# Apuntes para el estudio de Cadenas de Markov: Una herramienta para la manufactura en ingeniería



DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL

**Salvador Hernández González**

Tecnológico Nacional de México en Celaya

**Idalia Flores de la Mota**

DIMEI, Facultad de Ingeniería UNAM

**Quetzalli Atlatenco Ibarra**

Colegio de Ciencias y Humanidades,  
Unidad Oriente, UNAM



Para visualizar la obra  
te sugerimos

Acrobat Reader  
Haz Click

Hernández González, Salvador

Flores de la Mota, Idalia

Atlatenco Ibarra, Quetzalli

APUNTES PARA EL ESTUDIO DE CADENAS DE MARKOV:  
UNA HERRAMIENTA PARA LA MANUFACTURA EN INGENIERÍA

Universidad Nacional Autónoma de México,

Facultad de Ingeniería, 2025, 60 p.

*Apuntes para el estudio de Cadenas de Markov:  
Una herramienta para la manufactura en ingeniería*

Primera edición electrónica

de un ejemplar (3 MB) Formato PDF

Publicado en línea en octubre de 2025

D.R. © 2025, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional  
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación  
Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA

<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de  
la Universidad Nacional Autónoma de México.  
Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial  
por cualquier medio sin la autorización escrita del titular  
de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

---

Unidad de Apoyo Editorial

Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz

Formación editorial : Luis Enrique Vite Rangel

# CONTENIDO

<b>Introducción</b> .....	5
<b>1.</b> Proceso markoviano y cadena de Markov .....	6
<b>2.</b> Probabilidad de transición y probabilidades límite .....	8
<b>3.</b> Sistema de control de producción Kanban .....	16
<b>4.</b> Célula de manufactura con fallas .....	19
<b>5.</b> Sistema de manufactura con estructura de control central .....	28
<b>6.</b> Célula de manufactura con contenedor de piezas .....	32
<b>7.</b> Casos adicionales de aplicación de cadenas de Markov en manufactura .....	36
<b>Conclusiones</b> .....	54
<b>Bibliografía</b> .....	56
<b>Referencias</b> .....	58

## PRÓLOGO

Con el objetivo de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje en el Departamento de Sistemas de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, y en colaboración con el Instituto Tecnológico Nacional en Celaya, un grupo de profesores hemos desarrollado estos apuntes. Nuestro propósito es complementar la bibliografía existente y acercar a estudiantes de maestría y licenciatura en ingeniería (y áreas afines) a las aplicaciones prácticas de las Cadenas de Markov, resaltando su gran potencial en diversos campos.

Este material ha sido diseñado para introducir al lector en los temas de forma clara y sencilla, sin sacrificar el rigor teórico. Ha sido una experiencia gratificante su elaboración y confiamos en que se convertirá en una herramienta valiosa para los estudiantes de ingeniería interesados en explorar las aplicaciones de las Cadenas de Markov en el ámbito de la manufactura. Además, incluimos una introducción concisa para facilitar el acceso a los conceptos fundamentales de esta teoría.

Expresamos nuestro más sincero agradecimiento a la Mtra. María Cuairán Ruidíaz y a Luis Enrique Vite Rangel por su invaluable colaboración en la revisión de estilo y el formato de este material. Asimismo, extendemos nuestro agradecimiento a María de la Paz Quezada Escamilla por sus valiosas aportaciones en la elaboración de figuras y tablas, lo que ha enriquecido significativamente este trabajo.

Los autores

Salvador Hernández González  
Tecnológico Nacional de México en Celaya

Idalia Flores de la Mota  
DIMEI Facultad de Ingeniería, UNAM

Quetzalli Atlatenco Ibarra  
Colegio de Ciencias y Humanidades, Unidad Oriente, UNAM

## INTRODUCCIÓN

Un sistema flexible de manufactura está formado por un conjunto de equipos controlados por una computadora central. Este sistema está diseñado para fabricar uno o más tipos de artículos, cada uno siguiendo una secuencia u hoja de ruta predeterminada. Además, cuenta con un medio para el movimiento automatizado de las entidades a lo largo del proceso de producción (Hamasha, Alazzam, Hamasha, & Aqlan, 2015; Yadav & Jayswal, 2017; Hamasha & Hamasha, 2022). Si bien hoy en día las empresas buscan implementar esta clase de sistemas, no todas cuentan con la capacidad económica para llevar a cabo una conversión de esta naturaleza, por lo que una estrategia muy común es desarrollar secciones más pequeñas conocidas como células flexibles de manufactura.

Una célula cuenta con varios equipos que realizan la transformación de los materiales y medios automatizados como robots y/o AGV's para el movimiento de los materiales entre los equipos. La inversión requerida es mucho menor y al igual que un rompecabezas, se van agregando poco a poco nuevas secciones (Zhang, Li, Ran, & Zhang, 2020). Cabe señalar que entender el comportamiento de estos sistemas es importante para los responsables de la toma de decisiones.

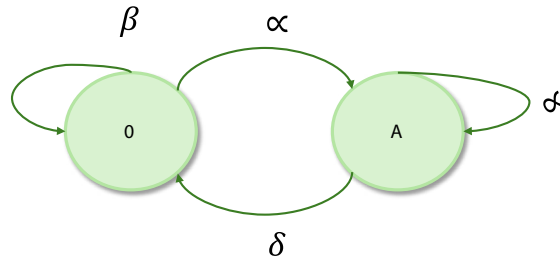
Si bien es muy común utilizar modelos de simulación para estudiar estos sistemas, es conveniente resaltar que por encima de la animación son más importantes las medidas de desempeño, por esto último, las cadenas de Markov proporcionan un medio analítico con el cual se obtienen las medidas de desempeño requeridas y tienen la ventaja de que pueden implementarse en una hoja de cálculo o bien programarse en un lenguaje como Python, R, Scilab o Matlab.

Un proceso de Markov es una secuencia de eventos donde el futuro depende únicamente del presente. En la figura 1, se muestra un ejemplo simple de un proceso de Markov con dos estados: 0 y A. La probabilidad de transición entre estos estados está definida por las probabilidades  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ . Por ejemplo, si el sistema está en el estado 0, la probabilidad de pasar al estado A en el siguiente paso es  $\alpha$ , independientemente de cómo llegó al estado 0.

Permanecer en el mismo estado 0 con probabilidad  $\beta$ .

Pasar desde estado A al estado 0 la probabilidad es  $\delta$ .

Permanecer en el mismo estado A es  $\gamma$ .



**Figura 1.** Probabilidades asociadas a los estados O y A

Formalmente, las probabilidades se representan en forma de matriz  $P$  conocida como matriz de transición en el primer paso:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} O & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} O & A \end{matrix} & \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

De forma general, la matriz de probabilidad está formada por los estados en los que se puede encontrar un sistema y la probabilidad de que el sistema transite de un estado  $i$  a un estado  $j$ .

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2)$$

Cada renglón de la matriz  $P$  es la distribución de probabilidad de las transiciones dado que el sistema se encuentra en el estado  $i$ , en caso de que el número de estados sea finito, entonces la matriz  $P$  es cuadrada, además las probabilidades  $p_{ij}$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$p_{ij} \geq 0 \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad (4)$$

La expresión (3) establece que los valores de probabilidad son cantidades reales mayores o iguales a cero, y la expresión (4) restringe la suma de las probabilidades a 1. Una matriz  $P$  queda totalmente definida cuando se fija el estado inicial y las distribuciones de probabilidad son conocidas.

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

# Cap 2 Probabilidad de transición y probabilidades límite

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Cclusioniones

Bibliografía

Referencias

En las aplicaciones de manufactura, es importante para los ingenieros y directores de las áreas de producción cuantificar el desempeño de las líneas de producción. Uno de los indicadores es la tasa de salida o tasa de producción del proceso, aplicando los conceptos de cadenas de Markov, esto equivale a determinar la probabilidad de que el proceso se encuentre produciendo, por otra parte, si se toman en cuenta las fallas, también es de interés por ejemplo la probabilidad de encontrar el sistema en detenido por una falla.

Se sabe que en la matriz  $P$  encontramos las probabilidades de que el sistema transite de un estado a otro, por ejemplo, del estado 0 al estado 0 la probabilidad es  $\beta$ , la probabilidad de transitar o pasar al estado A es  $\alpha$  (Stewart, 2009).

Suponga que se inicia en el estado 0, se desea saber cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado 0 después de 3 transiciones, desarrollando el esquema de los pasos se tiene:

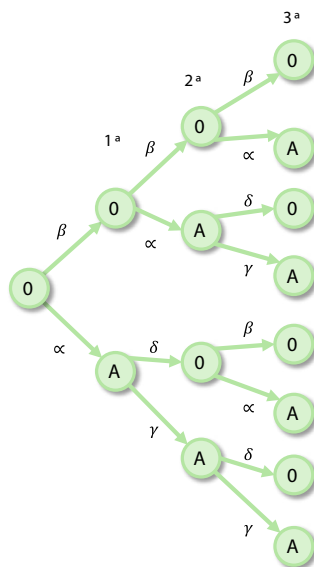


Figura 2. Esquema que muestra tres transiciones con sus probabilidades.

La probabilidad es:

$$p_0^3 = \beta\beta\beta + \beta\alpha\delta + \alpha\delta\beta + \alpha\gamma\delta \tag{5}$$

La probabilidad de encontrar el sistema en el estado j dado que se inicia en el estado i después de n transiciones se escribe como:

$$p_{ij}^n = Pr\{X_{m+n} = j | X_0 = i\} \tag{6}$$

Las probabilidades de transición de una cadena de Markov satisfacen las siguientes propiedades:

$$p_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} p_{kj}^{n-1} \tag{7}$$

donde:

$$p_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

Este resultado se puede obtener multiplicando la matriz por sí misma tres veces o bien:

$$P \times P \times P = P^3$$

Cuando la matriz se eleva a un exponente n, entonces los elementos de la matriz  $P^n$  son estrictamente positivos y se le conoce como matriz regular o homogénea; a medida que se incrementa el valor de n se observará que cada entrada de la matriz convergerá (aproximará) a un valor de probabilidad el cual es independiente del estado inicial del sistema. Las matrices regulares tienen una distribución de probabilidad límite,  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots), \pi_i > 0, \sum_i \pi_i = 1$  (Stewart, 2009):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n = \pi_j > 0, j = 0, 1, \dots, N \tag{9}$$

En términos de una cadena de Markov :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\{X_n = j | X_0 = i\} = \pi_j > 0, j = 0, 1, \dots, N \tag{10}$$

La distribución de probabilidad se interpreta como la probabilidad de encontrar el sistema en algún estado después de un periodo de tiempo prolongado, también se le conoce como distribución en estado estable. Para que una matriz sea regular deben satisfacerse las siguientes condiciones:

1. Para cada par de estados  $i, j$  existe una trayectoria  $k_1, \dots, k_r$  para la cual

$$P_{ik_1}, P_{k_1k_2}, \dots, P_{k_rj} > 0.$$

2. Existe un estado  $i$  para el cual  $P_{ij} > 0$

El siguiente teorema establece que, en vez de elevar a un exponente, se plantea un sistema de ecuaciones simultaneas:

**Teorema**

Sea  $P$  una matriz de transición regular de los estados  $0, 1, \dots, N$ . Las probabilidades límite  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  tienen una solución única no negativa del siguiente sistema:

$$\pi_j = \sum_{k=0}^N \pi_k P_{kj}$$

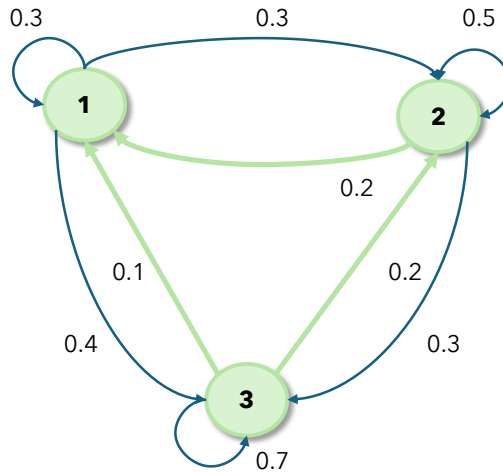
$$\sum_{k=0}^N \pi_k = 1$$

Considere una matriz de probabilidad con tres estados:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

- Cap. 1
- Cap. 2
- Cap. 3
- Cap. 4
- Cap. 5
- Cap. 6
- Cap. 7

- Cclusiones
- Bibliografía
- Referencias



**Figura 3.** Tres estados con sus probabilidades de transición.

$$0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 \tag{11}$$

$$0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.2\pi_3 \tag{12}$$

$$0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.7\pi_3 \tag{13}$$

En las expresiones (11) a (13)  $\pi_i$  son las probabilidades en estado estable, ahora bien, para asegurar que la suma de probabilidades sea 1 se debe incorporar la ecuación de normalización (17) con lo que el sistema queda de la siguiente manera.

$$-0.7\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 \tag{14}$$

$$0.3\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.2\pi_3 = 0 \tag{15}$$

$$0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 - 0.3\pi_3 = 0 \tag{16}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \tag{17}$$

Hay 3 variables y 4 ecuaciones, por lo que se debe descartar alguna de las ecuaciones de (14) a (16) y junto con la ecuación (17) se resuelve el sistema simultáneo.

Una segunda aplicación del concepto de probabilidad límite consiste en asociar o asignar un costo  $c_j$  por permanecer o visitar el estado  $\pi_j$ , entonces el valor esperado del costo total de las visitas de una cadena de Markov es

$$\text{Costo total} = \sum_{j=0}^N \pi_j c_j$$

### Clasificación de estados

Existe una forma de clasificar los estados de una cadena de Markov y que depende de las características de la matriz  $P$  (Taylor & Karlin, 1998).

Un ejemplo de una cadena de Markov periódica:

$$P = \begin{matrix} 0 & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{matrix}$$

El sistema oscila de manera determinista entre los estados 0 y 1, en este caso no existe una distribución límite.

### Cadenas de Markov irreducibles

Son aquellas en las que todos los estados  $j$  del sistema son accesibles desde cualquier estado  $i$  en un número finito  $n$  de pasos o transiciones, los estados  $i$  y  $j$  se dicen que están comunicados. Un estado  $j$  se dice que es accesible si para cualquier estado  $i$  existe una probabilidad  $p_{ij}^n > 0$  para algún valor entero de  $n \geq 0$ . Caso contrario, dos estados  $i$  y  $j$  se dice que no están comunicados entre sí cuando  $p_{ij}^n = 0$  para cualquier entero  $n \geq 0$ .

- Cap. 1
- Cap. 2
- Cap. 3
- Cap. 4
- Cap. 5
- Cap. 6
- Cap. 7

## 2.1 Probabilidades límite en sistemas de líneas de espera con límites en el tamaño de la fila

Esta es una situación típica en los sistemas de manufactura y producción, ya que no siempre se cuenta con espacio para almacenar cualquier cantidad de piezas en espera de ser procesadas. Cuando hay una sola estación y asumiendo que los tiempos entre arribos de las piezas y el tiempo de proceso en la máquina son aleatorios y se distribuyen exponencialmente, entonces, siguiendo la notación Kendall la clasificación del sistema es  $M/M/1 / K$ , donde  $K$  es la capacidad o cantidad total de piezas que pueden permanecer en el sistema.

Suponga que tenemos una máquina, con tasa de producción  $\mu=1/t$  y una tasa de arribos entre piezas  $\lambda=1/ta$ , ambos aleatorios, sólo se admiten  $K= 3$  piezas, se procesa una pieza a la vez y los arribos son de una pieza a la vez.

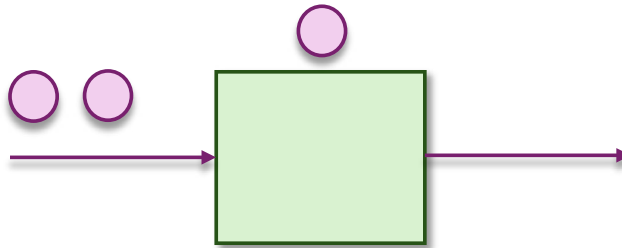


Figura 4. Entrada de piezas a una máquina.

Su representación en forma de cadena de Markov, tomando como estados la cantidad de piezas que hay en el sistema es como sigue (Curry & Feldman, 2009):

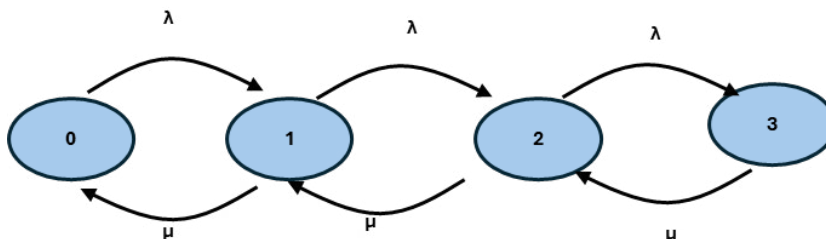


Figura 5. Cadena de Markov con tasas de entrada y salida.

Cclusiones

Bibliografía

Referencias

Cuando el sistema se encuentra vacío y se presenta un arribo hay un brinco o transición hacia el estado 1, si se presente un arribo antes de que la pieza termine de procesarse entonces hay una nueva transición hacia el estado 2, por otra parte, en caso de que la pieza termine de procesarse antes de que llegue una nueva pieza entonces el estado regresa al estado 0.

Para calcular la probabilidad de encontrar 0, 1, 2 o 3 piezas en el sistema a partir de la cadena de Markov, se utilizan las probabilidades límite; en este caso se plantearán las respectivas ecuaciones balanceando el flujo de salidas del estado  $i$  y el flujo de entradas hacia el estado  $i$ .

Flujo de salida = Flujo de entrada

$$P_i \sum_k (\lambda_{ik}) = \sum_k (\lambda_{ki} P_{ki}) \tag{18}$$

En la expresión,  $P_i$  es el estado analizado,  $\lambda_{ik}$  es la tasa de salidas desde  $i$  hacia los estados  $k$  con los que existe conexión. Para el balance de entradas los estados  $\lambda_{ki}$  representan la tasa de entradas desde  $k$  hacia el estado  $i$  y  $P_{ki}$  es la probabilidad de entrar desde el estado  $k$  hacia el  $i$ . Para el ejemplo:

$$P_0 \lambda = P_1 \mu \tag{19}$$

$$P_1 (\lambda + \mu) = P_0 \lambda + P_2 \mu \tag{20}$$

$$P_2 (\lambda + \mu) = P_1 \lambda + P_3 \mu \tag{21}$$

$$P_3 \mu = P_2 \lambda \tag{22}$$

Tenemos tres incógnitas  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes y conocidas. Dado que las probabilidades deben sumar 1 entonces es necesario agregar la expresión de normalización:

$$-P_0\lambda + P_1\mu = 0 \tag{19}$$

$$P_0\lambda - P_1(\lambda + \mu) + P_2\mu = 0 \tag{20}$$

$$P_1\lambda - P_2(\lambda + \mu) + P_3\mu = 0 \tag{21}$$

$$P_2\lambda - P_3\mu = 0 \tag{22}$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \tag{23}$$

Para obtener  $P_0, P_1, P_2$  y  $P_3$  se descarta una de las ecuaciones anteriores (23) a (26) y se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones lineales.

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

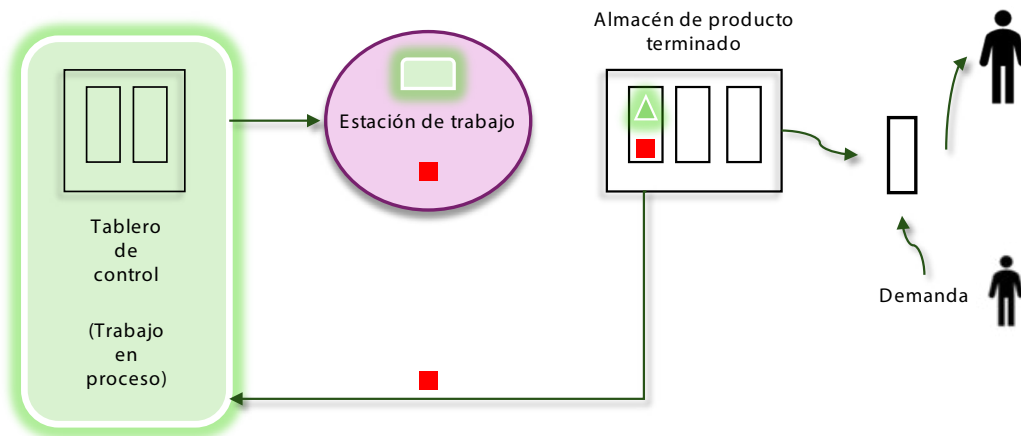
Cap. 7

Cclusiones

Bibliografía

Referencias

Kanban, una metodología japonesa que significa ‘tarjeta’, permite mejorar la eficiencia en plantas de manufactura al sincronizar las etapas de producción y ensamblaje. Al optimizar el flujo de trabajo sin inversiones en infraestructura o tecnología, Kanban contribuye a reducir tiempos de entrega y costos. Sólo se permite una cantidad máxima  $K$  de tarjetas activas en proceso (Krieg, 2003).



**Figura 6.** Esquema de Kanban en una planta de manufactura.

El tiempo entre solicitudes de producto es aleatorio y sigue una distribución exponencial, el tiempo para procesar una pieza es aleatorio y sigue una distribución exponencial. También se asume que sólo se permite una cantidad  $K$  de trabajo en proceso y la demanda es de una pieza a la vez

**Tabla 1.** Tiempos de operación

Elemento	Tiempo (min)	Capacidad	Tipo de operación
Demanda	$t_a$	$\lambda = 1/t_a$	Aleatorio, exponencial
Estación de trabajo	$t_p$	$\mu = 1/t_p$	Aleatorio, exponencial

### 3.1 Uso de cadenas de Markov en Kanban

Para representar este proceso, definimos los estados del sistema según la cantidad de tarjetas “activas” o en producción. El primer estado es cuando no hay ninguna tarjeta activa y por lo tanto el sistema no está produciendo. Cuando un cliente toma producto, la tarjeta se envía al tablero. Esto indica que se debe producir más material, y la tarjeta se convierte en “trabajo en proceso”.

En caso de que se consuma otra pieza de material antes de finalizar la que se está fabricando, entonces se activa la nueva tarjeta y el número de activas se incrementa en una unidad, esto ocurrirá hasta que todas las tarjetas se activan, por el momento se asumirá que cualquier petición de material será una solicitud perdida.

Este proceso es el mismo que el que se presentó en la figura 5, y las ecuaciones de flujo entre estados son

$$P_0\lambda = P_1\mu \quad (28)$$

$$P_1\lambda = P_2\mu \quad (29)$$

$$P_2\lambda = P_3\mu \quad (30)$$

Reacomodando y agregando la ecuación de normalización:

$$-P_0\lambda + P_1\mu = 0 \quad (31)$$

$$-P_1\lambda + P_2\mu = 0 \quad (32)$$

$$-P_2\lambda + P_3\mu = 0 \quad (33)$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad (34)$$

Se cuenta con  $n+1$  ecuaciones, por lo tanto, es necesario descartar una de las expresiones (31) – (33) y junto con la expresión (34) se resuelve el sistema para encontrar la probabilidad de los estados.

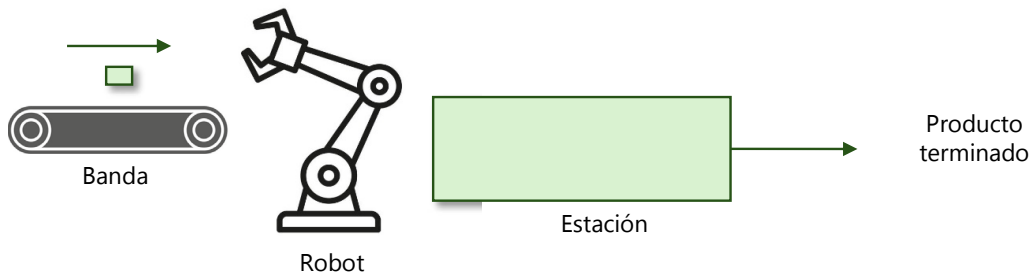
### Ejercicio 1

Utilice una calculadora científica o bien el archivo Célula Manufactura (en el Anexo 1) para estudiar una estación de trabajo donde se utiliza un control Kanban con los siguientes tiempos de operación:

Elemento	Demanda	Estación de trabajo
Tiempo (minutos / pieza)	1/3	1/4

Actualmente se utilizan tres tarjetas. Programe las fórmulas para obtener la tasa de salida ( $Th$ ), la cantidad de inventario o trabajo en proceso (WIP) por sus siglas en inglés y tiempo de ciclo.

Se trata de una célula de manufactura con los siguientes componentes: una banda transportadora, un brazo robot y una estación de trabajo.



**Figura 7.** Componentes de la célula de manufactura.

Las piezas se incorporan al proceso por medio de la banda transportadora, una vez que la pieza está disponible el brazo robot la toma y la coloca en la estación de trabajo donde inicia su transformación, cuando el proceso finaliza la pieza sale del sistema.

Los datos del proceso en cada etapa se presentan en la tabla 2. Cabe señalar que es necesario asumir que el proceso está sujeto a aleatoriedad.

**Tabla 2.** Notación y estados

Equipo	Tiempo (min)	Tipo de operación	Estados posibles
Banda transportadora	$t_b$	Aleatorio, exponencial	0 sin pieza disponible 1 una pieza disponible
Brazo robot	$t_{br}$	Aleatorio, exponencial	No requerido
Estación	$t_p$	Aleatorio, exponencial	0 estación vacía 1 estación ocupada

Adicionalmente la célula de manufactura puede fallar o no ser confiable(non-reliable), el tiempo entre fallas  $t_F$  es aleatorio y se distribuye exponencialmente, las reparaciones requieren un cierto tiempo  $t_R$  y también son de tipo aleatorio y se distribuyen exponencialmente. También se deben considerar las siguientes condiciones:

1. En la banda transportadora sólo hay espacio para una sola pieza.
2. El brazo robot sólo puede tomar una pieza a la vez.
3. En la estación de trabajo sólo hay espacio para la pieza que está siendo trabajada.
4. Las fallas se presentan únicamente cuando la estación tiene una pieza en proceso.

#### 4.1 Descripción como una cadena de Markov

Se utilizará el siguiente formato para la representación del proceso y sus estados:

Pieza disponible en la banda / pieza terminada en la máquina / célula operando o en falla

Un estado queda definido cuando se especifica cada evento individual. Por ejemplo, la célula está vacía y lista para trabajar:

$$0 / 0 / 0$$

Cuando la banda ha introducido una pieza al proceso y queda lista para que el robot la coloque en la estación:

$$1 / 0 / 0$$

Cuando el robot coloca la pieza en la estación para iniciar el procesamiento:

$$0 / 1 / 0$$

Cuando la estación termina la pieza y esta sale como producto terminado entonces la célula de manufactura regresará al estado  $0 / 0 / 0$ . También puede presentarse el caso en que la banda introduzca una pieza antes de que la estación termine la operación:

$$1 / 1 / 0$$

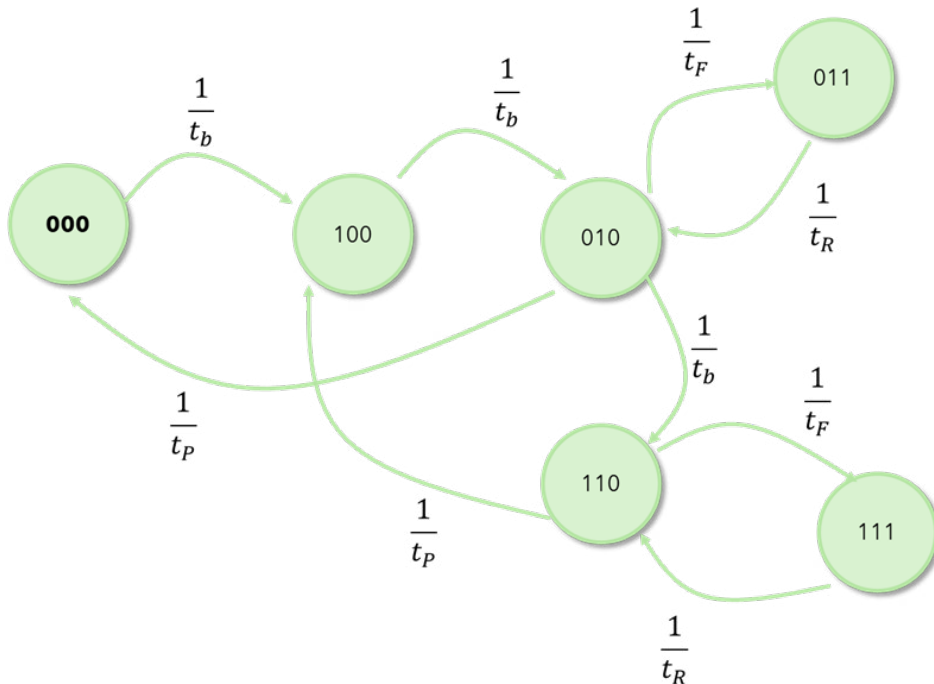
En caso de que la estación falle mientras se encuentra procesando la pieza entonces la célula de manufactura entra al estado:

$$0 / 1 / 1$$

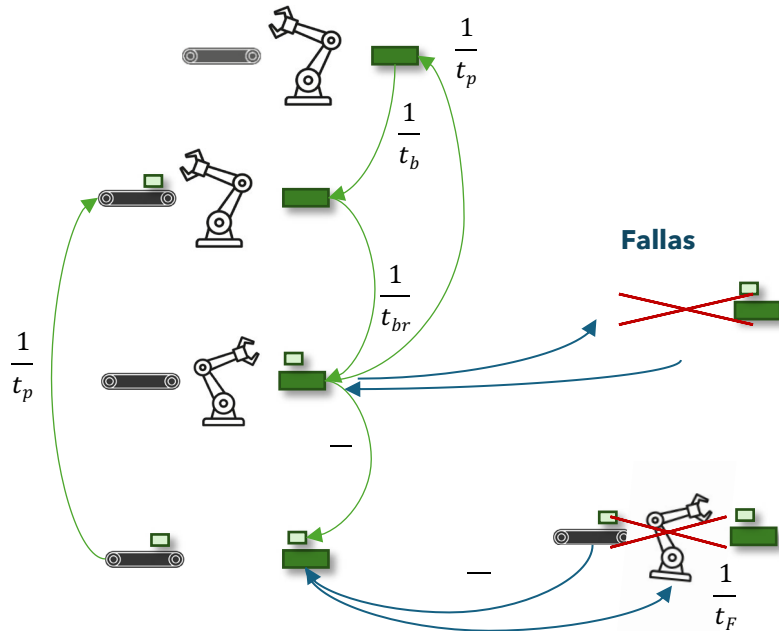
Una vez que finaliza la reparación la célula queda nuevamente en el estado  $0 / 1 / 0$ .

## 4.2 Construcción de la cadena de Markov

La cadena se construye considerando los tiempos esquemáticamente de manera que se visualicen las transiciones entre estados como se puede apreciar en la figura siguiente:



**Figura 8.** Construcción de la cadena de Markov.



**Figura 9.** Pieza disponible en la banda / pieza terminada en la máquina / célula operando o en falla.

### 4.3 Construcción del sistema de ecuaciones de probabilidad límite

La probabilidad de que la célula se encuentre en un estado específico después de una operación prolongada está definida como sigue:

$$P_{\text{pieza disponible en la banda—pieza terminada en la } \frac{\text{máquina}}{\text{célula}} \text{ operando o en falla}}$$

Acortando la notación:

$$P_{i,j,k}$$

$P_{ijk}$  se le conoce como probabilidad límite y los subíndices  $i$ ,  $j$  y  $k$  solo pueden tomar valores 0 o 1 de acuerdo con la situación o estado posible del sistema. Una vez que se ha construido la cadena, ahora es necesario representar los cambios de estado mediante fórmulas, para esto es necesario utilizar la siguiente expresión general:

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

Proceso de salida de un estado = proceso de entrada desde otro estado

$$\left(\frac{1}{\text{Duración de la etapa}}\right)P_{ijk} = \left(\frac{1}{\text{Duración de la etapa}}\right)P_{ijk}$$

Utilizando las probabilidades de la cadena de Markov recién desarrolladas:

$$P_{000}\left(\frac{1}{t_b}\right) = \frac{1}{t_p}P_{010}$$

$$P_{100}\left(\frac{1}{t_{br}}\right) = \frac{1}{t_p}P_{110}$$

$$P_{010}\left(\frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_F} + \frac{1}{t_{br}}\right) = \left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{100} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{011}$$

$$P_{110}\left(\frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_F}\right) = \left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{010} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{111}$$

$$P_{011}\left(\frac{1}{t_R}\right) = P_{010}\left(\frac{1}{t_F}\right)$$

$$P_{111}\left(\frac{1}{t_R}\right) = P_{110}\left(\frac{1}{t_F}\right)$$

En las ecuaciones, es necesario utilizar el inverso del tiempo de operación. Las fórmulas se acomodan y se agrega la ecuación de normalización para asegurarse que la suma de probabilidades es 1:

$$-\left(\frac{1}{t_b}\right)P_{000} + \left(\frac{1}{t_p}\right)P_{010} = 0 \quad (1)$$

$$-\left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{100} + \left(\frac{1}{t_p}\right)P_{110} = 0 \quad (2)$$

$$-\left(\frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_F} + \frac{1}{t_b}\right)P_{010} + \left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{100} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{011} = 0 \quad (3)$$

$$-\left(\frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_F}\right)P_{110} + \left(\frac{1}{t_b}\right)P_{010} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{111} = 0 \quad (4)$$

$$-\left(\frac{1}{t_R}\right)P_{011} + \left(\frac{1}{t_F}\right)P_{010} = 0 \quad (5)$$

$$-\left(\frac{1}{t_R}\right)P_{111} + \left(\frac{1}{t_F}\right)P_{110} = 0 \quad (6)$$

$$P_{000} + P_{100} + P_{010} + P_{110} + P_{011} + P_{111} = 1 \quad (7)$$

En este sistema hay 6 estados cada uno tienen asociada una probabilidad límite y hay 7 ecuaciones, por lo que para resolverlo se debe descartar cualquiera de las ecuaciones 1 a 6. Para obtener las probabilidades se deben definir los tiempos de operación de cada equipo.

#### 4.4 Medidas de desempeño

La tasa de salida ( $Th$ ) o cantidad de piezas producidas se obtiene sumando las probabilidades de todos los estados correspondientes a la estación procesando una piza, por la capacidad de producción de la estación:

$$Th = (P_{010} + P_{110}) \times \left(\frac{1}{t_p}\right)$$

La cantidad de inventario o trabajo en proceso (WIP por sus siglas en inglés) es:

$$WIP = 1 \times (P_{100} + P_{010} + P_{011}) + 2 \times (P_{110} + P_{111})$$

Finalmente, el tiempo de ciclo se obtiene aplicando la ley de Little:

$$\text{Tiempo de ciclo} = \frac{WIP}{Th}$$

#### Ejercicio 2

Utilice el archivo Célula Manufactura (Anexo 1) para estudiar una célula de manufactura con los siguientes tiempos de operación (Hamasha & Hamasha, 2022):

**Tabla 3.** Sistema con una estación y fallas

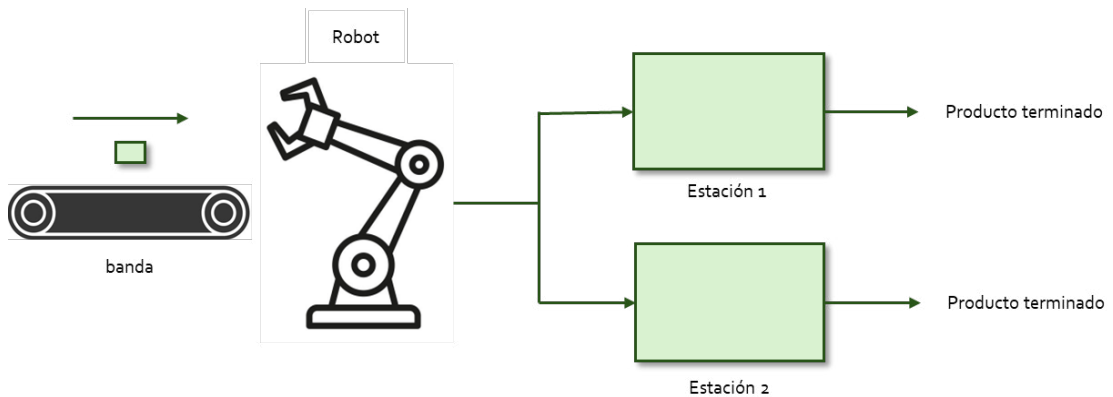
Equipo	Banda transportadora	Brazo robot	Estación de trabajo
Tiempo (minutos / pieza)	0.5	0.25	0.3

El tiempo hasta la falla es de 720 minutos, el tiempo de reparación promedio es de 30 minutos.

Programe las fórmulas para obtener  $T_h$ , WIP y tiempo de ciclo.

#### 4.5 Sistema con dos estaciones

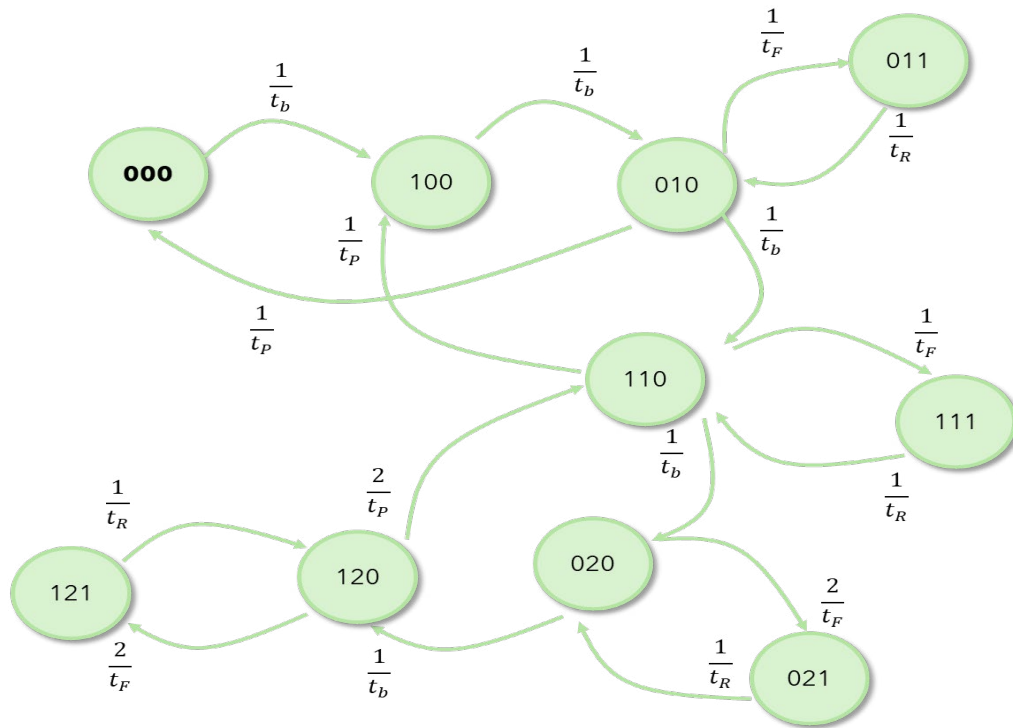
Asumiendo que se duplica la capacidad agregando una segunda máquina se tiene:



**Figura 10** Célula con dos estaciones.

### 4.5.1 Cadena de Markov:

En la figura 10 se muestra la cadena de Markov para el sistema con dos estaciones.



**Figura 11** Cadena de Markov para dos estaciones.

$$-\left(\frac{1}{t_b}\right)P_{000} + \left(\frac{1}{t_p}\right)P_{010} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{100} + \left(\frac{1}{t_p}\right)P_{110} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_F} + \frac{1}{t_b}\right)P_{010} + \left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{100} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{011} + \left(\frac{2}{t_p}\right)P_{020} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_F} + \frac{1}{t_{br}}\right)P_{110} + \left(\frac{1}{t_b}\right)P_{010} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{111} + \left(\frac{2}{t_p}\right)P_{120} = 0$$

$$-\left(\frac{2}{t_p} + \frac{1}{t_{br}} + \frac{2}{t_F}\right)P_{020} + \left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{110} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{021} = 0$$

$$-\left(\frac{2}{t_F} + \frac{1}{t_p}\right)P_{120} + \left(\frac{1}{t_{br}}\right)P_{020} + \left(\frac{1}{t_R}\right)P_{121} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{t_R}\right)P_{011} + \left(\frac{1}{t_F}\right)P_{010} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{t}\right)P_{111} + \left(\frac{1}{t}\right)P_{110} = 0$$

$$P_{000} + P_{100} + P_{010} + P_{110} + P_{011} + P_{111} + P_{020} + P_{120} + P_{021} + P_{121}$$

La utilización y la tasa de salida de las máquinas es:

$$U = \left(\frac{1}{2}(P_{010} + P_{110}) + (P_{020} + P_{120})\right)$$

$$Th = \left(\frac{1}{2}(P_{010} + P_{110}) + (P_{020} + P_{120})\right) \times 2 \times \frac{1}{t_p}$$

### Ejercicio 3

Determine las características de la célula considerando dos máquinas y las siguientes condiciones de operación (Hamasha & Hamasha, 2022):

**Tabla 4.** Sistema con una estación y fallas

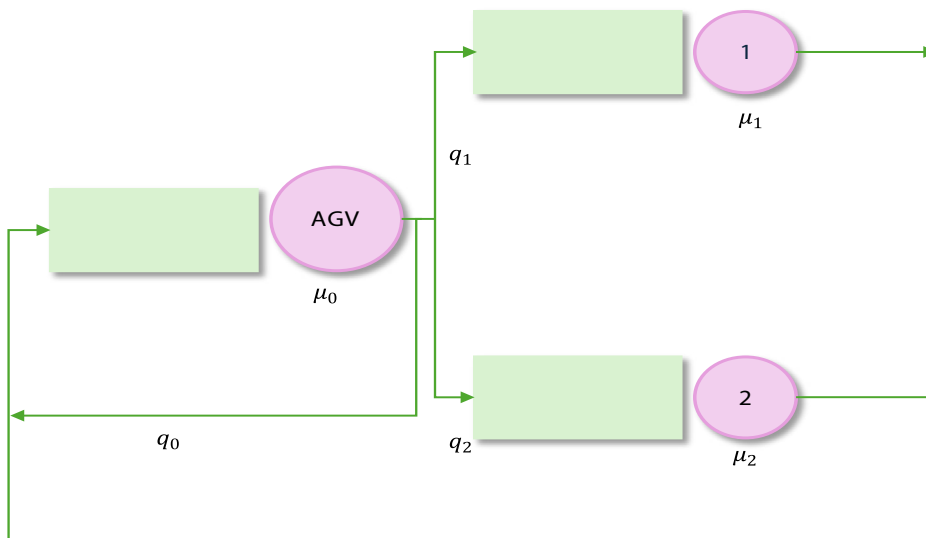
Equipo	Banda transportadora	Brazo robot	Estaciones de trabajo
Tiempo (minutos / pieza)	0.5	0.2	0.5

El tiempo hasta la falla es de 588 minutos, el tiempo de reparación promedio es de 23.8 minutos.

Se trata de un proceso con dos estaciones de trabajo en paralelo, siempre hay piezas disponibles, el AGV traslada las piezas a la máquina de acuerdo con la ruta de proceso que se muestra en la matriz P (Viswanadham & Narahari, 1992).

$$P = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como máximo solo se permiten dos piezas dentro del sistema. El proceso tiene la siguiente representación como un sistema cerrado de líneas de espera:



**Figura 12** Sistema de manufactura con control central.

## 5.1 Descripción como una cadena de Markov

Asumiendo que los tiempos de servicio son aleatorios y se distribuyen exponencialmente, entonces el sistema puede representarse mediante una cadena de Markov.

Los estados del sistema son los siguientes:

1. La estación 1 y la estación 2 se encuentran procesando una pieza respectivamente.
2. La estación 2 está procesando una pieza, el AGV traslada una pieza, la estación 1 se encuentra vacía.
3. La estación 1 está procesando una pieza, el AGV traslada una pieza, la estación 2 se encuentra vacía.
4. El AGV se encuentra trasladando una pieza, hay una pieza esperando el transporte, las estaciones 1 y 2 se encuentran vacías.
5. La estación 2 se encuentra procesando una pieza, hay una pieza en la fila de la estación 2, la estación 1 y el AGV están vacíos.
6. La estación 1 se encuentra procesando una pieza, hay una pieza en la fila de la estación 1, la estación 2 y el AGV están vacíos.

En el sistema,  $q_0$  representa tanto la entrada como la salida al proceso, los cocientes  $q_1/q_0$  y  $q_2/q_0$  son la cantidad de veces que una pieza entra a la estación 1 o a la estación 2 respectivamente antes de salir del sistema.

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

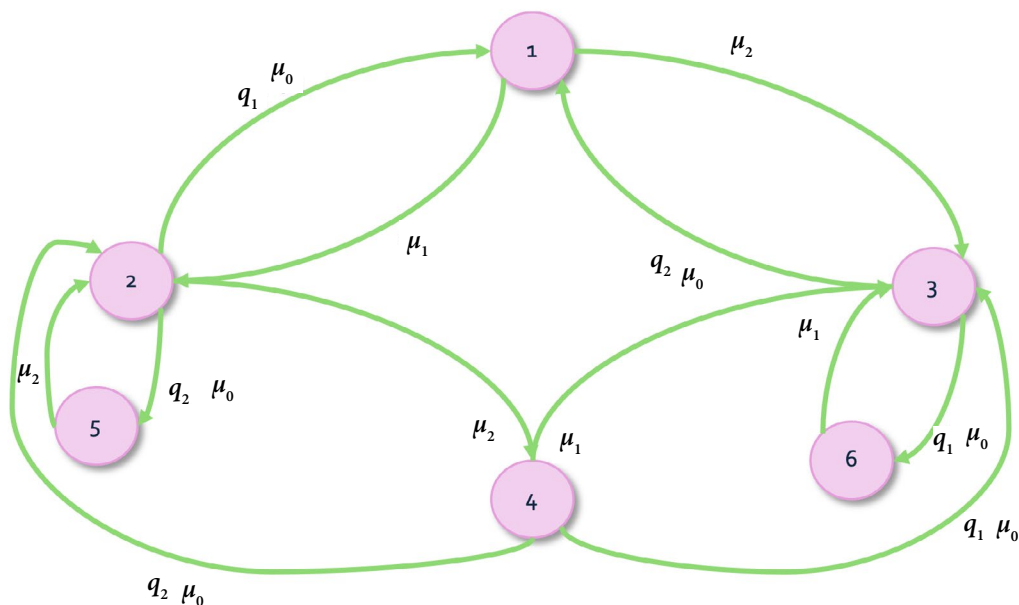
Conclusiones

Bibliografía

Referencias

## 5.2 Construcción de la cadena de Markov

La cadena de Markov de este proceso es la siguiente:



**Figura 13.** Cadena de Markov para sistema de manufactura con control central.

## 5.3 Obtención de las probabilidades límite

Las ecuaciones de flujo para obtener las probabilidades } son:

$$P_2(q_2 \mu_0 + \mu_2 + q_1 \mu_0) = P_1 \mu_1 + P_4 q_2 \mu_0 + P_5 \mu_2 \quad (2)$$

$$P_3(\mu_1 + q_2 \mu_0 + q_1 \mu_0) = P_1 \mu_2 + P_4 q_1 \mu_0 + P_6 \mu_1 \quad (3)$$

$$P_4(q_2 \mu_0 + q_1 \mu_0) = P_2(\mu_2) + P_3 \mu_1 \quad (4)$$

$$P_5(\mu_2) = P_2 q_2 \mu_0 \quad (5)$$

$$P_6(\mu_1) = P_3 q_1 \mu_0 \quad (6)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \quad (7)$$

Las expresiones 1 a 6 corresponden a las ecuaciones de flujo y la expresión 7 es la ecuación de normalización. Para obtener las probabilidades  $P_i$ , es necesario fijar los valores de la matriz  $P$  y  $\mu_i$ , descartar una de las expresiones de 1 a 6 y junto con 7 se resuelve el sistema.

## 5.4 Medidas de desempeño

En este caso es de interés la utilización del AGV, el cual corresponde a todos los estados en los que el dispositivo se encuentra en servicio:

$$U_{AGV} = P_2 + P_3 + P_4$$

Para las estaciones de trabajo:

$$U_1 = P_1 + P_3 + P_6$$

$$U_2 = P_1 + P_2 + P_5$$

### Ejercicio 4

Utilice el archivo Célula Manufactura para estudiar la estación con los siguientes tiempos de operación:

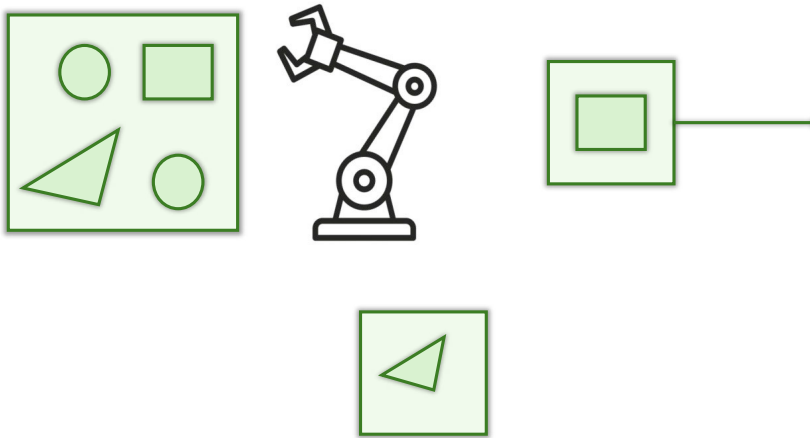
**Tabla 5.** Sistema con transporte de piezas

Equipo	AGV	Estación 1	Estación 2
Tiempo (minutos / pieza)	0.5	1	1

La matriz de proceso es la siguiente:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una estación de trabajo con dos máquinas paralelas constituye el núcleo de esta célula de manufactura. Un brazo robot gestiona el proceso, cargando piezas desde un contenedor a las máquinas y retirando los productos terminados. Es importante destacar que el espacio disponible se limita estrictamente a las piezas dentro del contenedor y a las que se encuentran actualmente en las máquinas. (Aldaihani & Savsar, 2005)



**Figura 14.** Célula de manufactura con contenedor de piezas.

### 6.1 Descripción como una cadena de Markov

Se utilizará el siguiente formato para la representación del proceso y sus estados:

Piezas restantes en el contenedor/ Estado de la máquina 1 (0, vacía, 1 trabajando una pieza, 2 esperando el robot) / Estado de la máquina 2 (0, vacía, 1 trabajando una pieza, 2 esperando el robot) / Estado del robot (0 ocioso, 1 cargando-descargando maquina 1, 2 cargando-descargando maquina 1)

Por ejemplo, suponga que hay 4 piezas en el contenedor entonces el robot se encuentra en proceso de cargar la máquina 1:

$$4 / 0 / 0 / 1$$

Cuando el robot termina la carga en la máquina 1 pasa a cargar la máquina 2:

$$3 / 1 / 0 / 2$$

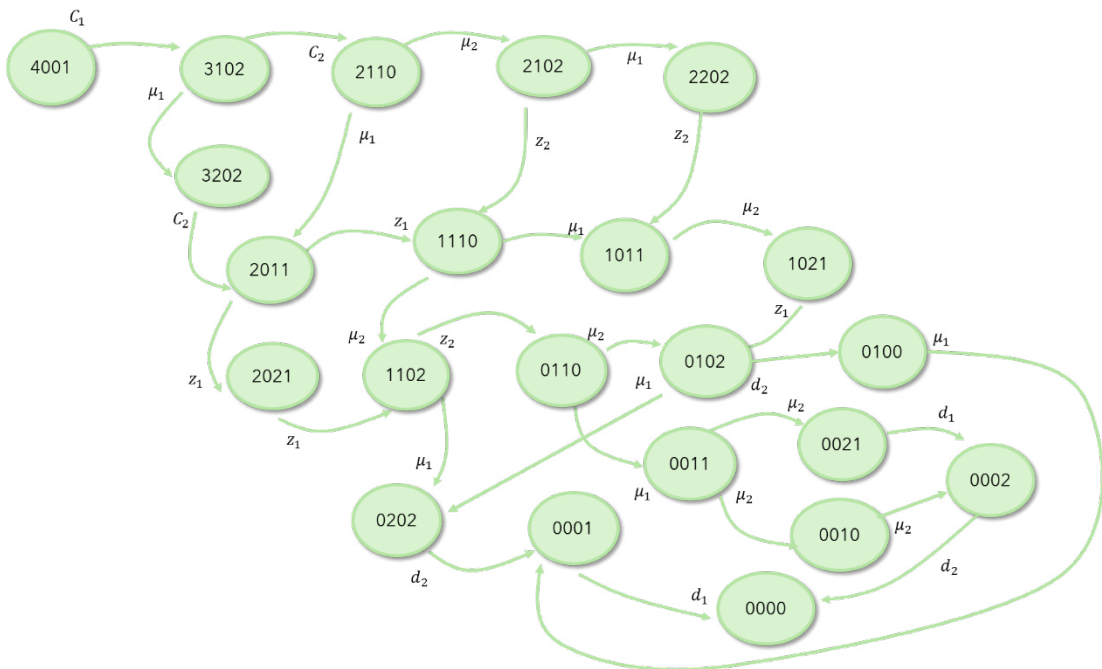
Cuando el robot termina de cargar la máquina 2 antes de que la máquina 1 termine de procesar su pieza:

$$2 / 1 / 1 / 0$$

En caso de que la máquina 1 finalice antes de que el robot termine su operación de carga:

$$3 / 1 / 0 / 2$$

El diagrama de estados para este caso es el siguiente:



**Figura 15.** Diagrama de estados para célula de manufactura con contenedor de piezas.

Las expresiones para obtener las probabilidades límite son:

$$P_{4001}c_1 = P_{0000}w$$

$$P_{3102}(\mu_1 + c_2) = P_{4001}c_1$$

$$P_{2110}(\mu_1 + \mu_2) = P_{3102}c_2$$

$$P_{2102}(\mu_1 + z_2) = P_{2110}\mu_2$$

$$P_{3202}(c_2) = P_{3102}\mu_1$$

$$P_{2202}(z_2) = P_{2102}\mu_1$$

$$P_{2011}(\mu_2 + z_1) = P_{3202}c_2 + P_{2110}\mu_1$$

$$P_{1110}(\mu_2 + \mu_1) = P_{2011}z_1 + P_{2102}z_2$$

$$P_{1011}(\mu_2 + z_1) = P_{2202}z_2 + P_{1110}\mu_1$$

$$P_{1021}(z_1) = P_{1011}\mu_2$$

$$P_{0102}(\mu_1 + d_2) = P_{1021}z_1 + P_{0110}\mu_2$$

$$P_{0100}(\mu_1) = P_{0102}d_2$$

$$P_{1021}(\mu_2) = P_{1011}\mu_2$$

$$P_{0110}(\mu_1 + \mu_2) = P_{1011}z_1 + P_{1102}z_2$$

$$P_{0011}(d_1 + \mu_2) = P_{0110}\mu_1$$

$$P_{0021}(d_1) = P_{0011}\mu_2$$

$$P_{0010}(\mu_2) = P_{0011}d_1$$

$$P_{0002}(d_2) = P_{0021}d_1 + P_{0010}\mu_2$$

$$P_{1102}(z_2 + \mu_1) = P_{2021}z_1 + P_{1110}\mu_2$$

$$P_{0202}(d_2) = P_{0102}\mu_1 + P_{1102}\mu_1$$

$$P_{0001}(d_1) = P_{0100}\mu_1 + P_{0202}(d_2)$$

$$P_{0100}(\mu_1) = P_{0102}(d_2)$$

$$P_{0000}(w_1) = P_{0002}(d_2) + P_{0001}(d_1)$$

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

Junto con la expresión de normalización a partir del sistema obtenga las características de la célula de manufactura con las siguientes condiciones de operación (Aldaihani & Savsar, 2005):

**Tabla 6.** Sistema con dos estaciones y contenedor de piezas

Equipo	Robot	Estación 1	Estación 2
Tiempo (minutos / pieza)	0.5	2	2
Carga 1ª pieza / Descarga última pieza	0.25 / 0.25	-	-
Tasa de llegadas contenedor	1		
Capacidad	4	1 pieza a la vez	1 pieza a la vez

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

## 7.1 Líneas de producción con distribución por proceso: un enfoque de cadena de Markov<sup>1</sup>

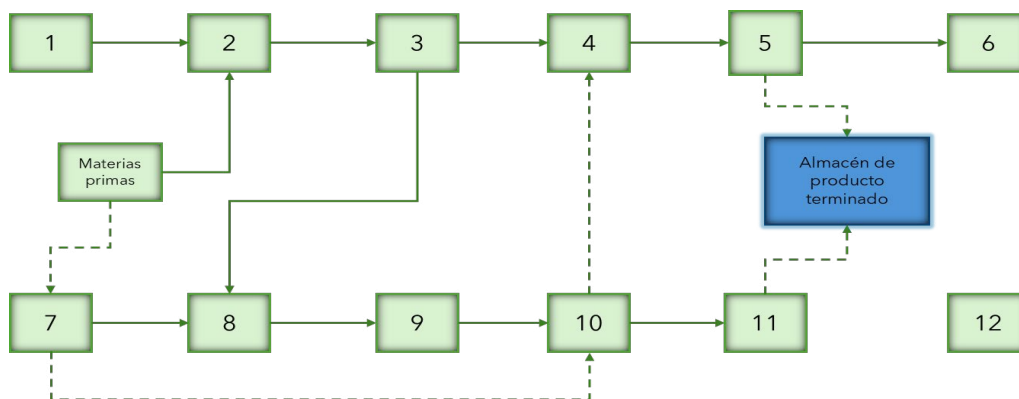
En las líneas de producción, los materiales visitan cada una de las estaciones en donde se llevan a cabo una serie de transformaciones que van agregando valor. En este artículo se propone un modelo para una fábrica de refrigeradores ubicada en México, existen varias rutas posibles para las materias primas. Las máquinas para trabajar metales son dispositivos accionados eléctricamente para realizar diversas operaciones en metales, como lijado, moleteado, taladrado, mandrilado, refrentado, roscado y torneado, entre otras. Las más utilizadas son: tornos, fresadoras, rectificadoras, taladradoras, punzonadoras, dobladoras, cabinas de pintura, estaciones de soldadura, perfiladoras, abrochadoras, sierras, cepilladoras, cizallas, fresadoras, taladros de columna, etc.

Para ilustrar el uso de la técnica propuesta, considérese una sección de producción de proceso integrado de 12 máquinas de metalurgia, un almacén de materia prima (láminas de acero o aluminio) y un buffer temporal donde se colocan los productos terminados antes de ser utilizados en otra línea de ensamblaje.

Con el modelo se determinan los valores esperados de indicadores como la tasa de producción por máquina, la producción total, el tiempo ocioso y la eficiencia del sistema. En la figura 16 se muestra una ruta de acuerdo con los datos de los autores del artículo.

---

<sup>1</sup> Pérez-Lechuga, G.; Venegas-Martínez, F.; Martínez-Sánchez, J.F. Mathematical Modeling of Manufacturing Lines with Distribution by Process: A Markov Chain Approach. *Mathematics* 2021, 9, 3269. <https://doi.org/10.3390/math9243269>



**Figura 16.** Vista de una secuencia de pasos dentro de la planta para un producto.

A partir de los datos históricos disponibles que indican los distintos pasos que siguen los materiales en la fábrica, se obtiene la siguiente tabla 7 de transiciones:

**Tabla 7.** Matriz de transición entre estaciones

E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0.087	0.056	0.059	0.001	0.044	0.087	0.080	0	0.013	0.568	0
2	0	0	0.070	0.042	0.015	0.117	0.046	0.078	0.015	0.061	0.110	0.441
3	0	0.061	0	0.106	0	0.068	0.009	0	0.016	0.098	0	0.639
4	0	0.037	0.100	0	0.055	0.055	0.076	0.116	0	0.065	0.080	0.412
5	0	0.022	0.10	0.015	0	0.116	0.006	0.059	0.108	0.094	0.091	0.377
6	0	0.091	0.12	0.008	0.025	0	0.045	0.090	0.009	0.033	0.077	0.494
7	0	0.08	0	0.112	0.029	0.045	0	0	0.095	0.025	0.100	0.509
8	0	0.054	0.119	0.103	0.052	0.1244	0.045	0	0.064	0.037	0.016	0.381
9	0	0.073	0.034	0.121	0.046	0	0.117	0.099	0	0.02	0.022	0.460
10	0	0	0	0.11	0.081	0.081	0.087	0	0	0	0	0.636
11	0	0.026	0.011	0	0.019	0.072	0.060	0.118	0.1	0.097	0	0.449
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

En este caso, el estado 1 representa el almacén de materia prima, de donde proviene el material que entra en el proceso de fabricación, y el estado 12 es el almacén de producto terminado, donde se acumula toda la producción antes de entrar en la línea de montaje.

Las probabilidades de transición se obtuvieron a partir de datos históricos generados en manufactura e ingeniería de planta. El primero define las operaciones de mecanizado que se realizarán en cada producto, y el segundo proporciona información sobre la disponibilidad, capacidad y eficiencia del equipo.

En esta propuesta, se utilizó la teoría de cadenas de Markov para modelar la actividad de una línea de manufactura por proceso. Debido a la frecuencia con la que se encuentran este tipo de diseños en la manufactura, el problema aquí abordado adquiere especial importancia para determinar la producción promedio a la que se puede aspirar cuando se conocen las tasas de fallos y mantenimiento del sistema.

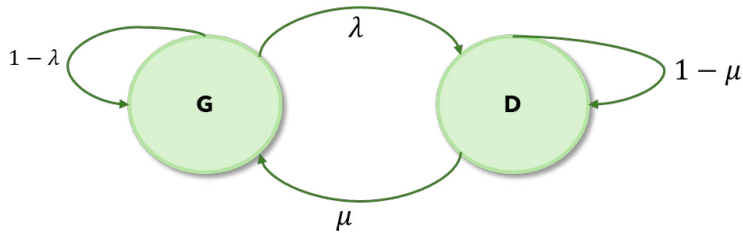
## 7.2 Evaluación de la calidad en sistemas de fabricación flexible: un enfoque markoviano<sup>2</sup>

Aplicando un modelo de Markov, este estudio examina el comportamiento de la calidad en un sistema de manufactura multiproducto. Se derivan expresiones analíticas para cuantificar la probabilidad de piezas aprobadas y se analiza el comportamiento del sistema en escenarios donde se requiere un alto nivel de calidad.

El sistema con un solo producto es bien conocido y se puede encontrar en algún texto sobre modelos estocásticos. Considere un sistema de fabricación que produce un tipo de producto. Sean G y D los estados en los que el sistema produce una pieza de buena calidad o una pieza defectuosa. Cuando el sistema se encuentra en el estado G, existe una probabilidad de transición  $\lambda$  de producir una pieza defectuosa y una probabilidad de  $1-\lambda$  de continuar produciendo una pieza en buen estado.

De igual manera, cuando el sistema se encuentra en el estado d, puede producir una pieza en buen estado con una probabilidad  $\mu$  y una pieza defectuosa con una probabilidad de  $1-\mu$ . Las variables  $\lambda$  y  $\mu$  pueden considerarse como probabilidades de obtener una pieza buena o bien una pieza defectuosa, respectivamente.

<sup>2</sup> Li, J., & Huang, N. (2007). Quality evaluation in flexible manufacturing systems: A Markovian approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007(1), 057128.



**Figura 17.** Probabilidades asociadas a los estados G y D.

Suponga que se fabrican dos familias de productos; Sea  $P(g_i)$  la probabilidad de obtener un producto aprobado y  $P(d_i)$  la probabilidad de obtener un producto defectuoso,  $i= 1, 2$ . La probabilidad total de obtener un producto aprobado es

$$P_g = P(g_1) + P(g_2)$$

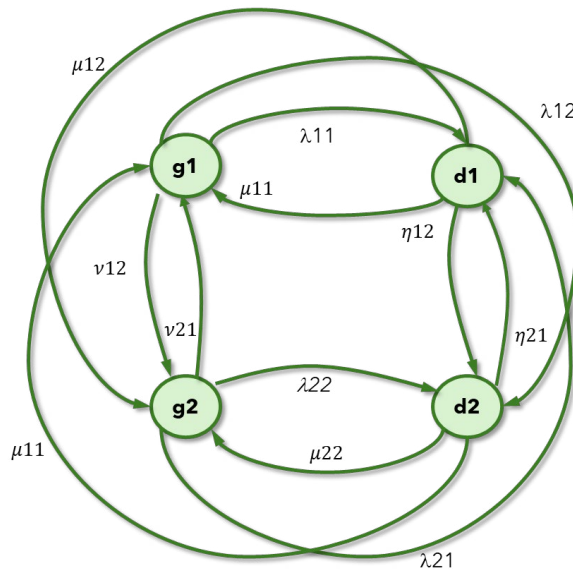
De igual forma, la probabilidad total de obtener un producto defectuoso es:

$$P_d = P(d_1) + P(d_2)$$

Con dos tipos de producto, el sistema tiene ahora cuatro estados posibles:  $g_1, g_2, d_1$  y  $d_2$ . La probabilidad de transición de un producto aprobado a uno defectuoso es  $\lambda_{ij}$ , la probabilidad de transición desde un producto defectuoso a uno aprobado es  $\mu_{ij}$ ; finalmente la probabilidad de repetir un producto aprobado es  $v_{ij}$  y la probabilidad de seguir produciendo un artículo defectuoso es  $\eta_{ij}$ .

Asumiendo que las piezas arriban de forma aleatoria entonces la probabilidad de que encontrar una pieza tipo 1 es  $P(1)$  y la probabilidad de encontrar una pieza tipo 2 es  $P(2)$ .

La cadena de Markov correspondiente es:



**Figura 18.** Cuatro estados de la cadena de Markov.

Las expresiones de probabilidad son:

$$P(1) + P(2) = 1, P(g1) + P(d1) = P(1), P(g2) + P(d2) = P(2)$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \nu_{11} + \nu_{12} = 1, \lambda_{22} + \lambda_{21} + \nu_{22} + \nu_{21} = 1, \mu_{11} + \mu_{12} + \eta_{11} + \eta_{12} = 1,$$

$$\mu_{11} + \mu_{12} + \eta_{11} + \eta_{12} = 1$$

A partir del modelo se obtienen las siguientes expresiones.

Relación de productos aprobados:

$$P(g) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Capacidad del sistema para seguir produciendo productos aprobados si se produce el producto 1 o bien si se intercambia al producto 2, es decir, la probabilidad de tránsito entre aprobados y rechazados:

$$e_{1i} = \frac{\mu_{1i}}{\lambda_{1i} + \mu_{1i}}$$

Si  $e_{11} = e_{12}$ , entonces:

$$P(g) = \frac{\mu_{11}}{\lambda_{11} + \mu_{11}}$$

Si  $e_{11} > e_{12}$ , entonces:

$$P(g) < \frac{\mu_{11}}{\lambda_{11} + \mu_{11}}$$

Finalmente si  $e_{11} < e_{12}$ :

$$P(g) > \frac{\mu_{11}}{\lambda_{11} + \mu_{11}}$$

Debido a que los sistemas flexibles de manufactura producen dos o más tipos de artículos, es necesario contar con una herramienta que permita explicar el comportamiento de la calidad de los productos finales. En este artículo, los autores hacen un análisis utilizando cadenas de Markov con la que obtienen formulas con las que se explica el comportamiento de un sistema real.

### 7.3 Enfoque de cadena de Markov para la estimación del coste de fallos en la fabricación por lotes<sup>3</sup>

Este sistema de manufactura produce lotes de un producto, los cuales son inspeccionados al 100% en la etapa final de ensamblado. Los lotes que cumplen los estándares de calidad se envían al cliente. Un porcentaje de los lotes defectuosos se envía a retrabajo y luego se somete nuevamente a una prueba de funcionalidad. De estos, algunos lotes fallan y se destinan como suministro a otras áreas, mientras que el resto se desecha. Los lotes entregados al cliente también pasan por pruebas de calidad; aquellos que no cumplen los requisitos son devueltos a la planta para repetir la prueba de funcionalidad.

<sup>3</sup> Sastri, T., Feiring, B., & Mongkolwana, P. (2001). Markov chain approach to failure cost estimation in batch manufacturing. *Quality Engineering*, 13(1), 43-49. DOI: 10.1080/08982110108918623

## Supuestos

A pesar de que la inspección es al 100%, 9 de cada 10 no se detectan y se envían, pero son detectadas por el cliente.

Un lote defectuoso se regresa nuevamente sin ser detectado.

Un lote puede repetir el retrabajo varias veces.

Estados:

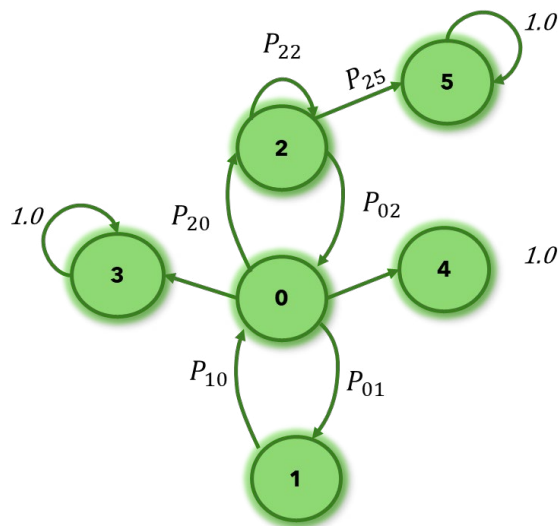
**Tabla 8.** Estados posibles de un lote

Estado	Símbolo	Característica
Lote en prueba funcional	0	Estado transitorio
Lote en retrabajo	1	Estado transitorio
Lote en inspección con el cliente	2	Estado transitorio
Desecho	3	Estado absorbente
Suministro para otro proceso	4	Estado absorbente
Lote aprobado	5	Estado absorbente

El proceso de retrabajo hace que un lote transite de un estado a otro, el proceso se cambia entre estados se interrumpe cuando el lote ingresa a alguno de los estados absorbentes (3, 4 o 5). Cada estado tiene una probabilidad de transición asociada  $p_{ij}$  (figura 19)

**Tabla 9.** Probabilidades por estado

Símbolo	Probabilidad
$p_{01}$	De prueba funcional a retrabajo
$p_{02}$	De prueba funcional a inspección con el cliente
$p_{03}$	De prueba funcional a desecho
$p_{04}$	De prueba funcional a inspección a suministro
$p_{20}$	De inspección con el cliente a prueba funcional
$p_{22}$	Inspección con el cliente a inspección con el cliente
$p_{25}$	Inspección con el cliente a lote aprobado



**Figura 19.** Cadena de Markov con los estados posibles de cada lote.

Siendo la matriz de transición:

**Tabla 10.** Matriz de transición

0	$P_{01}$	$P_{02}$	$P_{03}$	$P_{04}$	0
1	0	0	0	0	0
$P_{20}$	0	$P_{22}$	0	0	$P_{25}$
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

En este sistema, los estados que generan los costos son:

$u_{ik}$ : Probabilidad de que el lote se mantenga atrapado en alguno de los estados  $k = 3, 4$  o  $5$  dado que proviene de los estados  $i = 0, 1$  o  $2$ .

$v_i$ : la tasa de transiciones desde un estado transitorio  $i$  hacia un estado absorbente.

$w_{ij}$ : número de veces que el lote llega al estado transitorio  $j$  previo a un estado a un estado absorbente dado que inicia en un estado  $i$ .

Esto da origen a las siguientes métricas:

- $u_{03}$ : fracción de unidades de un lote que terminan como desecho
- $u_{04}$ : fracción de unidades de un lote que terminan degradados
- $u_{05}$ : fracción de unidades de un lote sin defectos
- $u_{25}$ : fracción de material sin defectos desde la inspección con el cliente
- $v_0$ : tasa de cambios de estado desde que el material sale de la prueba funcional
- $w_{22}$ : número de veces que el material visita la prueba con el cliente
- $w_{20}$ : número promedio de pruebas que realiza el cliente
- $w_{11}$ : número promedio de retrabajos
- $w_{21}$ : número promedio de retrabajos de lotes regresados que regresa el cliente

$$v_0 = 1 + P_{01}v_1 + P_{02}v_2 \quad v_1 = 1 + v_0 \quad (1)$$

$$v_2 = 1 + P_{20}v_0 + P_{22}v_2$$

$$u_{03} = P_{03} + P_{01}u_{03} + P_{02}u_{23}$$

$$u_{23} = P_{20}u_{03} + P_{22}u_{23}$$

$$u_{04} = P_{04} + P_{01}u_{04} + P_{02}u_{24} \quad (2)$$

$$u_{24} = P_{20}u_{04} + P_{22}u_{24}$$

$$u_{05} = P_{01}u_{05} + P_{02}u_{25}$$

$$u_{25} = P_{25} + P_{22}u_{25} + P_{20}u_{05}$$

$$w_{00} = 1 + P_{01}w_{10} + P_{02}w_{20}$$

$$w_{01} = P_{01}w_{11} + P_{02}w_{21}$$

$$w_{02} = P_{01}w_{12} + P_{02}w_{22} \quad (3)$$

$$w_{22} = 1 + P_{20}w_{02} + P_{22}w_{22}$$

$$w_{10} = w_{00} \quad w_{11} = 1 + w_{01} \quad w_{12} = w_{02}$$

$$w_{21} = P_{20}w_{01} + P_{22}w_{21}$$

$$w_{20} = P_{20}w_{00} + P_{22}w_{20}$$

A partir de la solución de las ecuaciones de balance para obtener las probabilidades, se obtienen igualmente las expresiones de costo. Para obtener las variables  $u_{ik}$ ,  $v_i$  y  $w_{ij}$  los autores utilizan el siguiente procedimiento:

Sea  $L = (1 - P_{22})(1 - P_{01}) - P_{02}P_{20}$  Substituyedo en

los grupos 2 - 4

$$u_{03} = \frac{(1 - P_{22})P_{03}}{L}$$

$$u_{23} = \frac{P_{20}P_{03}}{L}$$

$$u_{04} = \frac{(1 - P_{22})P_{04}}{L}$$

$$u_{24} = \frac{P_{20}P_{04}}{L}$$

$$u_{05} = \frac{P_{02}P_{25}}{L}$$

$$u_{25} = \frac{P_{25}}{L}(1 - P_{01})$$

$$v_2 = \frac{1 - P_{20}v_0}{1 - P_{22}}$$

$$w_{01} = \frac{P_{01}(1 - P_{22})}{L}$$

$$w_{00} = \frac{1 - P_{22}}{L} = w_{10}$$

$$w_{20} = \frac{P_{20}}{L}$$

$$w_{21} = \frac{P_{01}P_{20}}{L}$$

$$w_{11} = 1 = w_{01} = 1 + \frac{(1 - P_{22})P_{01}}{L}$$

$$w_{02} = \frac{P_{02}}{L} \quad w_{22} = \frac{1 - P_{01}}{L}$$

Un nuevo grupo de medidas de desempeño útiles para evaluar el funcionamiento del proceso se obtienen a continuación, sean:

$G$ : el número de piezas sin defectos

$M$ : el tamaño del lote

$P$ : número de piezas que terminan degradadas

$N$ : número de piezas que terminan desechadas

Entonces:

$M - G =$  número de piezas defectuosas

$$M = G + P + N$$

$$u_{05} + u_{03} + u_{04} = 1$$

Las cantidades  $G$ ,  $N$  y  $P$  tienen las siguientes expresiones en función de  $u_{ij}$ :

$$G = u_{05} M$$

$$N = (u_{03} / u_{05}) G$$

$$P = (u_{04} / u_{05}) G$$

Finalmente, suponga que el costo de realizar la reparación es  $D_1$ . ¿Cuál será el costo de reparación de un lote?

Sea  $r_{ij}$  la probabilidad de que cada unidad visite la estación de reparación por primera vez desde la estación  $i$ . Si  $X$  es el número de piezas que visitan la estación de reparación por primera vez y  $M$  es el tamaño del lote, entonces  $X = r_{01} M$

A partir de las ecuaciones de flujo se resuelve para  $r_{01}$  y se obtiene la expresión:

$$r_{01} = \frac{(1 - P_{22}) P_{01}}{1 - P_{22} - P_{02} P_{20}}$$

Dado que  $w_{11}$  es el número de retrabajos requeridos por cada pieza del lote, el costo promedio de retrabajos será  $w_{11}D_1$  por pieza y el costo total para un lote de tamaño  $M$  será  $w_{11}r_{01}D_1M$ .

#### 7.4 Estimación de la calidad de la materia prima en la inspección de entrada mediante decisiones de Markov<sup>4</sup>

La inspección de entrada en la manufactura es crucial para el control de calidad, la reducción de costos y la mitigación de riesgos de interrupción por fallas en los materiales. La predicción de la tasa de aceptación de la materia prima permite una selección de proveedores más eficiente y la optimización del proceso productivo mediante la identificación de no conformidades. Este trabajo presenta un Modelo de Predicción de Aceptación de Materia Prima (RMAP) fundamentado en el análisis de Markov.

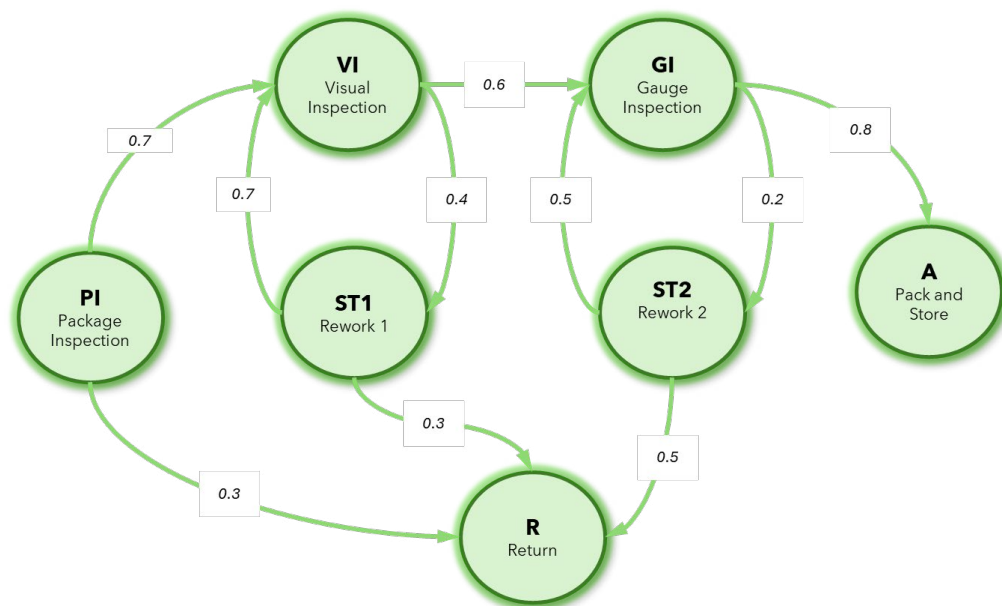
El sistema de seguimiento de materiales en la fábrica registra las diferentes rutas de la materia prima entrante. En la bahía de recepción, se realiza una inspección de empaque (PI) para asegurar la trazabilidad. Los materiales no conformes (R) se retornan al proveedor. Aquellos que superan esta inspección son sometidos a una inspección visual (VI) para evaluar atributos como color, textura y la presencia de daños. Los materiales aceptados avanzan a una inspección dimensional, o de diámetro (GI). Las unidades con defectos menores son enviadas a una estación de retrabajo (ST1) y posteriormente reingresan a VI, pudiendo requerir iteraciones. Los materiales cuya corrección no es viable son devueltos al proveedor.

Tras la inspección de diámetro (GI), los materiales que cumplen las especificaciones son trasladados al almacén (A). Los que no cumplen se envían a una estación de corrección (ST2), pudiendo necesitar varios ciclos de retrabajo. Si después de la corrección el material sigue sin cumplir los requisitos, se devuelve al proveedor.

---

<sup>4</sup> Markov Decision Process approach in the estimation of raw material quality in incoming inspection process. Annapoorni Mani, Shahriman Abu Bakar, Pranesh Krishnan and Sazali Yaacob 2021J. Phys.: Conf. Ser. 2107 012025 DOI 10.1088/1742-6596/2107/1/012025

Con base en las probabilidades de transición entre los distintos estados del proceso, se estima la probabilidad estacionaria de cada estado del sistema. Para este análisis, se definen tres escenarios de tasa de aceptación: baja, media y alta. El modelo resultante se utiliza con un enfoque predictivo para la evaluación y selección de proveedores en función de la calidad de la materia prima entregada. En la figura 20 se presenta el diagrama de flujo de estados con las probabilidades de transición.



**Figura 20.** Cadena de Markov con las probabilidades de transición.

Por ejemplo, para el escenario con un nivel bajo de aceptación, la matriz de probabilidad es la siguiente:

**Tabla 11.** Matriz de transición con datos correspondientes al escenario analizado

	PI	VI	GI	ST 1	ST 2	A	R
PI	0	0.3	0	0	0	0	0.7
VI	0	0	0.4	0.6	0	0	0
GI	0	0	0	0	0.8	0.2	0
ST 1	0	0.4	0	0	0	0	0.6
ST 2	0	0	0.2	0	0	0	0.8
A	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	1

La matriz de probabilidades a largo plazo únicamente para el primer escenario es la siguiente:

**Tabla 12.** Matriz de transición a largo plazo

	PI	VI	GI	ST 1	ST 2	A	R
PI	0	0	0.00026	0.00014	0	0.038	0.962
VI	0	0.00019	0	0	0.00070	0.125	0.874
GI	0	0	1.678E-05	0	0	0.238	0.762
ST 1	0	0	0.00034	0.00019	0	0.050	0.949
ST 2	0	0	0	0	1.678E-05	0.048	0.952
A	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	1

En el resultado se aprecia que a largo plazo la proporción de producto que regresa 96.2% y únicamente 3.8% termina como producto aceptado, en este sentido es importante asegurar que el proveedor cuenta con la capacidad necesaria para cumplir con las características del material solicitado para no tener este problema a futuro.

## 7.5 Modelado de procesos de fabricación mediante cadenas de Markov<sup>5</sup>

Los sistemas de identificación por radiofrecuencia (RFID) son de gran importancia en los entornos de manufactura, ya que posibilitan la identificación expedita de objetos y la transmisión de la información asociada. Esta tecnología se fundamenta en el uso de

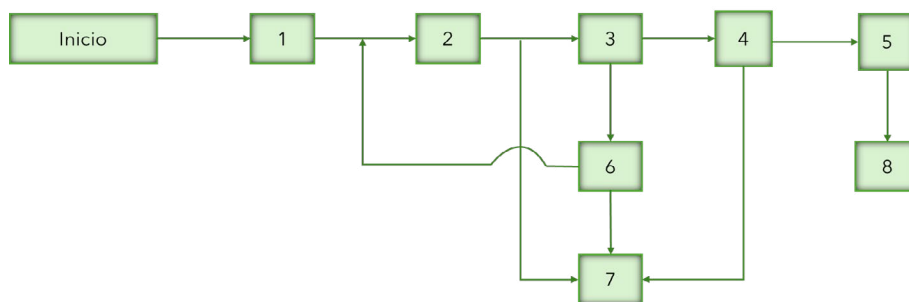
<sup>5</sup> Leigh, J. M., Jackson, L., Dunnett. (2017). Modelling manufacturing processes using Markov chains.

etiquetas que incorporan un chip para el almacenamiento de los datos del producto, los cuales son interrogados mediante un lector electrónico. La información obtenida permite el seguimiento y la trazabilidad de objetos (componentes o productos finales) a lo largo del flujo de producción.

En la tabla 13 se muestran el estado y las fases correspondientes que se efectúan en el proceso de producción de teléfonos inteligentes y en la figura 21 se presentan las estaciones de la fábrica.

**Tabla 13.** Estado y fase correspondiente

1	Asignación de código de barras
2	Inspección visual
3	Pruebas de funcionamiento
4	Borrado de datos
5	Limpieza
6	Reparación
7	Tratamiento de residuos
8	Venta



**Figura 21.** Estaciones de la fábrica.

Este sistema de producción considera una gran variedad de modelos de teléfonos celulares, la información contiene esencialmente un número de parte, la hora de ingreso y la hora de salida del sistema, el modelo y el tipo de artículo (por ejemplo, teléfono celular). La empresa cuenta con una base de datos con 99727 registros que indican la

frecuencia de visitas registradas en cada etapa, esta se procesa para eliminar registros con probabilidades bajas a las que clasifica como anomalías y el resultado final es la siguiente matriz 14 con las probabilidades de transición.

**Tabla 14.** Matriz de transición obtenida a partir del análisis estadístico de los registros de los celulares.

	1	2	4	3	5	6	7	8	AE
1	0	0.58	0.04	0.381	0	0	0	0	0
2	0	0	0.333	0.265	0.028	0	0.035	0.324	0.017
4	0	0.062	0	0.061	0.158	0.112	0	0.584	0.023
3	0	0.57	0.341	0	0	0	0	0.078	0.011
5	0	0	0	0	0	0	0	0.97	0.03
6	0	0	0	0.383	0	0	0.617	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0.244	0.756
AE	0	0	0	0	0	0	0	0	0

El modelo se emplea para estimar las rutas y así se cuenta con una herramienta que agilice el rastreo de los dispositivos que entran al proceso.

## 7.6 Programación de mantenimiento preventivo en edificios de cuidado de la salud mediante cadenas de Markov<sup>6</sup>

La presente investigación se centró en el análisis de 25 centros de salud pertenecientes a tres distritos sanitarios españoles, edificados entre los años 1985 y 2005. Dichas instalaciones operan de forma continua (24 horas al día, los 365 días del año) y son sometidas a inspecciones rutinarias con una periodicidad de 7, 15 o 21 días para la evaluación de su estado estructural. El resultado de cada inspección se traduce en un dictamen que clasifica el estado del edificio en uno de nueve posibles niveles de deterioro, los cuales se describen en la tabla 15.

<sup>6</sup> González-Domínguez, J., Sánchez-Barroso, G., & García-Sanz-Calcedo, J. (2020). Scheduling preventive maintenance in healthcare buildings using Markov chain. *Applied Sciences*, 10 (15), 5263.

**Tabla 15.** Escala de deterioro de un edificio del sector salud

Grado	Descripción del estado del edificio	Incidentes / mes	% de deterioro
1	Excelente	< 5	0 - 10
2	Muy bien	6 - 10	11 - 20
3	Bien	11 - 15	21 - 30
4	Aceptable	16 - 20	31 - 40
5	Tolerable	21 - 25	41 - 50
6	Baja	22 - 30	51 - 60
7	Muy baja	31 - 35	61 - 70
8	Pobre	31 - 60	71 - 80
9	Inaceptable	> 60	> 80

A partir de registros estadísticos del Ministerio de Salud de España y del Servicio de Salud Regional de Extremadura, se determinaron las probabilidades de que un hospital transite o cambie su estado después de una evaluación, el resultado que se obtuvo es el siguiente:

**Tabla 16.** Matriz de transición de deterioro de un edificio del sector salud

Grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.96	0.03	0.01	0	0	0	0	0	0
2	0	0.94	0.05	0.01	0	0	0	0	0
3	0	0.92	0.07	0.01	0	0	0	0	0
4	0	0	0.89	0.1	0.01	0	0	0	0
5	0	0	0	0.85	0.11	0.03	0.01	0	0
6	0	0	0	0	0.8	0.16	0.03	0.01	0
7	0	0	0	0	0	0.74	0.22	0.01	0
8	0	0	0	0	0	0	0.68	0.32	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1

La validación del modelo se llevó a cabo a través del análisis de registros por un panel de expertos, quienes verificaron la concordancia entre el estado actual de los hospitales y su respectivo grado de deterioro. Un aspecto relevante identificado fue la relación directa entre un mayor nivel de deterioro y una probabilidad incrementada de obtener una calificación desfavorable. La implementación de esta herramienta posibilita el desarrollo de estrategias proactivas de inspección y mantenimiento de edificios, lo que conlleva a una reducción de costos en materiales, viáticos y contratación de personal técnico especializado.

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

## Conclusiones

Las cadenas de Markov son una herramienta con la que se construyen modelos analíticos de sistemas de tipo estocástico, y pueden encontrarse aplicaciones prácticamente en cualquier ámbito. En el caso de los sistemas de manufactura, esta herramienta ha permitido el desarrollo de modelos para el análisis de todo tipo de configuraciones de sistemas de producción y aún continúa en desarrollo.

En ese trabajo se han presentado aplicaciones específicamente para el análisis de células de manufactura, con la intención de que estudiantes, profesores y profesionistas tengan a la mano un documento de consulta con aplicaciones reportadas preferentemente en la literatura especializada con trabajos que abarcan desde 1992 hasta la fecha. También se consideran algunas otras áreas fuera de la manufactura, con la intención de ampliar el panorama sobre las posibilidades de esta herramienta.

Existen libros clásicos sobre el tema como son los textos de (Buzacott & Shanthikumar, 1993) y (Ahtisk, 1997), pero se ha dado preferencia a ejemplos presentados en fuentes más recientes como (Curry & Feldman, 2009) y (Krieg, 2003).

El trabajo no es exhaustivo y únicamente es una muestra del potencial de esta herramienta con ejemplos de modelos analíticos que explican el funcionamiento de distintas configuraciones de células de manufactura, procesos de calidad, rastreo de materiales de diversas clases, movimiento de bandas transportadoras, brazos robots, por mencionar algunos.

Se presentan los ejemplos procurando desglosar el método de análisis propuesto en cada fuente, en la mayor parte de los ejemplos se cierra la presentación con datos numéricos para completar el proceso de análisis, en este sentido es importante decir que es necesario contar ya sea con una calculadora o bien una hoja de cálculo para agilizar las operaciones.

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

Es importante señalar que, como cualquier herramienta, el enfoque de cadenas de Markov tiene un alcance, y en este caso la limitante principal es el crecimiento explosivo en el número de estados a medida que el proceso es cada vez más complejo y es común entonces utilizar la simulación del sistema como alternativa de análisis.

Se debe tener en cuenta que las cadenas de Markov y la simulación no son herramientas excluyentes, todo lo contrario, debe siempre tener en mente que son herramientas que se complementan una con otra, combinarlas mejorará la comprensión del proceso que se está analizando.

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

# Bibliografía

- Aldaihani, M. M., & Savsar, M. (2005). A stochastic model for the analysis of a two-machine flexible manufacturing cell. *Computers & Industrial Engineering*, 49(4), 600-610. doi:10.1016/j.cie.2005.09.002
- Altiok, T. (1997). *Performance Analysis of Manufacturing Systems*. New York: Springer.
- Buzacott, J. A., & Shanthikumar, J. G. (1993). *Stochastic models of manufacturing systems*. New Jersey: Pearson.
- Curry, G. L., & Feldman, R. M. (2009). *Manufacturing Systems Modeling and Analysis*. Berlin: Springer.
- González-Domínguez, J., Sánchez-Barroso, G., & García-Sanz-Calcedo, J. (2020). Scheduling of Preventive Maintenance in Healthcare Buildings Using Markov Chain. *Applied Sciences*, 2020(10), 1-15. doi:10.3390/app10155263
- Hamasha, M. M., Alazzam, A., Hamasha, S., & Aqlan, F. (2015). Multimachine Flexible Manufacturing Cell Analysis Using a Markov Chain-Based Approach. *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology*, 5(3), 439-446. doi:10.1109/TCPMT.2015.2394232
- Hamasha, M., & Hamasha, S. (2022). Markovian analysis of unreliable multi-machine flexible manufacturing cell. *PLoS ONE*, 17(2), 1-22. doi:10.1371/journal.pone.0259247
- Krieg, G. N. (2003). *Kanban-Controlled Manufacturing Systems*. New York: Springer.
- Leigh, J. M., Jackson, L., & Dunnett, S. (2017). Modelling Manufacturing Processes using Markov Chains. En M. Cepin, & R. Bris (Ed.), *Proceedings of the 27th European safety and reliability conference (ESREL 2017)*, (págs. 1-6). Portoroz, Slovenia: CRC Press. Obtenido de [https://repository.lboro.ac.uk/articles/conference\\_contribution/Modelling\\_manufacturing\\_processes\\_using\\_Markov\\_chains/9220907/files/16798187.pdf](https://repository.lboro.ac.uk/articles/conference_contribution/Modelling_manufacturing_processes_using_Markov_chains/9220907/files/16798187.pdf)
- Li, J., & Huang, N. (2007). Quality evaluation in flexible manufacturing systems: A Markovian approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007(1), 1-24. doi:10.1155/2007/57128

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

- Mani, A., Abu Bakar, S., Krishnan, P., & Yaacob, S. (2021). Markov Decision Process approach in the estimation of raw material quality in incoming inspection process. *Journal of Physics: Conference Series. International Conference on Man Machine Systems (ICoMMS 2021)* 19-20 October 2021, (págs. 1-9). Perlis, Malaysia: IOP Publishing. doi:10.1088/1742-6596/2107/1/012025
- Pérez-Lechuga, G., Venegas-Martínez, F., & Martínez-Sánchez, J. F. (2021). Mathematical Modeling of Manufacturing Lines with Distribution by Process: A Markov Chain Approach. *Mathematics*, 2021(9), 1-17. doi:10.3390/math9243269
- Sastri, T., Feiring, B., & Mongkolwana, P. (2001). Markov chain approach to failure cost estimation in batch manufacturing. *Quality Engineering*, 13(1), 43-49. doi:10.1080/08982110108918623
- Stewart, W. J. (2009). *Probability, Markov Chains, Queues and simulation. The mathematical basis or performance modelling*. New Jersey: Princeton University Press.
- Taylor, H. M., & Karlin, S. (1998). *An Introductio to Stochastic Modelling*. San Diego, CA: Academic Press.
- Viswanadham, N., & Narahari, Y. (1992). Stochastic modelling of flexible manufacturing systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 16(3), 15-34. doi:10.1016/0895-7177(92)90043-K
- Yadav, A., & Jayswal, S. C. (2017). Modelling of flexible manufacturing system: a review. *International Journal of Production Research*, 55(7), 1-24. doi:10.1080/00207543.2017.1387302
- Zhang, X., Li, Y., Ran, Y., & Zhang, G. (2020). Stochastic models for performance analysis of multistate flexible manufacturing cells. *Journal of Manufacturing Systems*, 2020(55), 94-108. doi:10.1016/j.jmsy.2020.02.013

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

## Referencias

- Aldaihani, M. M., & Savsar, M. (2005). A stochastic model for the analysis of a two-machine flexible manufacturing cell. *Computers & Industrial Engineering*, 49(4), 600-610. doi:10.1016/j.cie.2005.09.002
- Altiok, T. (1997). *Performance Analysis of Manufacturing Systems*. New York: Springer.
- Buzacott, J. A., & Shanthikumar, J. G. (1993). *Stochastic models of manufacturing systems*. New Jersey: Pearson.
- Curry, G. L., & Feldman, R. M. (2009). *Manufacturing Systems Modeling and Analysis*. Berlin: Springer.
- González-Domínguez, J., Sánchez-Barroso, G., & García-Sanz-Calcedo, J. (2020). Scheduling of Preventive Maintenance in Healthcare Buildings Using Markov Chain. *Applied Sciences*, 2020(10), 1-15. doi:10.3390/app10155263
- Hamasha, M. M., Alazzam, A., Hamasha, S., & Aqlan, F. (2015). Multimachine Flexible Manufacturing Cell Analysis Using a Markov Chain-Based Approach. *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology*, 5(3), 439-446. doi:10.1109/TCPMT.2015.2394232
- Hamasha, M., & Hamasha, S. (2022). Markovian analysis of unreliable multi-machine flexible manufacturing cell. *PLoS ONE*, 17(2), 1-22. doi:10.1371/journal.pone.0259247
- Krieg, G. N. (2003). *Kanban-Controlled Manufacturing Systems*. New York: Springer.
- Leigh, J. M., Jackson, L., & Dunnett, S. (2017). Modelling Manufacturing Processes using Markov Chains. En M. Cepin, & R. Bris (Ed.), *Proceedings of the 27th European safety and reliability conference (ESREL 2017)*, (págs. 1-6). Portoroz, Slovenia: CRC Press. Obtenido de [https://repository.lboro.ac.uk/articles/conference\\_contribution/Modelling\\_manufacturing\\_processes\\_using\\_Markov\\_chains/9220907/files/16798187.pdf](https://repository.lboro.ac.uk/articles/conference_contribution/Modelling_manufacturing_processes_using_Markov_chains/9220907/files/16798187.pdf)

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias

- Li, J., & Huang, N. (2007). Quality evaluation in flexible manufacturing systems: A Markovian approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007(1), 1-24. doi:10.1155/2007/57128
- Mani, A., Abu Bakar, S., Krishnan, P., & Yaacob, S. (2021). Markov Decision Process approach in the estimation of raw material quality in incoming inspection process. *Journal of Physics: Conference Series. International Conference on Man Machine Systems (ICoMMS 2021)* 19-20 October 2021, (págs. 1-9). Perlis, Malaysia: IOP Publishing. doi:10.1088/1742-6596/2107/1/012025
- Pérez-Lechuga, G., Venegas-Martínez, F., & Martínez-Sánchez, J. F. (2021). Mathematical Modeling of Manufacturing Lines with Distribution by Process: A Markov Chain Approach. *Mathematics*, 2021(9), 1-17. doi:10.3390/math9243269
- Sastri, T., Feiring, B., & Mongkolwana, P. (2001). Markov chain approach to failure cost estimation in batch manufacturing. *Quality Engineering*, 13(1), 43-49. doi:10.1080/08982110108918623
- Stewart, W. J. (2009). Probability, Markov Chains, Queues and simulation. *The mathematical basis or performance modelling*. New Jersey: Princeton University Press.
- Taylor, H. M., & Karlin, S. (1998). *An Introductio to Stochastic Modelling*. San Diego, CA: Academic Press.
- Viswanadham, N., & Narahari, Y. (1992). Stochastic modelling of flexible manufacturing systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 16(3), 15-34. doi:10.1016/0895-7177(92)90043-K
- Yadav, A., & Jayswal, S. C. (2017). Modelling of flexible manufacturing system: a review. *International Journal of Production Research*, 55(7), 1-24. doi:10.1080/00207543.2017.1387302
- Zhang, X., Li, Y., Ran, Y., & Zhang, G. (2020). Stochastic models for performance analysis of multistate flexible manufacturing cells. *Journal of Manufacturing Systems*, 2020(55), 94-108. doi:10.1016/j.jmsy.2020.02.013

Cap. 1

Cap. 2

Cap. 3

Cap. 4

Cap. 5

Cap. 6

Cap. 7

Conclusiones

Bibliografía

Referencias



APUNTES PARA EL ESTUDIO DE CADENAS DE MARKOV:  
UNA HERRAMIENTA PARA LA MANUFACTURA EN INGENIERÍA

se publicó digitalmente en el repositorio  
de la Facultad de Ingeniería en octubre de 2025.

Primera edición electrónica de un ejemplar  
(3 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron  
a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial  
de la Facultad de Ingeniería. La familia tipográfica  
utilizada fue Georgia con sus respectivas variantes.