UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

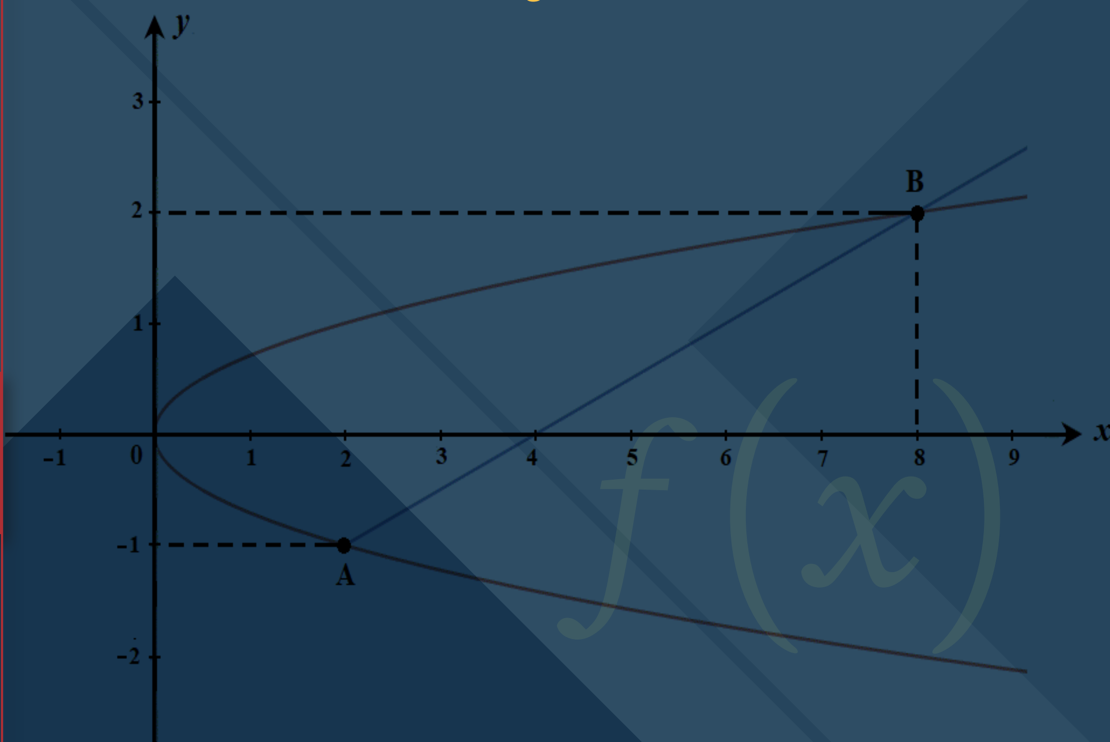
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

Cuaderno de ejercicios de

Cálculo Integral

Margarita Ramírez Galindo



Cuaderno de ejercicios de

Cálculo Integral

Margarita Ramírez Galindo

Coordinación de Matemáticas

Para visualizar la obra te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

RAMÍREZ GALINDO, Margarita.
Cuaderno de ejercicios de Cálculo Integral
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2024, 156 p.

Cuaderno de ejercicios de Cálculo Integral

Primera edición electrónica
de un ejemplar (2.5 MB) Formato PDF
Publicado en línea en noviembre de 2024

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL
Cuidado de la edición: Elvia Angélica Torres Rojas
Diseño editorial: Nismet Díaz Ferro

PRÓLOGO

El aprendizaje de las asignaturas de matemáticas es un pilar fundamental en las carreras de ingeniería, de ahí la importancia de fortalecer los conocimientos que se imparten a través de los contenidos de los programas que conforman tales asignaturas. Una de ellas es Cálculo Integral, la cual corresponde al segundo semestre del Plan de Estudios de todas las carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería, siendo la Coordinación de Matemáticas de la División de Ciencias Básicas, el área responsable de la organización de las diversas actividades para su impartición.

Considerando que una de las estrategias de aprendizaje que contribuye a afianzar y reafirmar los conocimientos de asignaturas como Cálculo Integral, es la realización de diversos ejercicios, se ha elaborado el presente trabajo titulado *Cuaderno de ejercicios de Cálculo Integral*, constituyéndose como un nuevo material didáctico, de apoyo complementario para los estudiantes que cursan esta materia.

A partir del proceso que conlleva la acción de resolver ejercicios, se pretende que las y los estudiantes desarrollen diferentes habilidades relacionadas con el procesamiento de la información, su captación, almacenamiento y utilización. Estas habilidades son esenciales para que el alumnado, conforme avanza en sus estudios en la Facultad, cuente con antecedentes académicos suficientemente sólidos que le permitan comprender y aprender conceptos de mayor complejidad.

Una de las características de esta obra es mostrar los ejercicios resueltos con su desarrollo de forma muy explícita, con lo que se pretende que los estudiantes puedan comprender de manera relativamente sencilla, paso a paso, el procedimiento para obtener la solución de cada uno de los ejercicios. Cabe señalar que para resolver los ejercicios, conforme se avanza en los temas presentados, es conveniente el conocimiento tanto de conceptos teóricos antecedentes, como de los nuevos conceptos que se imparten en el curso.

La obra comprende los cuatro temas señalados en el programa de la asignatura y está integrada por 113 ejercicios resueltos con desarrollo de todo el proceso de solución y 50 ejercicios propuestos únicamente con solución. Cabe mencionar que se ha hecho énfasis en los contenidos que, desde el punto de vista de la autora, profesora con amplia experiencia en la impartición de la asignatura y quien suscribe el presente prólogo, se consideran más representativos de los conceptos fundamentales de cada uno de los temas, lo cual se ve reflejado en el número de ejercicios que se han incorporado.

Para el tema 1, Sucesiones y series, se consideraron 20 ejercicios totalmente resueltos, de los cuales 5 corresponden al subtema de sucesiones y 15 al subtema de series; adicionalmente, se presentan 10 ejercicios propuestos con su respectiva solución.

El tema 2, Las integrales definida e indefinida, comprende 38 ejercicios resueltos, distribuidos de la siguiente manera: 5 pertenecen a los subtemas Sumas de Riemann y el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, 18 corresponden a la integral indefinida y cambio de variable, y 15 a la regla de L´Hôpital e integrales impropias; adicionalmente, se presentan 15 ejercicios propuestos con solución.

Con respecto al tema 3, Métodos de integración, se presentan 25 ejercicios resueltos, de los cuales 15 abarcan los tres principales métodos de integración: por partes, fracciones parciales y sustitución trigonométrica; los 10 ejercicios restantes se refieren al subtema sobre aplicaciones geométricas de la integral definida. Se complementa este tema con 15 ejercicios propuestos con su correspondiente solución.

En lo que se refiere al tema 4, Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables, se resuelven 30 ejercicios, de los cuales 8 comprenden los subtemas de dominio y recorrido de funciones de dos variables, así como su región de definición y gráfica correspondiente, 13 de los ejercicios corresponden a los subtemas relacionados con el límite de funciones de dos variables y derivadas parciales de funciones de dos o más variables. Del mismo modo, se presentan 4 ejercicios resueltos sobre derivación implícita y regla de la cadena; finalmente, se abordan 5 ejercicios acerca del gradiente, derivada direccional, plano tangente y recta normal a una superficie. De manera adicional, se incorporan 10 ejercicios propuestos con solución.

Un reconocimiento muy especial merece la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería (UDAE), a cargo de la Lic. Patricia Eugenia García Naranjo, así como su equipo de colaboradoras, por su gran apoyo y permanente disposición para la realización de esta obra. Particularmente, agradezco el gran profesionalismo y trato siempre amable de la Técnica Académica Elvia Angélica Torres Rojas, quien ha tenido a bien realizar la corrección de estilo y cuidado de la edición de forma dedicada y responsable. Del mismo modo, le doy las gracias a la licenciada en Diseño Gráfico Nismet Díaz Ferro, reconociendo su creatividad para darle una presentación singular y atractiva a este trabajo para su presentación en formato digital.

DRA. MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

CONTENIDO

TEMA 1
Sucesiones y series

1. Sucesiones

1.1) Obtener los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes:

a) $$\left\{(-1)^{n+1}\frac{3n}{n+1}\right\}$$

b) $$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$

c) $$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$$

Resolución:

El dominio de la función $f(n)$ que define a una sucesión es el conjunto de los números naturales, por lo que, dando diferentes valores a n, desde $n=1$ hasta $n=4$, se tiene:

a) $$\left\{(-1)^{n+1}\frac{3n}{n+1}\right\}=\frac{3}{2},\ -\frac{6}{3},\ \frac{9}{4},\ -\frac{12}{5},\ \ldots$$

b) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

c) $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\} = 1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \cdots$

1.2) Determinar el término general $\{a_n\}$ de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

b) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \cdots$

c) $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \cdots$

Resolución:

a) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

b) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right\}$

c) $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$

1.3) Obtener los cuatro primeros términos de la sucesión $\left\{ \frac{n+2}{2n-1} \right\}$ y determinar si converge y diverge.

Resolución:

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{n+2}{2n-1}$, y los cuatro primeros términos son:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = \frac{6}{7}$$

Para determinar la convergencia o divergencia, debe considerarse que si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, se dice que es convergente y a_n converge a ese límite.

Calculando el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Por lo que la sucesión converge.

1.4) Determinar si la sucesión $\left\{ \frac{n^2+2}{n} \right\}$ converge o diverge.

Resolución:

Para determinar si converge, se calcula el límite como se indica enseguida:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} + \lim_{n\to\infty} + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{2}{n}\right) \to \infty$$

el límite no existe, por lo tanto, la sucesión diverge.

1.5) Determinar si las sucesiones mostradas a continuación, convergen o divergen.

a) $\left\{2+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

b) $\left\{\frac{2n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

Resolución:

Al obtener algunos términos de cada una de las sucesiones, se tiene:

a) $$\left\{2+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 2-\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{9},\ 2-\frac{1}{27},\ 2+\frac{1}{81},\ 2-\frac{1}{405},\ \cdots$$

$$= \frac{5}{3},\ \frac{19}{9},\ \frac{53}{27},\ \frac{163}{81},\ \frac{809}{405},\ \cdots$$

$$= 1.666,\ 2.111,\ 1.96,\ 2.01,\ 1.9975,\ \cdots$$

Se observa que, al aumentar el número de términos, se aproxima al escalar 2; por lo tanto, la sucesión converge.

b) $$\left\{\frac{2n}{\sqrt{n+1}}\right\}=\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{6}{\sqrt{4}},\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{10}{\sqrt{6}},\cdots$$

$$=1.4142,\ 2.3094,\ 3,\ 3.577,\ 4.082,\ \cdots$$

Se observa que conforme n crece, la función $f(n)$ también crece, lo que significa que no tiene límite; por lo tanto, la sucesión diverge.

2. Series

2.1) Utilizar la prueba de la divergencia para determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$$

es convergente o divergente.

Resolución:

La prueba de la divergencia establece que, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$, la serie diverge. Calculando el límite, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$$

Por lo tanto, la serie diverge.

2.2) Utilizar el criterio de comparación para determinar el carácter de convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\left(n^3+1\right)}$

Resolución:

Se obtienen algunos términos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\left(n^3+1\right)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{27} + \frac{3}{84} + \frac{4}{195} + \cdots$$

Ahora se propone una serie *p*, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Esta es una serie *p*, con valor de *p* mayor a 1, por lo que converge.

Una de las propiedades de las series establece que su carácter de convergencia o divergencia no cambia si se multiplican los términos de ella por una constante, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \quad c = \text{constante}$$

Por lo que se analiza la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^3+1\right)}$$

Esta última se compara con la serie *p* propuesta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+1)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \frac{4}{65} + \cdots$$

Comparando término a término

$$\frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{2}{9} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{28} < \frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{65} < \frac{1}{16}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n^3+1} < \frac{1}{n^2}$$

Lo que significa que la serie del lado izquierdo es convergente.

Por lo que también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\,(n^3+1)}$ es convergente.

2.3) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$ converge o diverge.

Resolución:

El elemento n-*ésimo* es $a_n = \dfrac{n!}{1000^n}$

Aplicando el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{1000^{n+1}} \cdot \frac{1000^n}{n!} = \frac{n!(n+1)}{1000^n\,1000} \cdot \frac{1000^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1000}(n+1)$$

Calculando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{1000}\right) \lim_{n\to\infty}(n+1)$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$$

Por lo que la serie diverge.

2.4) Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$

Resolución:

Generando algunos términos, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\underbrace{\frac{1}{2n}}_{b_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots \leftarrow \text{serie alternante}$$

a) $b_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)}$; $b_n = \dfrac{1}{2n}$

se compara: $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{6}$, de donde resulta

$b_n > b_{n+1}$ Se cumple primera condición

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ Se cumple la segunda condición

Por lo tanto, la serie converge.

2.5) Determinar el carácter de convergencia o divergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n-1)}{4n+1}$$

Resolución:

Se obtienen algunos términos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n-1)}{4n+1} = -\frac{4}{5} + 1 - \frac{14}{13} + \cdots \leftarrow \text{serie alternante}$$

Recordando que, en una serie alternante, si se cumple

1) $b_n \geq b_{n+1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces, la serie converge.

Analizando los términos de la serie dada:

a) Se observa que no cumple $b_n \geq b_{n+1}$, por lo tanto, la serie diverge.

b) Además, (aunque no es necesario):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{5}{4} \neq 0$$

se confirma, la serie diverge.

2.6) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2+n^5}$ es absolutamente convergente.

Resolución:

Aquí se debe considerar la definición de serie absolutamente convergente, la cual establece:

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

Para este caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{2+n^5}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2+n^5}$$

Entonces:

$$\frac{n}{2+n^5} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2}{n}+\frac{n^5}{n}} = \frac{1}{\frac{2}{n}+n^4}$$

Al comparar con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, la cual es una serie "p", donde $p=4>1$, lo que significa que es convergente, se tiene:

$$\frac{1}{\frac{2}{n}+n^4} < \frac{1}{n^4}$$

Por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2+n^5}$ es absolutamente convergente.

2.7) Determinar el radio y el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{5^{n+1}}$$

Resolución:

El término n-*ésimo* es $a_n = \frac{n(x+2)^n}{5^{n+1}}$, se identifica como una serie de potencias:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{5^{n+2}} \cdot \frac{5^{n+1}}{n(x+2)^n}\right| = \left|\frac{(n+1)\cancel{(x+2)^n}(x+2)}{5^{n+1}\cdot 5} \cdot \frac{5^{n+1}}{n\cancel{(x+2)^n}}\right|$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)}{5n}\right| = \left|\frac{x+2}{5}\cdot\frac{n+1}{n}\right|$$

De acuerdo con el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+2}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{x+2}{5}\right| \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left|\frac{x+2}{5}\right|(1) = \left|\frac{x+2}{5}\right|$$

La serie converge si:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Entonces, en este caso la serie converge si:

$$\left|\frac{x+2}{5}\right| < 1$$

$|x+2| < 5$, por lo que el radio de convergencia es $R=5$.

Y para el intervalo de convergencia:

$$-5 < x+2 < 5$$

$$-5-2 < x < -2+5$$

$$-7 < x < 3$$

2.8) Obtener el radio y el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{n^2}$$

Resolución:

Aplicando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \leftarrow \text{ condición para que la serie sea absolutamente convergente.}$$

$$a_n = \frac{(x-9)^n}{n^2} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(x-9)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Se obtiene inicialmente el cociente:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-9)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-9)^n} \right| = \left| \frac{(x-9)^n (x-9)\, n^2}{(n+1)^2 (x-9)^n} \right|$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-9)\, n^2}{(n+1)^2} \right| = |x-9| \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x-9| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x-9| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} |x-9| \left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} \right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|x-9\right| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|x-9\right|\ (1)<1$$

Por lo tanto, esta serie converge absolutamente si $\left|x-9\right|<1$, de donde el radio de convergencia es $R=1$.

Y el intervalo de convergencia:

$$-1<x-9<1$$

$$-1+9<x<1+9$$

$$8<x<10 \qquad \leftarrow \text{la serie converge en este intervalo.}$$

A continuación, se analizan los extremos del intervalo.

Si $x=8$, y se sustituye en la serie original:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8-9)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\cdots$$

Es una serie alternante. Se observa que se cumplen las dos condiciones que garantizan la convergencia de la serie:

1) $\quad 1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \cdots$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$

Por lo tanto, la serie converge.

Si $x=10$, y se sustituye en la serie original:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10-9)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2}\leftarrow \text{esta es una serie tipo "}p\text{" con } p=2.$$

Para una serie p, si $p>0$ la serie converge. Por lo tanto, el intervalo de convergencia incluye los extremos del intervalo $8\leq x\leq 10$.

2.9) Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)^2}(x-4)^n$$

No analizar extremos.

Resolución:

Se aplicará el criterio del cociente que establece $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

Esta es la condición para que la serie sea absolutamente convergente.

Se tiene:

$$a_n=\frac{n}{(n+2)^2}(x-4)^n\quad ,\qquad a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+3)^2}(x-4)^{n+1}$$

Obteniendo el cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x-4)^{n+1}}{(n+3)^2} \cdot \frac{(n+2)^2}{n(x-4)^n}\right|$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)\cancel{(x-4)^n}\,(x-4)}{(n+3)^2} \cdot \frac{(n+2)^2}{n\cancel{(x-4)^n}}\right|$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(n+2)^2}{n(n+3)^2}\right| |x-4|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-4| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n^2+8n+4}{n^3+6n^2+9n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-4| \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3}+5\frac{n^2}{n^3}+8\frac{n}{n^3}+\frac{4}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+6\frac{n^2}{n^3}+9\frac{n}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-4| \lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancel{\frac{5}{n}}+\cancel{\frac{8}{n^2}}+\cancel{\frac{4}{n^3}}}{1+\cancel{\frac{6}{n}}+\cancel{\frac{9}{n^2}}}$$

Cada término cruzado con la línea inclinada tiende a cero en el límite, por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-4|(1) = |x-4| < 1$$

Por lo que el intervalo de convergencia es:

$$-1 < x-4 < 1$$

$$3 < x < 5$$

2.10) A partir de la serie de Maclaurin

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad -1<x<1$$

deducir la serie de Maclaurin para $\dfrac{1}{1-3x^2}$

Resolución:

Sustituyendo x por $3x^2$:

$$\frac{1}{1-3x^2}=1+3x^2+\left(3x^2\right)^2+\left(3x^2\right)^3+\cdots \qquad -1<3x^2<1$$

$$\frac{1}{1-3x^2}=1+3x^2+9x^4+27x^6+\cdots$$

Entonces se escribe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}=1+3x^2+9x^4+27x^6+\cdots$$

Considerando que $3x^2\geq 0\ \ \forall x$, la condición de convergencia $-1<3x^2<1$ se puede escribir en la forma equivalente $0\leq 3x^2<1$ o bien $0\leq x^2<\dfrac{1}{3}$, o $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2.11) Obtener el desarrollo de Maclaurin de la función $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$

Resolución:

Recordando el desarrollo de la serie de Maclaurin:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,\frac{x^n}{n!}$$

Se necesitan las derivadas de la función:

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2^2}\,e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2^3}\,e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{2^4}\,e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n}\,e^{\frac{1}{2}x}$$

Evaluando a la función y a sus derivadas

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=\frac{1}{2^2}, f'''(0)=\frac{1}{2^3},\ f^{(4)}(0)=\frac{1}{2^4},\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=\frac{1}{2^n}.$$

Entonces para la función dada:

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{0!}x^{(0)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{384}x^4+\cdots+\frac{1}{2^n n!}x^n$$

$$e^{\frac{1}{2}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n$$

2.12) Encontrar la serie de Taylor de la función $f(x)=\dfrac{2}{x}$, alrededor de $x=1$. Obtener los cinco primeros términos.

Resolución:

La expresión de la serie de Taylor está dada en forma desarrollada por:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!}+f'''(c)\frac{(x-c)^3}{3!}+\cdots+f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}$$

Para la función $f(x)=\dfrac{2}{x}$, se calculan las derivadas correspondientes y posteriormente se evalúan en $c=1$

$$f(x)=\frac{2}{x} \qquad f(1)=2$$

$$f'(x)=-2\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad f'(1)=-2$$

$$f''(x)=2\left(\frac{2}{x^3}\right) \qquad f''(1)=4$$

$$f'''(x)=-2\left(\frac{3!}{x^4}\right) \qquad f'''(1)=-12$$

$$f^{(4)}(x)=2\left(\frac{4!}{x^5}\right) \qquad f^{(4)}(1)=48$$

Finalmente, se sustituyen en la expresión que representa la serie de Taylor:

$$f(x)=2-2(x-1)+\frac{4(x-1)^2}{2!}-\frac{12(x-1)^3}{3!}+\frac{48(x-1)^4}{4!}-\cdots$$

2.13) Obtener la serie de Taylor de la función $f(x)=2\ \text{sen}(x)$ en el valor $c=\dfrac{\pi}{4}$.

Resolución:

La expresión de la serie de Taylor, en forma abreviada es:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}(c)\,\frac{(x-c)^n}{n!}$$

$$f(x)=2\ \text{sen}(x) \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$f'(x)=2\cos(x) \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$f''(x) = -2\ \text{sen}(x) \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$f'''(x) = -2\ \cos(x) \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$f^{(4)} = 2\ \text{sen}(x) \qquad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Sustituyendo en la expresión dada, se tiene:

$$f(x) = \sqrt{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^0}{0!} + \sqrt{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1!} - \sqrt{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \sqrt{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} +$$

$$+\sqrt{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \cdots$$

Simplificando algunos términos:

$$f(x) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \cdots$$

2.14) Aplicar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n}(0)\,\frac{x^n}{n!}$ para obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \tan(2x)$.

Resolución:

Se deben calcular las diferentes derivadas de la función dada para obtener los términos indicados.

$$f(x) = \tan(2x)$$

$$f'(x) = 2\sec^2(2x)$$

$$f''(x) = 8[\sec(2x)]^2 \tan(2x)$$

$$f'''(x) = 16[\sec(2x)]^4 + 32[\tan(2x)]^2 [\sec(2x)]^2$$

$$f^{(4)}(x) = 256[\sec(2x)]^4 [\tan(2x)] + 128[\tan(2x)]^3 \sec(2x)^2$$

$$f^{(5)}(x) = 2816[\sec(2x)]^4 [\tan(2x)]^2 + 512[\sec(2x)]^6 + 512[\sec(2x)]^2 \tan(2x)^4$$

Evaluando cada derivada en $a = 0$, se tiene:

$$f(a) = f(0) = \tan(0) = 0$$

$$f'(a) = f'(0) = 2\sec(0) = 2$$

$$f''(a) = f''(0) = 0$$

$$f'''(a) = f'''(0) = 16(1) = 16$$

$$f^{(4)}(a) = f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(a) = f^{(5)} = 512$$

Desarrollando la serie de Maclaurin:

$$f(x)=f^{(0)}(0)\frac{x^0}{0!}+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!}+f^{(5)}\frac{x^5}{5!}$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\tan(2x)=2x+16\frac{x^3}{3!}+512\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

2.15) Obtener la serie de Maclaurin de la función $f(x)=\ln(2+x)$.

Resolución:

La serie de Maclaurin está dada por:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+$$

$$+f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!}+f^{(5)}(0)\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

Calculando las derivadas se tiene:

$$f(x)=\ln(2+x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(2+x)^5}$$

Evaluando en $x = 0$:

$$f(0) = \ln(2)$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(0) = \frac{1}{4}$$

$$f^{(4)}(0) = -\frac{3}{8}$$

$$f^{(5)}(0) = \frac{3}{4}$$

Sustituyendo en la expresión de la serie de Maclaurin:

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + \frac{x^5}{160} - \cdots$$

3. Ejercicios propuestos

3.1) Sea la sucesión $\left\{4-\frac{2}{n}\right\}$. Determinar si es acotada.

Si lo es, obtener su cota inferior y su cota superior.

Respuesta:

Sí es una sucesión acotada.

Cota inferior es 2. Cota superior es 4.

3.2) Determinar si la sucesión $\left\{\frac{n^2+2}{n}\right\}$ converge o diverge.

Respuesta:

La sucesión diverge.

3.3) Investigar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5n}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\cdots$$

Respuesta:

La serie converge.

3.4) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+3)n^2}$ converge o diverge.

Respuesta:

La serie converge.

3.5) Determinar si la serie alternante siguiente es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$$

Respuesta:

La serie converge.

3.6) Hallar los valores positivos de x para los cuales la siguiente serie converge $\sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{x^n}{n!}$

Respuesta:

La serie converge para cualquier valor en $\mathbb{R}$, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.7) Obtener el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{3^n}$$

Respuesta:

Radio de convergencia $R=3$

Intervalo de convergencia $-4<x<2$

3.8) Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x+2)^n}{2^n\,n^2}$

Determinar el intervalo de convergencia y analizar los extremos del intervalo.

Respuesta:

Después de analizar los extremos resulta $-4 \leq x \leq 0$

3.9) Encontrar el tercer polinomio de Taylor $(n=3)$ alrededor de $x=-\dfrac{1}{3}$ de la función $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$.

Respuesta:

$$P_3(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{\pi^3}{12}\left(x+\frac{1}{3}\right)^3+\cdots$$

3.10) Obtener la serie de Maclaurin de $f(x)=2\cos\sqrt{x}$, a partir de la serie de Maclaurin de $f(x)=2\cos x$.

Respuesta:

$$2\cos\sqrt{x} \approx 2-\frac{2x}{2!}+\frac{2x^2}{4!}-\frac{2x^3}{6!}+\frac{2x^4}{8!}-\cdots$$

TEMA 2
Las integrales definida e indefinida

1. Sumas de Riemann y Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

1.1) Mediante sumas de Riemann, calcular la integral: $\int_{-3}^{0}\left(\frac{x}{5}+1\right)dx$

Resolución:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x$$

$$\Delta_i x=\frac{b-a}{n}=\frac{0+3}{n}=\frac{3}{n}$$

$$x_i=a+i\,\Delta_i x$$

$$a=-3,\ b=0$$

$$x_i=-3+i\,\Delta_i x$$

Si $\Delta_i x=\frac{3}{n}$, se tiene $x_i=-3+i\,\frac{3}{n}$

$$f(x_i)=\frac{-3+\frac{3}{n}\cdot i}{5}+1=\frac{3i-3}{5n}+1$$

$$f(x_i)\ \Delta_i x=\left(\frac{5n+3i-3n}{5n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)=\left(\frac{2n+3i}{5n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta_i x=\frac{3}{5n^2}\sum_{i=1}^{n} 2n+3i$$

$$=\frac{6}{5n}\sum_{i=1}^{n} 1+\frac{9}{5n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{6}{5n}(n)+\frac{9}{5n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{6}{5}+\frac{9}{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

De la definición:

$$\int_{-3}^{0}\left(\frac{x}{5}+1\right)dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{6}{5}+\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{6}{5}+\frac{9}{10}=\frac{21}{10}$$

$$\int_{-3}^{0}\left(\frac{x}{5}+1\right)dx=\frac{21}{10}$$

1.2) Mediante sumas de Riemann, calcular el valor del área bajo la curva $f(x)=2x^2+x+1$ en el intervalo $[1, 3]$

Resolución:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x \;\; ; \;\; \int_1^3 (2x^2+x+1)\,dx$$

$$\Delta_i x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_i=a+i\,\Delta_i x$$

$$x_i=1+i\,\Delta_i x=1+\frac{2}{n}\,i$$

$$f(x_i)=2(1+i\,\Delta_i x)^2+(1+i\,\Delta_i x)+1$$

$$f(x_i)=2\left(1+\frac{2}{n}\,i\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\,i\right)+1$$

$$f(x_i)=2\left(\frac{n+2i}{n}\right)^2+\left(\frac{n+2i}{n}\right)+1$$

$$f(x_i)=2\left(\frac{n^2+4ni+4i^2}{n^2}\right)+\left(\frac{n+2i}{n}\right)+1$$

$$f(x_i)\,\Delta_i x=\left[2\left(1+\frac{4}{n}\,i+\frac{4}{n^2}\,i^2\right)+\left(1+\frac{2}{n}\,i\right)+1\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$f(x_i)\,\Delta_i x=\left[2+\frac{8}{n}\,i+\frac{8}{n^2}\,i^2+1+\frac{2}{n}\,i+1\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$f(x_i)\,\Delta_i x = \left[4 + \frac{10}{n}\,i + \frac{8}{n^2}\,i^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$f(x_i)\,\Delta_i x = \frac{8}{n} + \frac{20}{n^2}\,i + \frac{16}{n^3}\,i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n} + \frac{20}{n^2}\,i + \frac{16}{n^3}\,i^2\right)$$

$$= \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{20}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{8}{n}\,n + \frac{20}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{16}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 8 + \frac{10}{n^2}\left(n^2 + n\right) + \frac{8}{3n^3}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$$

$$= 8 + 10 + \frac{10}{n} + \frac{16}{3} + \frac{8}{n} + \frac{8}{3n^2}$$

$$= 18 + \frac{16}{3} + \frac{18}{n} + \frac{8}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{70}{3} + \frac{18}{n} + \frac{8}{3n^2}\right) = \frac{70}{3}$$

$$\int_1^3 \left(2x^2 + x + 1\right)dx = \frac{70}{3}\ u \text{ de área}$$

CONTENIDO

TEMA 1

TEMA 2

TEMA 3

TEMA 4

1.3) Dada la función $f(x) = \left|x^3\right|$, determinar el o los valores para los cuales se satisface el teorema del valor medio del cálculo integral en el intervalo $[-2,\ 0]$.

Resolución:

El teorema del valor medio establece que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(x_0)(b-a),\ \ x_0 \in [a,\ b]$$

Recordando del valor absoluto:

$$\left|x^3\right| = \begin{cases} x^3\ , & x > 0 \\ -x^3\ , & x \leq 0 \end{cases}$$

Considerando el intervalo $[-2,\ 0]$, entonces $f(x) = -x^3$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx = -\left.\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = 0 - \left[-\frac{(-2)^4}{4}\right]$$

$$\int_{-2}^{0} x^3\, dx = \frac{16}{4} = 4$$

Del teorema del valor medio:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(4) = 2 \qquad \leftarrow \text{ ordenada media}$$

Interesan los valores para los cuales se satisface el teorema:

$$f(x) = -x^3 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = -x_0^3$$

Sustituyendo el valor obtenido (ordenada media)

$$-x_0^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0^3 = -2$$

De donde:

$$x_0 = \sqrt[3]{-2} = -1.25992$$

$$x_0 \in [-2, 0]$$

1.4) El nivel mínimo de almacenamiento de gasolina en cierto país puede ser aproximado por el modelo siguiente:

$$Q(t) = 217 + 13 \cos \frac{\pi(t-3)}{6}$$

donde $Q(t)$ se mide en millones de barriles de gasolina y t es el tiempo en meses (considerar que el inicio del año corresponde a $t=0$). Hallar el nivel promedio mínimo proporcionado por este modelo durante el primer trimestre $(0 \leq t \leq 3)$.

Resolución:

El valor promedio también se conoce como valor medio, por lo que aplica el teorema del valor medio del cálculo integral.

$$\int_a^b Q(t)\,dt = \int_0^3 \left[217 + 13\cos\frac{\pi(t-3)}{6} \right] dt$$

$$= 217\int_0^3 dt + 13\int_0^3 \cos\frac{\pi(t-3)}{6}\,dt$$

$$= 217\,t\Big]_0^3 + 13\cdot\frac{6}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(t-3)\Big]_0^3$$

$$\int_a^b Q(t)\,dt = 217(3) + \frac{78}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(0) - 217(0) - \frac{78}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(-3)$$

$$= 651 - \frac{78}{\pi}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 651 + \frac{78}{\pi}$$

$$= 675.82$$

Del teorema del valor medio del cálculo integral (TVMCI)

$$\int_a^b Q(t)\,dt = Q(t_0)(b-a)$$

$$Q(t_0) = \frac{\int_0^3 Q(t)\,dt}{b-a} = \frac{675.82}{3} = 225.27 \text{ millones de barriles de gasolina}$$

1.5) Calcular el valor medio de la función $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{1-x}}$

en el intervalo $[-8,-3]$ y obtener el valor de $c \in [-8,-3]$ cuya existencia garantiza el teorema del valor medio del cálculo integral.

Resolución:

El teorema del valor medio del cálculo integral establece:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \text{ donde } f(c) \text{ es el valor medio.}$$

Se obtiene inicialmente el valor de la integral

$$I=\frac{1}{3}\int_{-8}^{-3}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx=\frac{1}{3}\int_{-8}^{-3}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{1}{3}\int_{-8}^{-3}u^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$u=1-x \qquad I=-\frac{1}{3}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_{-8}^{-3}=-\frac{2}{3}\sqrt{1-x}\,\Big|_{-8}^{-3}$$

$$du=-dx$$

$$I=-\frac{2}{3}\left[\sqrt{1+3}-\sqrt{1+8}\right]=-\frac{2}{3}[2-3]$$

$$I=\frac{2}{3}$$

Para el valor medio:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(c)=\frac{1}{-3+8}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{15} \quad \leftarrow \text{valor medio}$$

Para obtener el valor de c:

$$f(c)=\frac{1}{3\sqrt{1-c}}$$

$$f(c)=\frac{2}{15}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{3\sqrt{1-c}} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{15}=\frac{1}{\sqrt{1-c}}$$

$$\left(\frac{6}{15}\right)^2=\frac{1}{1-c} \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{225}=\frac{1}{1-c}$$

$$1-c=\frac{225}{36} \quad \Rightarrow \quad c=1-\frac{225}{36}$$

$$c=\frac{-189}{36}=-5.25 \quad ; \quad -5.25\in[-8,-3]$$

c es el valor cuya existencia garantiza el teorema del valor medio del cálculo integral.

2. Integrales indefinidas inmediatas y cambio de variable

En este apartado se denotará cada una de las integrales con la letra I

2.1) Evaluar la integral: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x^2)}{x}\,dx$

Resolución:

$$I=\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x^2)}{x}\,dx=\int \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\ln x^2\right)dx$$

Esta integral es del tipo $\int \operatorname{sen} u du$

$$u = \ln x^2$$

$$du = \frac{2}{x} dx$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\ln x^2\right)\right) + C$$

$$I = -\frac{1}{2}\cos\left(\ln x^2\right) + C$$

2.2) Evaluar la integral: $\int \frac{\csc^2(2x)}{\left[2+3\cot(2x)\right]^3} dx$

Resolución:

$$I = \int \frac{\csc^2(2x)}{\left[2+3\cot(2x)\right]^3} dx = \int \left[2+3\cot(2x)\right]^{-3} \csc^2(2x)\, dx$$

La integral es del tipo $\int u^{-3} du$

$$u = 2 + 3\cot(2x)$$

$$du = -6\csc^2(2x)\, dx$$

$$I = -\frac{1}{6}\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{12u^2} = \frac{1}{12\left(2+3\cot(2x)\right)^2} + C$$

2.3) Evaluar la integral: $\displaystyle\int \frac{\sec\left(\ln x^2\right)}{x}\,dx$

Resolución:

Es una integral de la forma $\displaystyle\int \sec u du$

Realizando cambio de variable:

$$u = \ln x^2$$

$$du = \frac{2x}{x^2}\,dx = \frac{2}{x}\,dx$$

$$dx = \frac{x}{2}\,du$$

$$I = \int \frac{\sec u}{x} \cdot \frac{x}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sec u du$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left[\sec u + \tan u\right] + C$$

El resultado debe expresarse en términos de la variable original

$$\int \frac{\sec\left(\ln x^2\right)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left[\sec\left(\ln x^2\right) + \tan\left(\ln x^2\right)\right] + C$$

2.4) Evaluar la integral: $\int 3\sec\left(x^3\right)x^2\,dx$

Resolución:

Es una integral de la forma $\int \sec u du$

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2\,dx$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

Se observa que el diferencial obtenido está completo, por lo que se tiene

$$I = \int 3\sec\left(x^3\right)x^2 dx = \int \cancel{3}\sec u\,\cancel{x^2}\,\frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

La integral resultante es $I = \ln\left(\sec u + \tan u\right) + C$

Se expresa el resultado en términos de la variable original:

$$I = \ln\left(\sec x^3 + \tan x^3\right) + C$$

CONTENIDO
TEMA 1
TEMA 2
TEMA 3
TEMA 4

2.5) Evaluar la integral: $\int \frac{(3-2x)^2}{x^2}\, dx$

Resolución:

Inicialmente se desarrolla el binomio y se simplifica:

$$I = \int \frac{9-12x+4x^2}{x^2}\, dx = 9\int x^{-2}\, dx - 12\int \frac{dx}{x} + 4\int dx$$

$$I = 9\,\frac{x^{-1}}{-1} - 12\ln|x| + 4x + C = -\frac{9}{x} - 12\ln|x| + 4x + C$$

2.6) Evaluar la integral: $\int x^2\, e^{-2x^3} \cot\left(e^{-2x^3}\right) dx$

Resolución:

Esta integral se puede expresar también como:

$$\int x^2\, e^{-2x^3} \frac{\cos\left(e^{-2x^3}\right)}{\operatorname{sen}\left(e^{-2x^3}\right)} dx$$

Entonces se tiene una integral de la forma: $\int \frac{du}{u}$

$$u = \operatorname{sen}\left(e^{-2x^3}\right)$$

$$du = \cos\left(e^{-2x^3}\right) \frac{d}{dx}\left(e^{-2x^3}\right)\, dx$$

$$du = \cos\left(e^{-2x^3}\right)\left(e^{-2x^3}\right)\left(-6x^2\, dx\right)$$

Se debe completar el diferencial, obteniendo:

$$I = -\frac{1}{6}\ln\left(\operatorname{sen}\left(e^{-2x^{3}}\right)\right) + C$$

2.7) Evaluar la integral: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{3}\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\,\sec\sqrt{2x}}\,dx$

Resolución:

La integral se expresa también como:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{3}(\sqrt{2x})\ \cos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}\,dx = I$$

$$I = \int \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{2x})^{3}\ \cos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}\,dx$$

Aquí se identifica una integral de la forma: $\int u^{n} du$

$$u = \operatorname{sen}\sqrt{2x} = \operatorname{sen}(2x)^{1/2}$$

$$du = \cos(2x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(2x)^{-1/2}(\cancel{2})\,dx$$

$$du = \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx$$

De acuerdo con el diferencial obtenido, se dice que la integral está completa, de donde:

$$I = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$I = \frac{\left(\operatorname{sen} \sqrt{2x}\,\right)^4}{4} + C$$

2.8) Evaluar la integral: $\displaystyle\int \frac{(1-18x)}{\sqrt{25-9x^2}}\, dx$

Resolución:

Considerando que a simple vista no se ve la solución inmediata, se procede como sigue:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}\, dx - \int 18x\,(25-9x^2)^{-1/2}\, dx$$

Se obtienen 2 integrales, las cuales, respectivamente, son de la forma que se muestra:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}\ , \quad \int u^n\, du$$

Entonces

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}\, dx = \frac{1}{3} \operatorname{ang\,sen}\left(\frac{3x}{5}\right) + C_1$$

$a^2 = 25 \qquad u^2 = 9x^2$

$a = 5 \qquad u = 3x \qquad du = 3\, dx$

$$I_2 = -\int 18x\,(25-9x^2)^{-1/2}\,dx = \int u^{-1/2}\,du = 2u^{1/2} + C_2$$

$$u = 25 - 9x^2$$

$$du = -18x\,dx$$

En términos de la variable original:

$$I_2 = 2\sqrt{25-9x^2} + C_2$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}\text{ ang sen}\left(\frac{3x}{5}\right) + 2\sqrt{25-9x^2} + C$$

2.9) Evaluar la integral: $\int 2x \sec\left(\cos x^2\right) \operatorname{sen} x^2\,dx$

Resolución:

Esta integral es de la forma $\int \sec u\,du$ donde el cambio de variable adecuado se indica:

$$u = \cos x^2$$

$$du = -2x \operatorname{sen} x^2\,dx$$

$$I = -\ln\left[\sec\left(\cos x^2\right) + \tan\left(\cos x^2\right)\right] + C$$

2.10) Evaluar la integral: $\int \dfrac{\csc\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

Resolución:

Esta integral es de la forma $\int \csc u\, du$

$$u = \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx$$

$$I = \ln\left(\csc\sqrt{x+1} - \cot\sqrt{x+1}\right) + C$$

2.11) Evaluar la integral: $\int_0^4 |2x-6|\, dx$

Resolución:

Para resolver la integral, se debe considerar el concepto del valor absoluto:

$$|2x-6| = \begin{cases} -2x+6\ , & x<3 \\ 2x-6\ , & x\geq 3 \end{cases}$$

Tomando en cuenta que el intervalo de integración es $[0,4]$ se tiene

$$I = \int_0^4 |2x-6|\, dx = \int_0^3 (-2x+6)\, dx + \int_3^4 (2x-6)\, dx$$

$$I = -x^2+6x \Big|_0^3 + x^2-6x \Big|_3^4$$

$$I = (-9+18) + [(16-24)-(9-18)] = 10$$

2.12) Evaluar la integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

Resolución:

Esta integral puede resolverse factorizando el denominador del integrando y resulta una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2}$

$$I=\int \frac{dx}{x^2-2x+5}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}=\frac{1}{2}\ \text{ang tan}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

$$u^2=(x-1)^2\ ; \qquad a^2=4$$

$$u=x-1\ ; \qquad a=2$$

$$du=dx$$

2.13) Evaluar la integral: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dt}{16+(t-2)^2}$

Resolución:

La integral definida es de la forma $\displaystyle\int_a^b \frac{du}{a^2+u^2}$. Realizando el siguiente cambio de variable:

$$a^2=16, \qquad u^2=(t-2)^2$$

$$a=4, \qquad u=t-2$$

$$du=dt$$

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{dt}{(4)^2+(t-2)^2}=\frac{1}{4}\text{ ang tan}\left(\frac{t-2}{4}\right)\Bigg]_{-2}^{2}=\left[\frac{1}{4}\text{ ang tan}\left(\frac{2-2}{4}\right)-\text{ang tan}\left(\frac{-4}{4}\right)\right]$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\text{ang tan }(0)\ -\text{ang tan }(-1)\right]=\frac{1}{4}\left[0-\frac{3}{4}\pi\right]=-\frac{3}{16}\pi$$

2.14) Evaluar la integral: $\displaystyle\int\frac{\text{ang tan}(x)}{1+x^2}\,dx$

Resolución:

Esta integral se resuelve al comparar con $\int u^n du$. El cambio de variable conveniente es:

$$u=\text{ang tan}(x)$$

$$du=\frac{1}{1+x^2}\,dx;\qquad \text{se observa que el diferencial está completo}$$

$$I=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+c$$

Regresando a la variable original:

$$I=\frac{1}{2}\left(\text{ang tan}(x)\right)^2+C$$

2.15) Evaluar la integral: $\displaystyle\int\frac{3x-5}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Resolución:

Esta integral no es inmediata; para resolverla es conveniente separar en 2 integrales, como se observa enseguida:

$$I=\int \frac{(3x-5)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\underbrace{\int (3x)(4-x^2)^{-1/2}\,dx}_{I_1}-\underbrace{\int \frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\,dx}_{I_2}$$

Para I_1:

$$I_1=3\int x(4-x^2)^{-1/2}\,dx \leftarrow \int u^n\,du$$

$$u=4-x^2$$

$$du=-2x\,dx$$

$$I_1=-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}u^{1/2}+C_1=-3\sqrt{4-x^2}+C_1$$

Para I_2:

$$I_2=-5\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \leftarrow \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$u^2=x^2, \qquad a^2=4$$

$$u=x, \qquad a=2$$

$$du=dx$$

CONTENIDO

TEMA 1

TEMA 2

TEMA 3

TEMA 4

$$I_2 = -5 \text{ ang sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C_2 = -5 \text{ ang sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C_2$$

Finalmente,

$$I = -3\sqrt{4-x^2} - 5 \text{ ang sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2.16) Evaluar la integral: $\displaystyle\int 9\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}\,\frac{dx}{x^4}$

Resolución:

La integral sugiere un cambio de variable, después de realizar una simplificación del radicando:

$$I = \int 9\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}\,\frac{dx}{x^4} = 9\int\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\,\frac{dx}{x^4}$$

$$u = 1 + \frac{1}{x^3} = 1 + x^{-3}$$

$$du = -3x^{-4}\,dx = -\frac{3}{x^4}\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{x^4}{3}\,du$$

$$I = 9\int u^{1/2}\,\frac{-\frac{\cancel{x^4}}{3}\,du}{\cancel{x^4}} = -9\int u^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{3}\,du\right)$$

TEMA 1 TEMA 2 TEMA 3 TEMA 4 CONTENIDO

$$I=-9\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C=-\frac{2(9)}{9}u^{3/2}+C$$

$$I=-2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^3}+C$$

2.17) Evaluar la integral: $\int\sqrt{x}\ \text{sen}\left(\sqrt{x^3}\right)dx$

Resolución:

La integral es de la forma $\int \text{sen (u)}\,du$

$$u=\sqrt{x^3}=x^{3/2}$$

$$du=\frac{3}{2}x^{1/2}\,dx=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$

$$dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,du$$

Sustituyendo en la integral original:

$$I=\int\cancel{\sqrt{x}}\ \text{sen}(u)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\,du$$

$$I=\frac{2}{3}\int\text{sen}(u)\,du=-\frac{2}{3}\cos(u)+C$$

$$I=-\frac{2}{3}\cos\left(\sqrt{x^3}\right)+C$$

2.18) Evaluar la integral: $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{x^4-6}}$

Resolución:

La integral parece ser de la forma $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$.

Se propone el siguiente cambio de variable:

$$u^2=x^4, \qquad a^2=6$$

$$u=x^2, \qquad a=\sqrt{6}$$

$$du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{du}{2x}$$

$$I=3\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-6}}$$

Sustituyendo el cambio de variable propuesto:

$$I=3\int \frac{\frac{du}{2x}}{x\sqrt{u^2-a^2}}=3\int \frac{du}{2x^2\sqrt{(x^2)^2-(\sqrt{6})^2}}=\frac{3}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$I=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{ang\,sec}\left(\frac{x^2}{\sqrt{6}}\right)\right]+C$$

El resultado es

$$I = \frac{3}{2\sqrt{6}} \text{ ang sec}\left(\frac{x^2}{16}\right) + C$$

3. Regla de L´Hôpital e integrales impropias

3.1) Calcular, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - (1 - x)}{x}$$

Resolución:

Por sustitución directa se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{(0)} - (1 - 0)}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Se obtiene una indeterminación en la cual aplica la regla de L'Hôpital.

Derivando las funciones del numerador y denominador:

$$f(x) = e^{2x} - 1 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2e^{2x} + 1$$

$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$$

Por lo que en el límite se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} + 1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - (1-x)}{1} = 3$$

3.2) Calcular, si existe, el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

Resolución:

Por sustitución directa

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x = (0)(-\infty)$$

Se obtiene una indeterminación; no aplica la regla de L'Hôpital por lo que se procede de la siguiente manera:

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = \ln x$$

$$f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = g(x)\, f(x)$$

Es decir, el producto se puede expresar como un cociente.

En este caso se tiene:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

ya es posible aplicar L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^4}{3x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = 0$$

3.3) Calcular, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x}{2-2\cos x-(\mathrm{sen}\,x)^2}$$

Resolución:

Inicialmente se evalúa la función por sustitución directa. Llamando a la función $f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1-\cos(0)-(0)\,\mathrm{sen}(0)}{2-2\cos(0)-(\mathrm{sen}(0))^2} = \frac{0}{0}$$

El resultado es una indeterminación y es aplicable la regla de L'Hôpital. Derivando numerador y denominador, y simplificando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(-\,\mathrm{sen}\,x)-x\cos x-\mathrm{sen}\,x}{-2(-\mathrm{sen}\,x)-2\,\mathrm{sen}\,x\,\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\cos x}{2(\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,x\,\cos x)} = *$$

Se calcula nuevamente el límite:

$$* = \frac{-(0)\cos(0)}{2\left(\operatorname{sen}(0)-\operatorname{sen}(0)\cos(0)\right)} = \frac{0}{0} \qquad \leftarrow \text{indeterminación.}$$

y se aplica nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x - \cos x}{2\left(\cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x\right)} = \frac{(0)-1}{2(1+(0)-1)} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

De lo anterior, se concluye que el límite no existe.

3.4) Calcular, si existe, el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{4x}$

Resolución:

Inicialmente se evalúa la función para determinar, si es el caso, el tipo de indeterminación.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{5}{x}\right)^{4x} = 1^{\infty}$$

Para esta indeterminación no aplica la regla de L'Hôpital, por lo que procede lo siguiente:

$$\phi(x) = \left(1-\frac{5}{x}\right)^{4x}$$

CONTENIDO TEMA 1 TEMA 2 TEMA 3 TEMA 4

$$\lim_{x\to\infty}\left[\phi(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{4x}$$

Para eliminar la indeterminación, se aplicará la función logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\phi(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)\right]^{4x}$$

Por propiedades de la función logaritmo natural, en el segundo miembro:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\phi(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[4x\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)\right]=\underbrace{(\infty)(0)}_{\text{No aplica L'Hopital}}$$

Se pretende llevar a una forma en la que se genere la indeterminación:

$$\frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\phi(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[4\,\frac{\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{0}{0}\ \leftarrow \text{Ya aplica L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\phi(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[4\left(\frac{\frac{\frac{5}{x^2}}{1-\frac{5}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\phi(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[4\left(\frac{-\frac{5}{x^2}\,x^2}{1-\frac{5}{x}}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[4\left(\frac{-5}{1-\frac{5}{x}}\right)\right]=-20$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\phi(x)\right)\right]=-20$$

El problema original es calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)$, por lo que se debe aplicar la función inversa de la función logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad:

$$\lim_{x\to\infty}e^{\ln(\phi(x))}=e^{-20}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\phi(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{4x}=e^{-20}\quad\leftarrow \text{Resultado final}$$

3.5) Calcular, si existe, el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\left(\frac{2}{\ln x}\right)}$

Resolución:

Se evalúa directamente la función:

$$\lim_{x\to0^+}x^{\left(\frac{2}{\ln x}\right)}=0^0$$

Como se observa, es una indeterminación donde no aplica la regla de L'Hôpital. Se procede según se indica:

$$\phi(x)=x^{\left(\frac{2}{\ln x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\phi(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[x^{\left(\frac{2}{\ln x}\right)}\right]$$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(\phi(x))\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(x^{\left(\frac{2}{\ln x}\right)}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(\phi(x))\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{\ln x}\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}2=2$$

Se observa que no es necesario aplicar la regla de L'Hôpital. Ahora, aplicando la función exponencial:

$$\lim_{x\to\infty}\left[e^{\ln(\phi(x))}\right]=e^2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\phi(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[x^{\left(\frac{2}{\ln x}\right)}\right]=e^2 \leftarrow \text{Resultado final}$$

3.6) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

Resolución:

$$I=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x}=\lim_{u\to\infty}\ln x\Big|_1^u=\lim_{u\to\infty}\left(\ln u-\ln(1)\right)$$

$$I=\infty-0=\infty$$

El límite no existe, por lo tanto, la integral diverge.

3.7) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Resolución:

$$I=\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{u\to\infty} \left[\operatorname{ang\,tan} x\right]\Big|_0^u$$

$$I=\lim_{u\to\infty} \left[\operatorname{ang\,tan}(u)-\operatorname{ang\,tan}(0)\right]$$

$$I=\operatorname{ang\,tan}(\infty)-\operatorname{ang\,tan}(0)=\frac{\pi}{2}$$

El límite existe, por lo tanto, la integral converge.

3.8) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$$

Resolución:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx + \int_0^{\infty} x^3\,dx$$

$$I = \lim_{u \to -\infty} \int_u^0 x^3\,dx + \lim_{v \to \infty} \int_0^v x^3\,dx$$

$$I = \lim_{u \to -\infty} \left. \frac{x^4}{4} \right|_u^0 + \lim_{v \to \infty} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^v$$

$$I = \lim_{u \to -\infty} \left(\frac{(0)}{4} - \frac{u^4}{4} \right) + \lim_{v \to \infty} \left(\frac{v^4}{4} - \frac{(0)}{4} \right)$$

$$I = \infty$$

El límite no existe, por lo tanto, la integral diverge.

3.9) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_1^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Resolución:

$$I = \int_1^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 3 \lim_{u \to \infty} \int_1^u x^{-1/3}\,dx = 3 \lim_{u \to \infty} \left. \frac{3}{2} x^{2/3} \right|_1^u$$

$$I = \frac{9}{2} \lim_{u \to \infty} \left[\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{1} \right] = \infty$$

El límite no existe, por lo tanto, la integral diverge.

3.10) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$$

Resolución:

En este caso, la función integrando se presenta en términos de valor absoluto, por lo que se deben hacer algunas consideraciones:

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^{x} & , \quad x<0 \\ e^{-x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \lim_{u\to -\infty} \int_{u}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{u\to -\infty} \left[e^{x}\right]\Big|_{u}^{0}$$

$$I_1 = \lim_{u\to -\infty} \left[e^{(0)} - e^{u}\right] = \left[1-\frac{1}{e^{\infty}}\right] = 1$$

$$I_2 = \lim_{v\to \infty} \int_{0}^{v} e^{-x}\,dx = -\lim_{v\to \infty} \left[e^{-x}\right]\Big|_{0}^{v}$$

$$I_2 = -\lim_{v\to \infty} \left[e^{-v} - e^{(0)}\right] = -\left[\frac{1}{e^{\infty}} - 1\right] = 1$$

$$I = I_1 + I_2 = 2$$

El límite existe, por lo que la integral converge.

3.11) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_0^8 \frac{4}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx$$

Resolución:

La función integrando presenta una discontinuidad en $x=8$ (extremo superior del intervalo).

$$I=\lim_{u\to 8^-} 4\int_0^u (8-x)^{-1/3}\,dx=-4\lim_{u\to 8^-}\left[\frac{3}{2}(8-x)^{2/3}\right]_0^u$$

$$I=-4\lim_{u\to 8^-}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(8-u)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2}\right]=24$$

El límite existe, por lo tanto, la integral converge.

3.12) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

Resolución:

El integrando presenta discontinuidad en $x=0$ (extremo inferior del intervalo).

$$I=\lim_{u\to 0^+}\int_u^1 x^{-2}\,dx=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_u^1=\lim_{u\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_u^1$$

$$I=\lim_{u\to 0^+}\left[-1+\frac{1}{u}\right]=-1+\infty=\infty$$

El límite no existe, por lo tanto, la integral diverge.

3.13) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

Resolución:

La función integrando presenta discontinuidad en $x=1$, $0<1<2$.

$$I=\int_0^1 (x-1)^{-2}\,dx + \int_1^2 (x-1)^{-2}\,dx$$

$$I=\lim_{u\to 1^-}\int_0^u (x-1)^{-2}\,dx + \lim_{u\to 1^+}\int_u^2 (x-1)^{-2}\,dx$$

$$I=\lim_{u\to 1^-}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^u + \lim_{u\to 1^+}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_u^2$$

$$I=\lim_{u\to 1^-}\left[-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{-1}\right] + \lim_{u\to 1^+}\left[-\frac{1}{2-1}+\frac{1}{u-1}\right]$$

$$I=\infty$$

El límite no existe, por lo tanto, la integral diverge.

3.14) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)(x+2)}\,dx$$

Resolución:

Se tiene una integral impropia.

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)(x+2)}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{(x+4)(x+2)}\,dx$$

CONTENIDO

TEMA 1

TEMA 2

TEMA 3

TEMA 4

El tipo de integrando sugiere fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x+4)(x+2)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+2}$$

$$1=A(x+2)+B(x+4)$$

$$x=-2:\quad B=\frac{1}{2}$$

$$x=-4:\quad A=-\frac{1}{2}$$

$$I=\lim_{u\to\infty}\left[\int_0^u \frac{-\frac{1}{2}}{x+4}\,dx+\int_0^u \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,dx\right]$$

$$I=-\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left[\ln(x+4)\right]_0^u+\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left[\ln(x+2)\right]_0^u$$

$$I=-\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left[\ln(u+4)-\ln(4)\right]+\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left[\ln(u+2)-\ln(2)\right]$$

Aplicando propiedades del logaritmo y de límites resulta

$$I=\frac{1}{2}\ln(2)=\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

Por lo tanto, la integral converge.

3.15) Evaluar la siguiente integral impropia y determinar si converge o diverge.

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^5}\,dx$$

Resolución:

El integrando presenta una discontinuidad en $x=0, -2\leq 0\leq 3$

$$I=\int_{-2}^{3}\frac{1}{x^5}\,dx=\lim_{u\to 0^-}\int_{-2}^{u} x^{-5}dx+\lim_{v\to 0^+}\int_{v}^{3} x^{-5}dx$$

$$I=\lim_{u\to 0^-}\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_{-2}^{u}+\lim_{v\to 0^+}\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_{v}^{3}$$

$$I=-\frac{1}{4}\lim_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{x^4}\right]_{-2}^{u}-\frac{1}{4}\lim_{v\to 0^+}\left[\frac{1}{x^4}\right]_{v}^{3}$$

$$I=-\frac{1}{4}\lim_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{16}\right]-\frac{1}{4}\lim_{v\to 0^+}\left[\frac{1}{81}-\frac{1}{v}\right]=\infty$$

El límite no existe, por lo tanto, la integral diverge.

4. Ejercicios propuestos

4.1) Dada la función $f(x)=x^2$, definida en el intervalo $[0,2]$.

Obtener:

a) El valor promedio de la función en el intervalo dado.

b) El o los valores de $c\in[0,2]$, tales que $f(c)$ sea igual al valor promedio.

Respuesta:

a) Valor promedio $f(c)=\dfrac{4}{3}$

b) $c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

4.2) Dada la función $f(x)=3x^2,\; x\in[-2,-1]$

Encontrar:

a) El valor promedio de la función en $[-2,-1]$

b) El o los valores de $c\in[-2,-1]$, cuya existencia garantiza el teorema del valor medio del cálculo integral.

Respuesta:

a) Valor promedio $f(c)=7$

b) $c=-\sqrt{\dfrac{7}{3}},\; c\in[-2,-1]$

4.3) Si se sabe que

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\frac{15}{4},\quad \int_{1}^{2} f(x)\,dx=\frac{15}{4},\quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$$

a) Evaluar la integral $\displaystyle\int_{1}^{2} f(y)\,dy$ **b)** Evaluar la integral $\displaystyle\int_{2}^{-1} 4f(x)\,dx$

Respuesta:

a) $\dfrac{15}{4}$ **b)** -15

4.4) Obtener: $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^x \operatorname{sen}\sqrt{1+t}\ dt\right]$

Respuesta: $\operatorname{sen}\sqrt{1+x}$

4.5) Sea $F(x)=\displaystyle\int_2^x (t^2-2t+1)\ dt$

Obtener: $F'(x)$

Respuesta: $F'(x)=x^2-2x+1$

4.6) Aplicar el teorema fundamental del Cálculo para calcular

$$\int_0^{\pi/8} \sec^2(2x)\ dx$$

Respuesta: $\dfrac{1}{2}$

4.7) Obtener la antiderivada general de la función

$$f(x)=(\sqrt{x^3}-\sqrt{x}\,)^4\left(3\sqrt{x}\ -\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Respuesta:

$$\int (\sqrt{x^3}-\sqrt{x}\,)^4\left(3\sqrt{x}\ -\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = I$$

$$I=\frac{2}{5}\ (\sqrt{x^3}-\sqrt{x}\,)^5+C$$

4.8) Evaluar la integral $\displaystyle\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+7}\,dx$

Respuesta: $\ln\left(x^2+2x+7\right)+C$

4.9) Evaluar la integral $\displaystyle\int 3x^2\left(\sec^3 x^3\right)\left(\tan x^3\right)dx$

Respuesta: $\dfrac{\left(\sec x^3\right)^3}{3}+C$

4.10) Evaluar la integral $\displaystyle\int \left[\ln\left(\cos x\right)\right]^3 \tan x\; dx$

Respuesta: $-\dfrac{\left[\ln\left(\cos x\right)\right]^4}{4}+C$

4.11) Evaluar la integral $\displaystyle\int \frac{\left(e^{\tan x}-2\right)}{\cos^2 x}\,dx$

Respuesta: $e^{\tan x}-2\tan x+C$

4.12) Calcular, si existe, el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x}$

Respuesta: 2

4.13) Calcular, si existe, el valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{2x}$

Respuesta: 1

4.14) Determinar si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}\, dx$$

Respuesta:

La integral converge al valor $\frac{1}{2}$

4.15) Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ en el intervalo $[0,2]$, posteriormente determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

Respuesta:

La función es discontinua en $x = 2$

La integral converge al valor $\sqrt{2}$

TEMA 3
Métodos de integración

1. Integración aplicando los siguientes métodos: por partes, descomposición en fracciones parciales y sustitución trigonométrica

En este apartado se denotará a cada una de las integrales con la letra I

1.1) Resolver la siguiente integral: $\int x \ln x^2 \, dx$

Resolución:

La estructura del integrando, que no indica una integral inmediata, muestra un producto de funciones, por lo que es posible aplicar integración por partes.

$$\int u\,dv = u\,v - \int v du \quad \leftarrow$$ Expresión que identifica el método de integración por partes.

$$I = \int x \ln x^2 \, dx = 2\int x \ln x \, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx\right]$$

$$u = \ln x \qquad , \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad , \qquad v = \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$I = 2\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right]$$

$$I = 2\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x - \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{2}\right] + C$$

$$I = x^2 \ln x\ - \frac{1}{2}x^2 + C$$

1.2) Resolver la siguiente integral: $\int x^2\, ln\, x\, dx$

Resolución:

El integrando es tal que no puede resolverse de forma inmediata.

Aplica integración por partes; considerando la expresión:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v du$$

Se tiene

$$u = \ln x \qquad , \qquad dv = x^2\,dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad , \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$I = \int x^2 \ln x\ dx\ = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\ dx$$

$$I = \frac{x^3}{3}\ln x\ - \frac{1}{3}\ \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln x\ - \frac{1}{9}\,x^3 + C$$

1.3) Resolver la siguiente integral: $\int x \cos\left(2x\right) dx$

Resolución:

Similar a los ejercicios previos, se integra por partes, por lo que:

$$u = x \quad , \quad dv = \cos 2x\, dx$$

$$du = dx \quad , \quad v = \frac{1}{2} \text{ sen } 2x$$

$$I = \int x \cos\left(2x\right) dx = \frac{x}{2} \text{ sen } 2x - \frac{1}{2} \int \text{sen } 2x\, dx$$

$$I = \frac{x}{2} \text{ sen } 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

1.4) Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2 - x}{\left(x-3\right)\left(x^2-16\right)} dx$

Resolución:

No es una integral inmediata, tiene la estructura para aplicar fracciones parciales. Es un cociente de polinomios, donde el grado del numerador (en este caso es de segundo grado) es menor que el grado del denominador (es de tercer grado), por lo que se descompone de acuerdo con la teoría del método.

$$I = \int \frac{x^2 - x}{\left(x-3\right)\left(x-4\right)\left(x+4\right)} dx$$

$$\underbrace{\frac{x^2-x}{(x-3)(x-4)(x+4)}}_{\text{raíces reales diferentes}}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+4} \qquad (1)$$

Ecuación básica $\rightarrow$ $x^2-x=A(x-4)(x+4)+B(x-3)(x+4)+C(x-3)(x-4)$

Considerando que las raíces del denominador son reales y diferentes, se obtendrán los valores de las constantes A, B y C de la forma que se describe a continuación.

Se asigna a x el valor de cada raíz del polinomio del denominador:

$x=4$	$x=-4$	$x=3$
$12=B(1)(8)$	$20=C(-7)(-8)$	$6=A(-1)(7)$
$12=8B$	$20=56C$	$6=-7A$
$B=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$	$C=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$	$A=-\frac{6}{7}$

Sustituyendo estos valores en (1)

$$\frac{x^2-x}{(x-3)(x-4)(x+4)}=\frac{-\frac{6}{7}}{x-3}+\frac{\frac{3}{2}}{x-4}+\frac{\frac{5}{14}}{x+4}$$

$$I=-\frac{6}{7}\int\frac{1}{x-3}\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-4}\,dx+\frac{5}{14}\int\frac{1}{x+4}\,dx$$

$$I=-\frac{6}{7}\ln\left(x-3\right)+\frac{3}{2}\ln\left(x-4\right)+\frac{5}{14}\ln\left(x+4\right)+C$$

1.5) Resolver la siguiente integral: $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$

Resolución:

En una integral de la forma $\int u^n\,du$; se resuelve a partir de un cambio de variable:

$$u=4-x^2$$

$$du=-2x\,dx$$

$$dx=\frac{du}{-2x}$$

$$I=\int x\sqrt{4-x^2}\,dx=\int x\,\frac{u^{1/2}}{-2x}\,du=-\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$I=-\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+C$$

CONTENIDO TEMA 1 TEMA 2 TEMA 3 TEMA 4

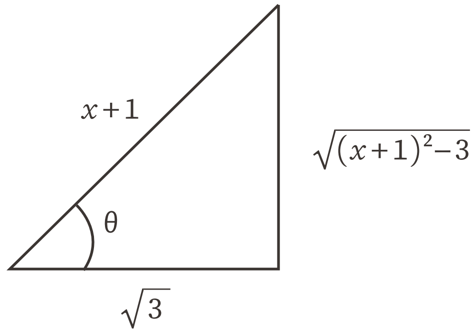
1.6) Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx$

Resolución:

Esta integral se resuelve por sustitución trigonométrica, pero primero se completa el trinomio cuadrado perfecto del radicando y se factoriza.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2-3}}\,dx$$

Entonces, el denominador es de la forma $\sqrt{u^2-a^2}$



Del triángulo se obtienen las siguientes funciones trigonométricas, para posteriormente realizar la sustitución trigonométrica.

$$\sec\theta = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}\,\sec\theta - 1$$

$$dx = \sqrt{3}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(x+1)^2-3}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2-3} = \sqrt{3}\,\tan\theta$$

$$I=3\int\frac{\left(\sqrt{3}\ \sec\theta-1\right)\sqrt{3}\ \sec\theta\tan\theta\ d\theta}{\sqrt{3}\ \tan\theta}$$

$$I=3\int\left(\sqrt{3}\ \sec\theta-1\right)\sec\theta\ d\theta=3\int\left(\sqrt{3}\ \sec^2\theta-\sec\theta\right)d\theta$$

$$I=3\sqrt{3}\int\sec^2\theta\ d\theta-3\int\sec\theta\ d\theta$$

De aquí ya se tienen integrales inmediatas:

$$I=3\sqrt{3}\ \tan\theta-3\ln\left(\sec\theta+\tan\theta\right)+C$$

El resultado debe expresarse en términos de la variable original, por lo que empleando el triángulo rectángulo se establecen las funciones necesarias:

$$I=3\left[\sqrt{x^2+2x-2}\ -\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

1.7) Resolver la siguiente integral: $\int\cos\left(\sqrt{x-3}\ \right)dx$

Resolución:

Esta integral se resuelve por partes, por lo que inicialmente se realiza el cambio de variable indicado

$$z=\sqrt{x-3}$$

$$z^2 = x - 3$$

$$2z\,dz = dx$$

$$I = \int \cos\left(\sqrt{x-3}\right) dx = \int \cos(z)\cdot 2z\,dz = 2\underbrace{\int z\cos(z)dz}_{\substack{I_1 \\ \text{(se integra por partes)}}}$$

Debe recordarse la expresión para integrar por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I_1 = \int z\cos(z)dz = z\,\mathrm{sen}(z) - \int \mathrm{sen}(z)dz$$

$$\begin{array}{cc} u = z & dv = \cos(z)dz \\ du = dz & v = \mathrm{sen}(z) \end{array}$$

$$I_1 = z\,\mathrm{sen}(z) + \cos(z) + C$$

Por lo tanto:

$$I = 2\left(z\,\mathrm{sen}(z) + \cos(z) + C\right) = 2z\,\mathrm{sen}(z) + 2\cos(z) + C$$

El resultado debe expresarse en términos de la variable original:

$$z = \sqrt{x-3}$$

Por lo que finalmente:

$$\int \cos\left(\sqrt{x-3}\right) dx = 2\sqrt{x-3}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x-3}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x-3}\right) + C$$

1.8) Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\ln\left(x^2\right)\right)dx$

Resolución:

Es conveniente iniciar con cambio de variable en el integrando:

$$z=\ln\left(x^2\right)=2\ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{2}=\ln(x)$$

Para obtener x se aplica la función inversa del logaritmo natural, que es la función exponencial:

$$e^{z/2}=x \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}\,e^{z/2}\,dz$$

Entonces, se tiene:

$$\int \operatorname{sen}\left(\ln\left(x^2\right)\right)dx=\int \operatorname{sen}\left(2\ln(x)\right)dx=\int \operatorname{sen} z\cdot\frac{1}{2}\,e^{z/2}\,dz$$

$$\int \operatorname{sen}\left(\ln\left(x^2\right)\right)\,dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int \operatorname{sen}(z)\,e^{z/2}\,dz}_{\substack{I_1\\ \text{(se integra por partes)}}}$$

Para I_1:

$$I_1=\int \operatorname{sen}(z)\,e^{z/2}\,dz=2\,e^{z/2}\operatorname{sen}(z)-2\underbrace{\int e^{z/2}\cos(z)\,dz}_{\substack{I_2\\ \text{nuevamente por partes}}}$$

$$u = \operatorname{sen}(z) \qquad dv = e^{z/2}\, dz$$

$$du = \cos(z)\, dz \qquad v = 2e^{z/2}$$

Para I_2:

$$I_2 = \int e^{z/2} \cos(z)\, dz = 2\, e^{z/2} \cos(z) + 2 \underbrace{\int e^{z/2} \operatorname{sen}(z)\, dz}_{\text{se obtiene } I_1}$$

$$u = \cos(z) \qquad dv = e^{z/2}\, dz$$

$$du = -\operatorname{sen}(z)\, dz \qquad v = 2e^{z/2}$$

Sustituyendo I_2 en I_1 :

$$\int \operatorname{sen}(z)\, e^{z/2}\, dz = 2e^{z/2} \operatorname{sen}(z) - 2\left[2e^{z/2}\cos(z) + 2\int e^{z/2} \operatorname{sen}(z)\, dz\right]$$

$$\int \operatorname{sen}(z)\, e^{z/2}\, dz = 2e^{z/2} \operatorname{sen}(z) - 4e^{z/2}\cos(z) - 4\int e^{z/2} \operatorname{sen}(z)\, dz$$

Agrupando términos semejantes:

$$5\int e^{z/2} \operatorname{sen}(z)\, dz = 2e^{z/2}\left(\operatorname{sen}(z) - 2\cos(z)\right) + C$$

Despejando la integral de interés:

$$\int e^{z/2} \operatorname{sen}(z)\, dz = \frac{2}{5} e^{z/2}\left(\operatorname{sen}(z) - 2\cos(z)\right) + C$$

Expresando el primer miembro de la integral en términos de la variable x:

$$\int \operatorname{sen}\left(\ln\left(x^2\right)\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\, e^{z/2}\left(\operatorname{sen}(z) - 2\cos(z)\right)\right] + C$$

Finalmente, el resultado en términos de la variable original $z=\ln(x^2)$:

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x^2))\,dx=\frac{1}{5}\,e^{\frac{1}{2}\ln(x^2)}\left[\operatorname{sen}(\ln(x^2))-2\cos(\ln(x^2))\right]+C$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x^2))\,dx=\frac{1}{5}\,x\left[\operatorname{sen}(\ln(x^2))-2\cos(\ln(x^2))\right]+C$$

1.9) Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-1}{(x-1)^3}\,dx$

Resolución:

Para esta integral aplica descomposición en fracciones parciales.

$$\frac{3x-1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$3x-1=A(x-1)^2+B(x-1)+C \quad \leftarrow \quad \text{Ecuación básica}$$

Una de las opciones para obtener los valores de las constantes A,B,C consiste en dar a la variable x, los valores de las raíces del denominador del integrando y cuando las raíces se repiten se pueden dar valores arbitrarios a x:

$$x=1 \qquad\qquad x=2$$

$$3(1)-1=C \qquad\qquad 3(2)-1=A(1)+B(1)+2$$

$$2=C \qquad\qquad 3=A+B \qquad \cdots(a)$$

$$x = 3$$

$$3(3) - 1 = 4A + 2B + 2$$

$$6 = 4A + 2B \qquad \cdots (b)$$

Resolviendo el sistema formado por (a) y (b) se obtiene

$$A = 0, \qquad B = 3$$

Por lo tanto:

$$I = \int \frac{3x-1}{(x-1)^3}\,dx = 3\int (x-1)^{-2}\,dx + 2\int (x-1)^{-3}\,dx$$

$$I = 3\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 2\,\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$$

$$I = -\frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

1.10) Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^4+4x^2}\,dx$

Resolución:

Para resolver esta integral se aplica el método de descomposición en fracciones parciales.

$$\frac{x+5}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x + 5 = A(x)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x^2)$$

$$x+5=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$$

$$x+5=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B \quad \leftarrow \quad \text{ecuación básica}$$

Otra de las opciones para obtener los valores de las constantes *A, B, C, D* consiste en igualar los coeficientes respectivos de los términos del primero y segundo miembro de la ecuación básica; de esta manera se forma un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son las constantes mencionadas, como se muestra enseguida:

$$A+C=0 \qquad \Rightarrow \qquad C=-\frac{1}{4}$$

$$B+D=0 \qquad \Rightarrow \qquad D=-\frac{5}{4}$$

$$4A=1 \qquad \Rightarrow \qquad A=\frac{1}{4}$$

$$4B=5 \qquad \Rightarrow \qquad B=\frac{5}{4}$$

Por lo tanto:

$$I=\int \frac{x+5}{x^4+4x^2}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx+\frac{5}{4}\int x^{-2}dx-\frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}dx-\frac{5}{4}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$I=\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{5}{4}\,\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{ang}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$I=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{5}{4x}-\frac{1}{8}\ln|x^2+4|-\frac{5}{8}\operatorname{ang}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

1.11) Resolver la siguiente integral: $\int -3\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{x+1}\right) dx$

Resolución:

Considerando propiedades de la integral indefinida, anteponemos (-3) a la integral e iniciamos un cambio de variable en el argumento de la función integrando:

$$\int -3\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{x+1}\right) dx$$

$$z=\sqrt{x+1}$$

$$z^2=x+1$$

$$2z\,dz=dx$$

$$I=-3\int \mathrm{sen}(z)(2z\,dz)$$

$$I=-6\int z\,\mathrm{sen}(z)\,dz \qquad \cdots(a)$$

La expresión (a) tiene la estructura para integrar por partes; cuya expresión es:

$$\int u\ dv=uv-\int v\ du$$

$$u=z \qquad\qquad dv=\mathrm{sen}(z)dz$$

$$du=dz \qquad\qquad v=-\cos(z)$$

Por lo tanto:

$$I=-z\cos(z)+\int \cos(z)dz$$

$$I=-z\cos(z)+\mathrm{sen}(z)+C$$

Regresando a la variable original:

$$I = -\sqrt{x+1}\,\cos\left(\sqrt{x+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\sqrt{x+1}\,\right) + C$$

1.12) Resolver la siguiente integral: $\int \sec^3(2x)\,dx$

Resolución:

Esta integral se resuelve aplicando integración por partes, pero se requiere que antes se cambie la estructura del integrando que permitirá emplear una identidad trigonométrica.

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \int \sec(2x)\,\sec^2(2x)\,dx$$

La integración por partes establece aplicar la expresión:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Se consideran los siguientes cambios de variable:

$$u = \sec(2x) \qquad\qquad dv = \sec^2(2x)\,dx$$

$$du = 2\sec(2x)\,\tan(2x)\,dx \qquad\qquad v = \int \sec^2(2x)\,dx$$

$$v = \frac{1}{2}\,\tan(2x)$$

Por lo tanto:

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\tan(2x)\,\sec(2x) - \frac{2}{2}\int \tan(2x)\,\sec(2x)\,\tan(2x)\,dx$$

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{2}\tan(2x)\sec(2x) - \int \tan^2(2x)\sec(2x)\,dx$$

Empleando la identidad $\tan^2(u) = \sec^2(u) - 1$

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{2}\tan(2x)\sec(2x) - \int \left(\sec^2(2x) - 1\right)\sec(2x)\,dx$$

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{2}\tan(2x)\sec(2x) - \int \sec^3(2x)\,dx + \int \sec(2x)\,dx$$

Se observa que la integral que interesa también se encuentra en el segundo miembro, por lo que se agrupan, pues son términos semejantes:

$$2\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{2}\tan(2x)\sec(2x) + \frac{1}{2}\ln\left|\sec(2x) + \tan(2x)\right| + C$$

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{4}\tan(2x)\sec(2x) + \frac{1}{4}\ln\left|\sec(2x) + \tan(2x)\right| + C$$

Finalmente:

$$\int \sec^3(2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\tan(2x)\sec(2x) + \ln\left|\sec(2x) + \tan(2x)\right|\right] + C$$

1.13) Resolver la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+13}\,dx$

Resolución:

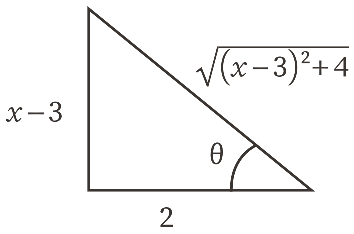
Esta integral puede resolverse por sustitución trigonométrica, pero inicialmente se completa el trinomio cuadrado perfecto del denominador, se factoriza y posteriormente se separa en dos integrales:

$$x^2-6x+13 = x^2-6x+9-9+13$$

$$=(x-3)^2+4$$

$$I=\int \frac{3x-2}{(x-3)^2+4}\,dx = \underbrace{\int \frac{3x}{(x-3)^2+4}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{2}{(x-3)^2+4}\,dx}_{I_2}$$

A pesar de que no tenga la forma $\sqrt{u^2+a^2}$, para I_1 es aplicable sustitución trigonométrica, como se muestra enseguida:



$$\tan(\theta)=\frac{x-3}{2}$$

$$x-3=2\tan(\theta)$$

$$x=2\tan(\theta)+3$$

$$dx=2\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$\cos(\theta)=\frac{2}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+4}=\frac{2}{\cos(\theta)}=2\sec(\theta)$$

Interesa solo el radicando, por lo que:

$$(x-3)^2+4=(2\sec(\theta))^2=4\sec^2(\theta)$$

Para I_1:

$$I_1=\int \frac{3(2\tan(\theta)+3)}{4\sec^2(\theta)}\,2\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$I_1=3\int\left(\tan(\theta)+\frac{3}{2}\right)d\theta=\ 3\int\tan(\theta)\,d\theta+\frac{9}{2}\int d\theta$$

Utilizando una identidad trigonométrica para la función tangente, se tiene:

$$I_1=3\int\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\ d\theta+\frac{9}{2}\theta$$

$$I_1=-3\ln\left(\cos(\theta)\right)+\frac{9}{2}\theta+C_1$$

En términos de la variable original

$$I_1=-3\ \ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-3)^2+4}}\right)+\frac{9}{2}\ \operatorname{ang}\tan\left(\frac{x-3}{2}\right)+C_1$$

Para I_2, se tiene una integral que se resuelve por un cambio de variable elemental:

$$I_2=-2\int\frac{1}{(x-3)^2+4}\,dx \quad \leftarrow \quad \int\frac{du}{u^2+a^2}$$

$$I_2=-2\left[\frac{1}{2}\operatorname{ang}\tan\left(\frac{x-3}{2}\right)\right]+C_2$$

$$I_2=-\operatorname{ang}\tan\left(\frac{x-3}{2}\right)+C_2$$

Finalmente:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = -3\ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-3)^2+4}}\right) + \frac{7}{2}\operatorname{ang\,tan}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$$

Donde C agrupa a las constantes $C_1 + C_2$

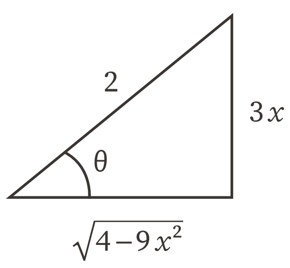
1.14) Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-9x^2)^{3/2}}\,dx$

Resolución:

Conviene expresar el denominador en términos del radical $\sqrt{4-9x^2}$, entonces:

$$I = \int \frac{x^2}{\left(\sqrt{4-9x^2}\,\right)^3}\,dx$$

El integrando sugiere integración por sustitución trigonométrica, por lo que es conveniente considerar el triángulo que sustenta el método.



$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{3x}{2} \;\Rightarrow\; 3x = 2\operatorname{sen}(\theta)$$

$$x = \frac{2}{3}\operatorname{sen}(\theta)$$

$$dx = \frac{2}{3}\cos(\theta)\,d\theta$$

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-9x^2}}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{4-9x^2} = 2\cos(\theta)$$

Entonces, la sustitución trigonométrica correspondiente lleva a lo siguiente:

$$I=\int \frac{\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}(\theta)\right)^2}{(2\cos(\theta))^3}\cdot\frac{2}{3}\cos(\theta)d\theta=\int \frac{\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2(\theta)\cdot\frac{2}{3}\cos(\theta)}{8\cos^3(\theta)}\,d\theta$$

$$I=\frac{\frac{8}{27}}{8}\int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\,d\theta=\frac{8}{216}\int \tan^2(\theta)\,d\theta \quad \leftarrow$$

Para resolver es conveniente usar una identidad trigonométrica.

Usando la identidad trigonométrica $\tan^2(\theta)=\sec^2(\theta)-1$:

$$I=\frac{1}{27}\int(\sec^2(\theta)-1)\,d\theta=\frac{1}{27}\int\sec^2(\theta)\,d\theta-\frac{1}{27}\int d\theta$$

$$I=\frac{1}{27}[\tan(\theta)-\theta]+C$$

Debe expresarse el resultado en términos de la variable original:

Del triángulo rectángulo $\tan(\theta)=\dfrac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}$

y de la función $\operatorname{sen}(\theta)=\dfrac{3x}{2}$ se tiene $\theta=\operatorname{ang\,sen}\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

por lo que:

$$I=\frac{1}{27}\left[\frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}-\operatorname{ang\,sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\right]+C$$

1.15) Resolver la siguiente integral: $\int \frac{6x^3-3x^2+2x-4}{x^4+x^2}\,dx$

Resolución:

$$I=\int \frac{6x^3-3x^2+2x-4}{x^2\left(x^2+1\right)}\,dx$$

Aquí se emplea la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{6x^3-3x^2+2x-4}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Se obtiene la ecuación básica:

$$6x^3-3x^2+2x-4=A\left(x\right)\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+\left(Cx+D\right)x^2$$

Efectuando operaciones en el segundo miembro:

$$6x^3-3x^2+2x-4=A\left(x^3\right)+Ax+Bx^2+B+C\left(x^3\right)+Dx^2$$

$$6x^3-3x^2+2x-4=\left(A+C\right)x^3+\left(B+D\right)x^2+\left(Ax\right)+B$$

Por igualdad de polinomios:

$A+C=6 \qquad \Rightarrow \qquad C=6-2=4$

$B+D=-3 \qquad \Rightarrow \qquad D=-3+4=1$

$A=2$

$B=-4$

Por lo tanto:

$$\frac{6x^3-3x^2+2x-4}{x^4+x^2}=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

$$I=2\int\frac{1}{x}\,dx-4\int x^{-2}\,dx+4\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Finalmente:

$$I=\ 2\ln(x)-4\,\frac{x^{-1}}{-1}+4\cdot\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{ang}\tan(x)+C$$

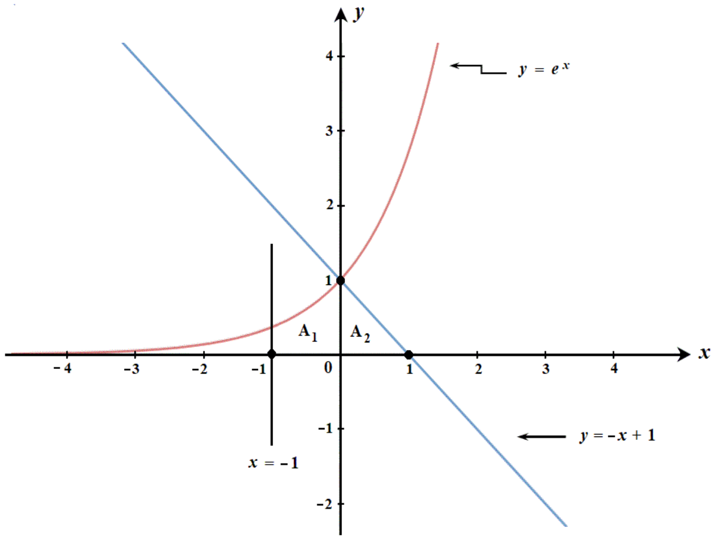
$$I=\ 2\ln(x)+\frac{4}{x}+2\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{ang}\tan(x)+C$$

2. Aplicaciones geométricas del cálculo integral: cálculo de áreas, longitud de arco y volumen de sólidos de revolución

2.1) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y=e^x$, $y=-x+1$, $x=-1$ y el eje de las abscisas.

Resolución:

Inicialmente, se realiza un bosquejo de la región:



Se observa que la región debe dividirse en 2. Si se eligen rectángulos verticales (Región tipo 1):

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left(e^x - 0\right) dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^{(0)} - e^{-(1)} = 1 - \frac{1}{e} = 0.632$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} \left(-x + 1\right) dx = -\frac{x^2}{2} + x \Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

Por lo que el área total es:

$$A_T = 0.632 + 0.5 = 1.132\, u \text{ de área.}$$

2.2) Calcular el área de la región limitada por la parábola $y^2 = \frac{1}{2}x$ y la cuerda que une los puntos $A(2,-1)$ y $B(8,2)$.

Resolución:

Conviene graficar la región de interés, por lo que inicialmente se debe obtener la ecuación de la recta definida por la cuerda que une los puntos A, B

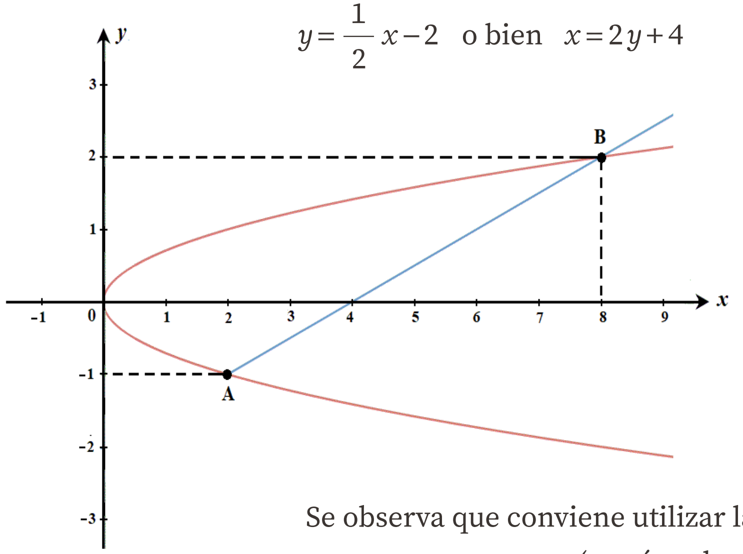
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+1}{8-2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad \text{o bien} \quad x = 2y + 4$$



Se observa que conviene utilizar la región tipo 2 (rectángulos horizontales).

$$A=\int_{c}^{d}\left[f(y)-g(y)\right]\,dy$$

$$A=\int_{-1}^{2}\left[(2y+4)-(2y^2)\right]dy=\int_{-1}^{2}\left(-2y^2+2y+4\right)dy$$

$$A=-\frac{2}{3}y^3+y^2+4y\,\Big|_{-1}^{2}=\left[-\frac{2}{3}(2)^3+(2)^2+4(2)\right]-\left[-\frac{2}{3}(-1)^3+(-1)^2+4(-1)\right]$$

$$A=\left(-\frac{2}{3}(8)+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}-3\right)$$

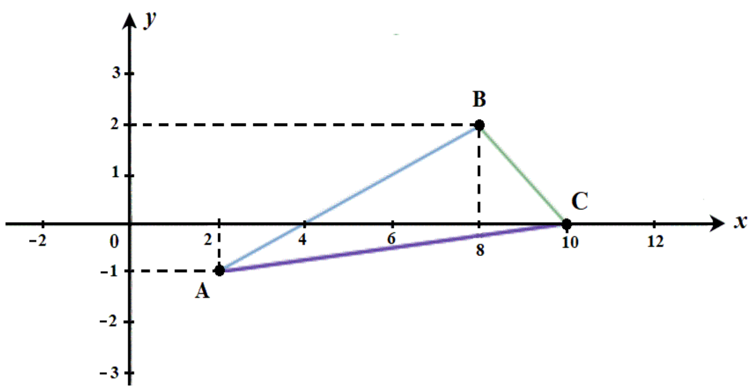
$$A=\left(-\frac{16}{3}+12\right)-\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{-16+36}{3}+\frac{7}{3}=\frac{27}{3}=9$$

$$A=9\,u^2$$

2.3) Calcular el área de la región limitada por el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(2,-1)$, $B(8,2)$, $C(10,0)$.

Resolución:

Conviene graficar la región inicialmente:



Cada lado del triángulo está dado por un segmento de recta, por lo que se obtienen las ecuaciones de las rectas que definen cada lado.

$L_1: \overline{AB}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad ; \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

$L_2: \overline{BC}$

$$m = \frac{0 - 2}{10 - 8} = -1$$

$$y - 2 = -(x - 8)$$

$$y = -x + 10$$

$L_3: \overline{CA}$

$$m = \frac{-1 - 0}{2 - 10} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$y - 0 = \frac{1}{8}(x - 10)$$

$$y = \frac{1}{8}x - \frac{5}{4}$$

Para calcular el área debe dividirse la región en dos. Sea A_1 el área definida por las rectas L_1, L_3, $x=2$ y $x=8$.

Empleando región tipo 1:

$$A_1=\int_2^8\left[\left(\frac{1}{2}x-2\right)-\left(\frac{1}{8}x-\frac{5}{4}\right)\right]dx=\int_2^8\left(\frac{3}{8}x-\frac{3}{4}\right)dx$$

$$A_1=\frac{3}{8}\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x\,\Big|_2^8=\left[\frac{3}{16}(64)-\frac{3}{4}(8)\right]-\left[\frac{3}{16}(4)-\frac{3}{4}(2)\right]$$

$$A_1=(12-6)-\left(\frac{3}{4}-\frac{6}{4}\right)=\frac{27}{4}$$

Sea A_2 el área definida por las rectas L_2 y L_3.

Empleando región tipo 1:

$$A_2=\int_8^{10}\left[(-x+10)-\left(\frac{1}{8}x-\frac{5}{4}\right)\right]dx=\int_8^{10}\left(-\frac{9}{8}x+\frac{45}{4}\right)dx$$

$$A_2=-\frac{9}{8}\frac{x^2}{2}+\frac{45}{4}x\,\Big|_8^{10}=\left[-\frac{9}{16}(100)+\frac{45}{4}(10)\right]-\left[-\frac{9}{16}(64)+\frac{45}{4}(8)\right]$$

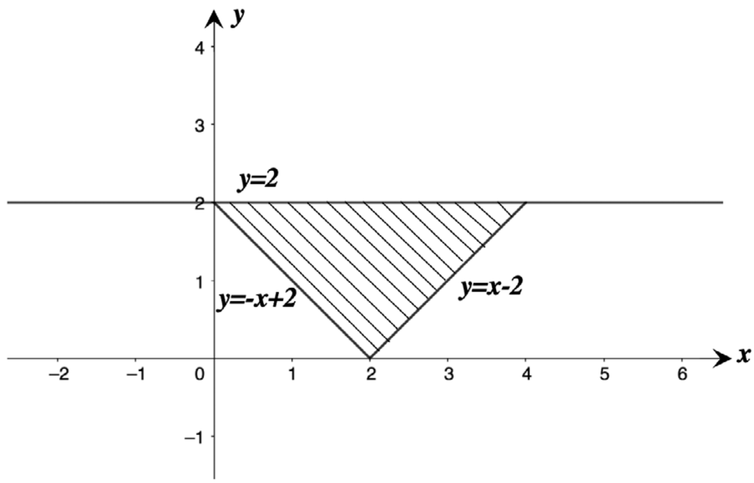
$$A_2=\frac{900-864}{16}=\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$$

$$A_T=A_1+A_2=\frac{36}{4}=9\,u^2$$

2.4) Mediante cálculo integral, calcular el área de la región limitada por $y = |x-2|$ y la recta $y = 2$.

Resolución:

Como se ha realizado anteriormente, primero se grafica la región:



La función valor absoluto se define por 2 reglas de correspondencia:

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2, & 0 \leq x < 2 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Lo anterior implica que, para el cálculo del área, se emplearán propiedades de la integral definida, como se muestra:

$$A = \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_b^c h(x)\,dx$$

$$A = \int_0^4 |x-2|\,dx = \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx$$

$$A=\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_2^4=(-2+4)+[(8-8)-(2-4)]$$

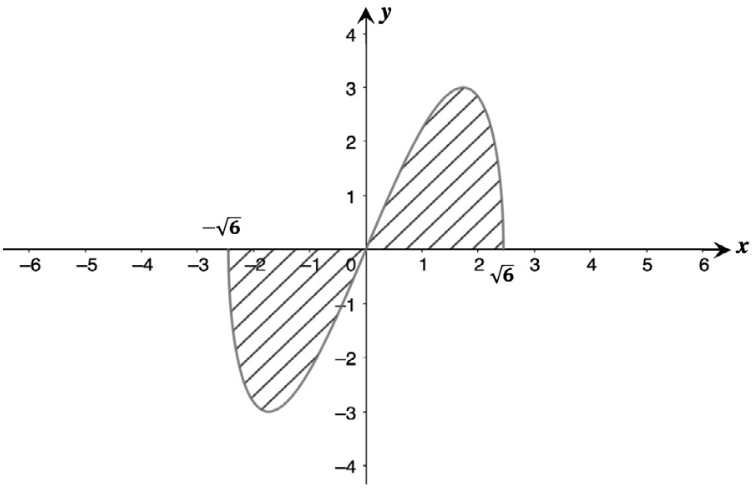
Finalmente:

$$A=2+2=4\,u^2$$

2.5) Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $y=x\sqrt{6-x^2}$ y el eje de las abscisas.

Resolución:

Se grafica inicialmente la región de interés:



Según se observa, debe dividirse la región en dos áreas, las que se llamarán A_1 y A_2, por lo que el área total será:

$$A_T=A_1+A_2$$

Para A_1 se considera que la región está en el tercer cuadrante $(f(x)<0)$, por lo que la integral estará precedida por el signo negativo:

$$A_1 = -\int_{-\sqrt{6}}^{0} x\sqrt{6-x^2}\,dx = -\int_{-\sqrt{6}}^{0} x\left(6-x^2\right)^{1/2}dx$$

Esta integral es de la forma $\int u^n du$, donde aplica el siguiente cambio de variable:

$$u = 6 - x^2$$

$$du = -2x\,dx$$

Entonces, se tiene:

$$A_1 = -\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(6-x^2\right)^{3/2}\Big|_{-\sqrt{6}}^{0} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{6^3}-0\right] = \frac{\sqrt{6^3}}{3}$$

$$A_1 = \frac{14.69}{3} = 4.89\ u^2$$

Para A_2:

$$A_2 = \int_0^{\sqrt{6}} x\sqrt{6-x^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{6}} x\left(6-x^2\right)^{1/2}dx$$

La integral se resuelve de manera similar a A_1, por lo que:

$$A_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(6-x^2\right)^{3/2}\Big|_{0}^{\sqrt{6}} = -\frac{1}{3}\left[0-\sqrt{6^3}\,\right] = \frac{\sqrt{6^3}}{3}$$

$$A_2 = \frac{14.69}{3} = 4.89\ u^2$$

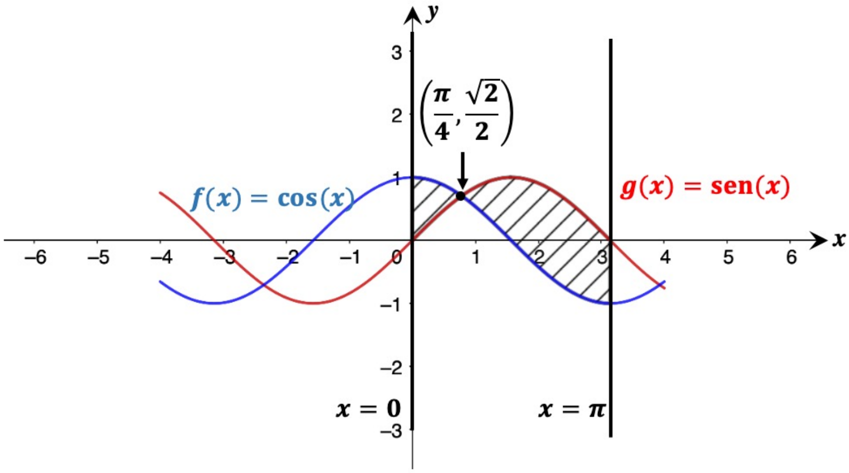
El resultado final es:

$$A_T = \frac{2}{3}\sqrt{6^3} = 9.79\,u^2$$

2.6) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $x = 0$ y $x = \pi$.

Resolución:

La gráfica de la región es la siguiente:



Para calcular el valor del área, se requiere emplear 2 integrales, además de obtener las coordenadas del punto de intersección entre las curvas, en el intervalo $[0, \pi]$.

Para obtener el punto de intersección se procede de la siguiente manera. Igualando las funciones:

$$f(x) = g(x)$$

$$\operatorname{sen}(x)=\cos(x)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}=1$$

$$\tan(x)=1$$

$$x=\operatorname{ang}\tan(1)$$

$$x=\frac{\pi}{4}$$

Para obtener el valor de la ordenada, se sustituye en cualquiera de las funciones:

$$f(x)=\operatorname{sen}(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo que las coordenadas del punto de intersección son $P\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

El área total está dada por la suma de las 2 áreas, como se indica:

$$A_T=A_1+A_2$$

$$A_1=\int_0^{\pi/4}(\cos(x)-\operatorname{sen}(x))\,dx$$

$$A_1=(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\Big|_0^{\pi/4}$$

$$A_1 = \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\text{sen}\,(0) + \cos\,(0)\right]$$

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 = = \sqrt{2} - 1 = 0.414$$

Para A_2:

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi} (\text{sen}\,(x) - \cos\,(x))dx$$

$$A_2 = (-\cos\,(x) - \text{sen}\,(x))\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$A_2 = [-\cos\,(\pi) - \text{sen}\,(\pi)] - \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$A_2 = [-(-1) - 0] - \left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$A_2 = 1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

$$A_2 = 2.414$$

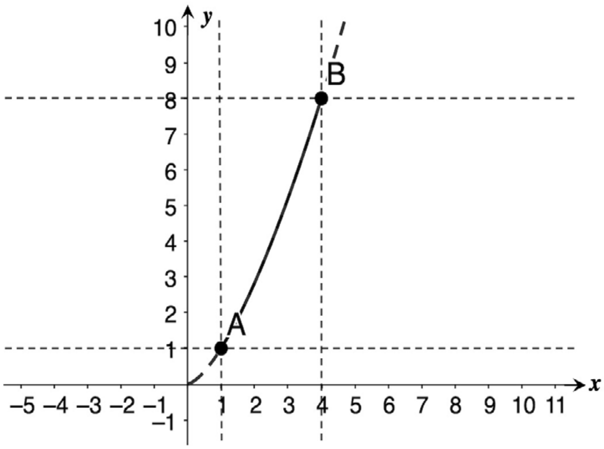
$$A_T = A_1 + A_2 = 0.414 + 2.414$$

$$A_T = 2.828\,u^2$$

2.7) Calcular la longitud del arco de la curva $y=x^{3/2}$ del punto $A(1,1)$ al punto $B(4,8)$.

Resolución:

La gráfica de la curva se muestra a continuación:



Para obtener la longitud de una curva $y=f(x)$, se emplea la expresión:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \qquad \cdots(A)$$

Por lo que se deriva la función $y=f(x)$ y se eleva al cuadrado:

$$f(x)=x^{3/2}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}\,;\ \left[f'(x)\right]^2=\frac{9}{4}x$$

Enseguida se sustituye en la expresión (A)

$$S=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx=\int_1^4\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}dx$$

Esta integral es de la forma $\int u^n du$, por lo que realizando el cambio de variable siguiente:

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad\qquad du = \frac{9}{4}dx$$

Resulta:

$$S = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_1^4 = \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}(4)\right)^{3/2} - \left(1+\frac{9}{4}(1)\right)^{3/2}\right]$$

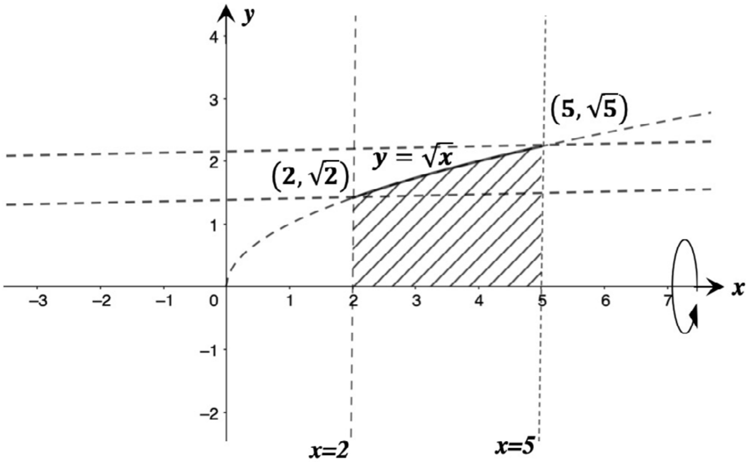
$$S = \frac{8}{27}\left[\sqrt{(10)^3} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right]$$

$$S = 7.635 \text{ unidades}$$

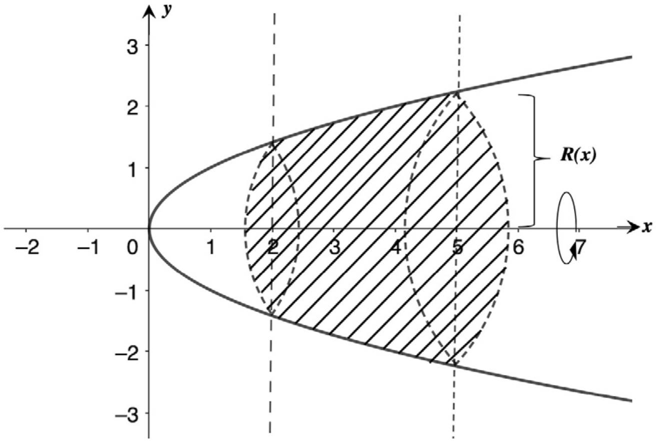
2.8) Encontrar el volumen del sólido que se obtiene cuando la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y el eje de las abscisas, definida en el intervalo $x \in [2, 5]$, se hace girar alrededor del eje x.

Resolución:

Inicialmente se grafica la región en el *plano xy*.



Al girar la región alrededor del *eje x,* un bosquejo del sólido resultante es el que se muestra enseguida:



El volumen del sólido se calcula a partir de la expresión:

$$V=\pi\int_{a}^{b}\left[R(x)\right]^{2}\,dx$$

$$R(x)=f(x)=\sqrt{x} \qquad \leftarrow \text{es el radio del sólido}$$

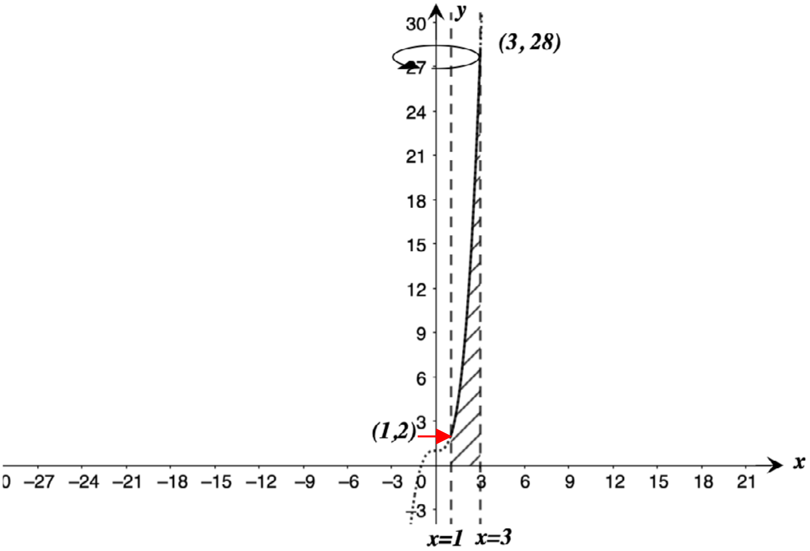
$$V=\ \pi\int_{2}^{5}(\sqrt{x}\ )^{2}\,dx=\pi\int_{2}^{5}x\,dx=\pi\left(\frac{x^{2}}{2}\right)\Big|_{2}^{5}$$

$$V=\pi\left[\frac{(5)^{2}}{2}-\frac{(2)^{2}}{2}\right]=\pi\left(\frac{25}{2}-\frac{4}{2}\right)=\frac{21}{2}\ \pi\ u^{2}$$

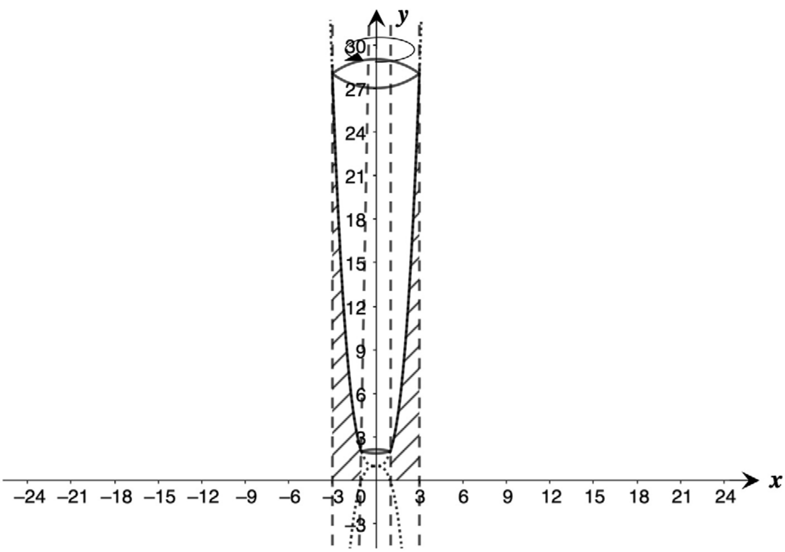
2.9) Encontrar el volumen del sólido resultante cuando la región bajo la curva $y=1+x^{3}$ limitada por el eje *x,* definida en el intervalo $x\in[1,3]$, se hace girar alrededor del eje *y*.

Resolución:

Inicialmente se grafica la región en el plano xy.

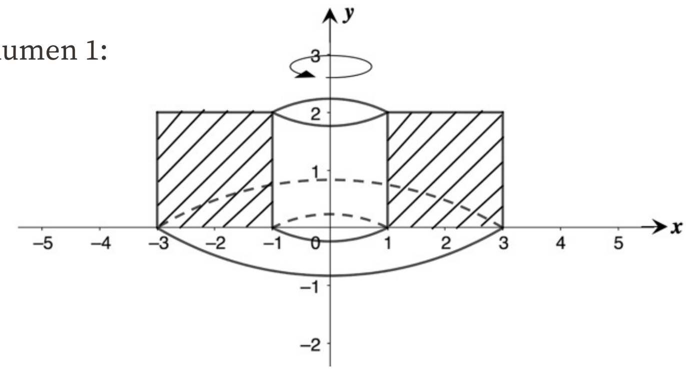


Al girar la región alrededor del eje y, un bosquejo del sólido resultante es el que se muestra enseguida:



Se pueden observar en la figura dos secciones que generan el volumen. Una está determinada por la región plana que limita la recta horizontal $y=2$, las rectas verticales $x=1$, $x=3$ y el eje de las abscisas. Al girar define el volumen 1.

Para el volumen 1:



El volumen V_1 se calcula enseguida:

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left\{ \left[R\left(y\right) \right]^2 - \left[r\left(y\right) \right]^2 \right\} dy$$

$$R\left(y\right) = 3 \quad \leftarrow \text{Radio exterior}$$

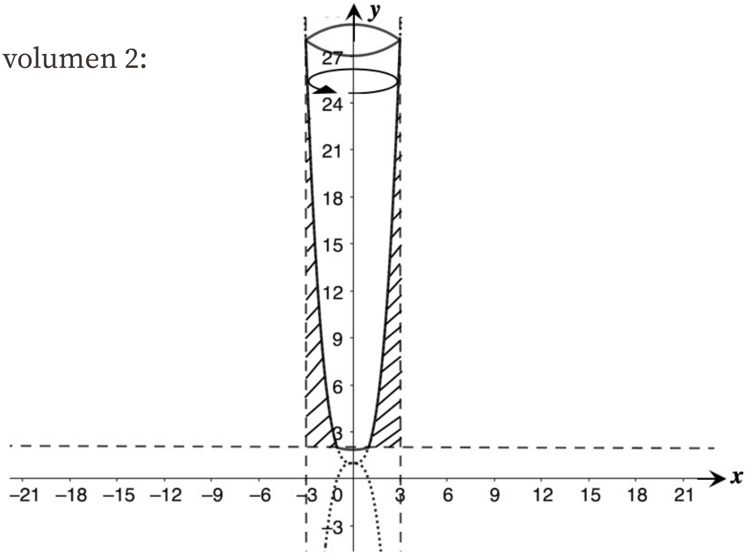
$$r\left(y\right) = 1 \quad \leftarrow \text{Radio interior}$$

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left[\left(3\right)^2 - \left(1\right)^2 \right] dy = \pi \int_0^2 \left(9-1\right) dy$$

$$V_1 = \pi \int_0^2 8\, dy = \pi\left(8y\right) \Big|_0^2 = \pi\left(16\right) = 16\pi\ u^3$$

Otra sección está determinada por la región plana que limita la curva $y=1+x^3$, la recta horizontal $y=2$ y la recta $x=3$. Los extremos de integración los determinarán las ordenadas de los puntos (1, 2) y (3, 28). Al girar define el volumen 2.

Para el volumen 2:



El volumen V_2 se calcula enseguida:

$$V_2 = \pi \int_2^{28} \left\{ \left[R(y) \right]^2 - \left[r(y) \right]^2 \right\} dy$$

$$R(y) = 3 \quad \leftarrow \text{Radio exterior}$$

$$r(y) = \sqrt[3]{y-1} \quad \leftarrow \text{Radio interior}$$

$$V_2 = \pi \int_2^{28} \left[(3)^2 - \left(\sqrt[3]{y-1} \right)^2 \right] dy$$

$$V_2 = \pi \int_2^{28} \left[9 - (y-1)^{2/3} \right] dy$$

$$V_2 = \pi \left[9y - \frac{3}{5} (y-1)^{5/3} \right]_2^{28}$$

$$V_2 = \pi \left\{ \left[9(28) - \frac{3}{5}(27)^{5/3} \right] - \left[9(2) - \frac{3}{5}(1) \right] \right\}$$

$$V_2 = \pi \left[\left(252 - \frac{3}{5}(243) \right) - \left(18 - \frac{3}{5} \right) \right]$$

$$V_2 = \frac{444}{5}\pi$$

Se calcula el volumen total, considerando la suma del volumen 1 y del volumen 2.

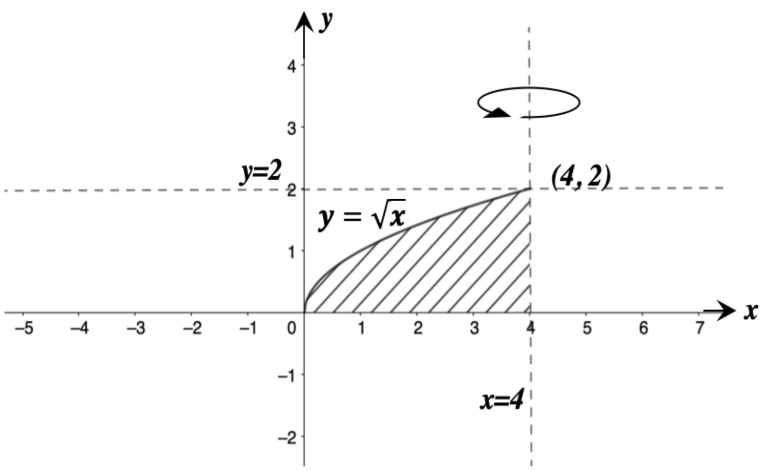
$$V_T = V_1 + V_2 = 16\pi + \frac{444}{5}\pi$$

$$V_T = \frac{524}{5}\pi u^3$$

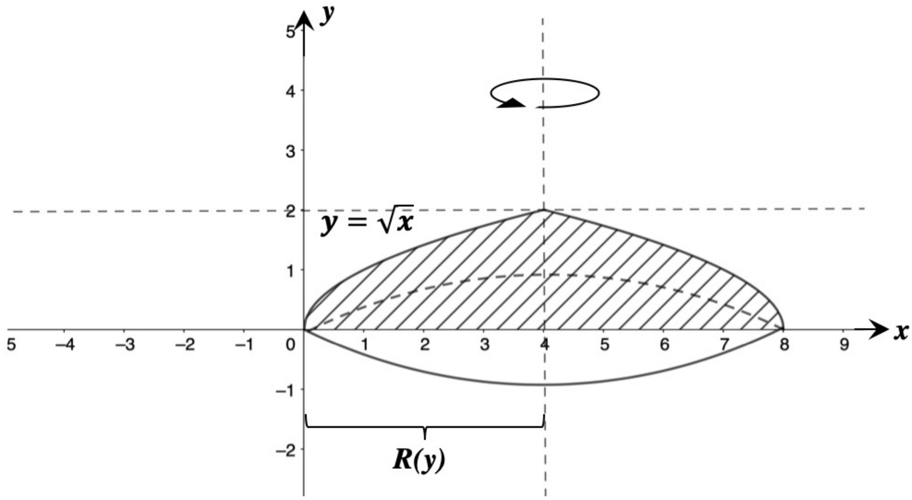
2.10) Calcular el volumen del sólido que se obtiene cuando la región limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$, gira alrededor de la recta $x = 4$.

Resolución:

Se grafica inicialmente la región plana:



Enseguida se bosqueja el sólido que se genera



La expresión para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 \, dy$$

$$R(y) = 4 - y^2$$

$$V = \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 \, dy = \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) \, dy$$

$$V = \pi \left(16y - \frac{8}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right)$$

$$V = \frac{256}{15} \pi u^3$$

3. Ejercicios propuestos

3.1) Efectuar la siguiente integral: $\int \ln\left(\sqrt{x+1}\right)\,dx$

Respuesta: $x\ln\left|x+1\right| - x + \ln\left|x+1\right| + C$

3.2) Efectuar la siguiente integral: $\int e^{-\frac{1}{2}x}\cos(2x)\,dx$

Respuesta:

$$e^{-\frac{1x}{2}}\left(\frac{8}{17}\operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{34}\cos(2x)\right) + C$$

3.3) Efectuar la siguiente integral: $\int \csc^3(2x)\,dx$

Respuesta:

$$-\frac{1}{4}\csc(2x)\cot(2x) + \frac{1}{4}\ln\left|\csc(2x) - \cot(2x)\right| + C$$

3.4) Efectuar la siguiente integral: $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)^2}\,dx$

Respuesta:

$$\frac{1}{9}\ln\left|x+1\right| - \frac{1}{9}\ln\left|x-2\right| - \frac{1}{3(x-2)} + C$$

3.5) Efectuar la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+3+2e^{-x}}\,dx$

Respuesta: $\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x+2\right)+C$

3.6) Efectuar la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x-10}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}\,dx$

Respuesta:

$$2\left[\,\ln\left|x^2+2x+2\right| + \operatorname{ang}\tan(x+1)-\ln\left|x-1\right|\right]+C$$

3.7) Efectuar la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-2}}$

Respuesta:

$$\ln\left|\frac{(x-2)+\sqrt{(x-2)^2-6}}{\sqrt{6}}\right|+C$$

3.8) Efectuar la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x^2}{\left(1-5x^2\right)^{3/2}}\,dx$

Respuesta:

$$\frac{1}{5\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{1-5x^2}}-\operatorname{ang}\operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\,x\right)\right]+C$$

3.9) Efectuar la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}$

Respuesta:

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-25}\,-5}{x}\right|+C$$

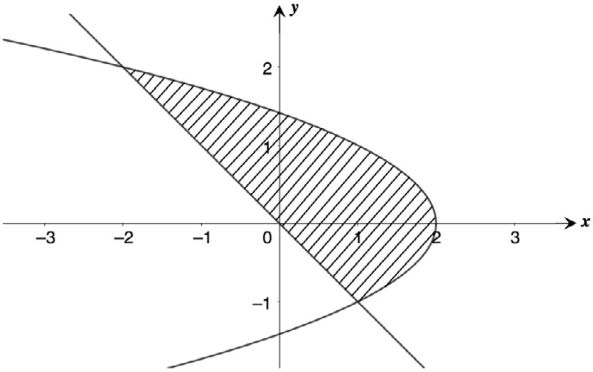
3.10) Efectuar la siguiente integral: $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(2x)\,dx$

Respuesta:

$$-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{6}\cos^3(2x)+C$$

3.11) Calcular el área de la región limitada por las curvas de ecuación $y^2+x-2=0$ y $y+x=0$

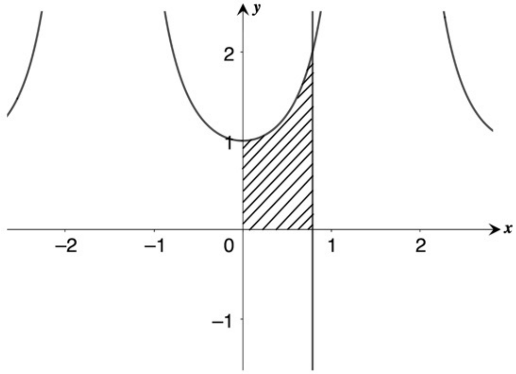
Respuesta:



Área $=\dfrac{9}{5}$ unidades cuadradas

3.12) Calcular el área de la región limitada por las curvas de ecuación $y = \sec^2(x)$, el eje x, el eje y y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$.

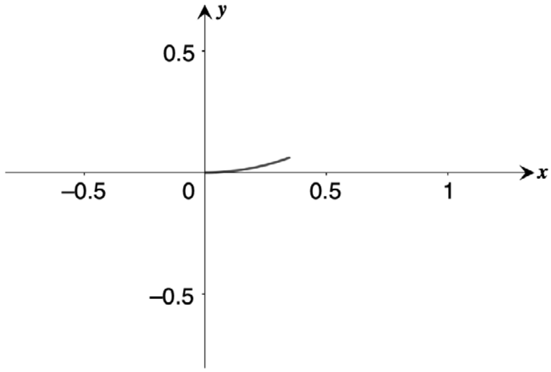
Respuesta:



Área = 1 unidad cuadrada

3.13) Determinar la longitud de arco de la curva $y = \ln\left|\sec(x)\right|$, desde $x = 0$, hasta $x = \frac{\pi}{4}$

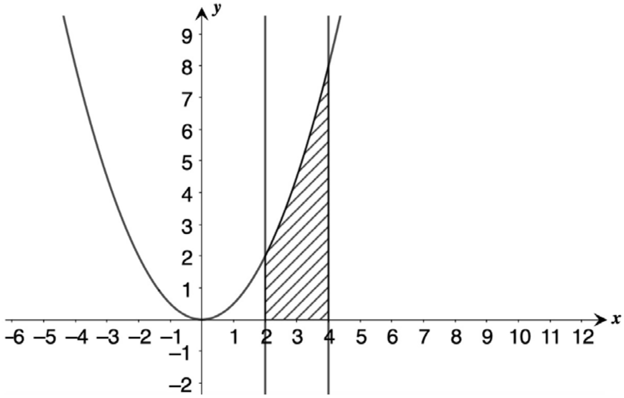
Respuesta:



$S = \ln\left|\sqrt{2}+1\right|$ unidades lineales

3.14) Calcular el volumen del sólido de revolución generado, cuando la región acotada por la curva $y=\frac{1}{2}x^2$, el eje de las abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$, gira alrededor del eje x.

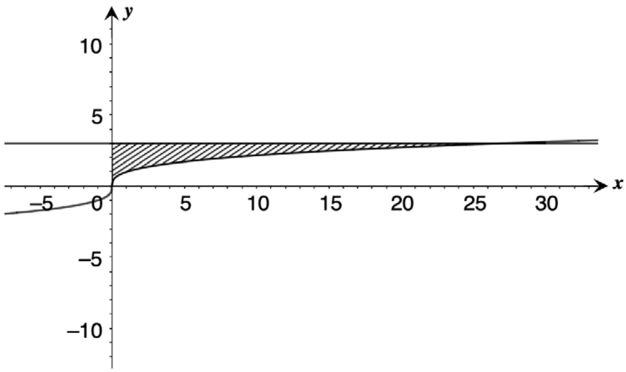
Respuesta:



$$\text{Volumen} = \frac{248}{5}\pi \text{ unidades cúbicas}$$

3.15) Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera, cuando la región limitada por las curvas $y=x^{1/3}$, el eje y y la recta $y=2$, gira alrededor del eje de las ordenadas.

Respuesta:



$$\text{Volumen} = \frac{128}{7}\pi \text{ unidades cúbicas}$$

TEMA 4
Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables

1. Dominio y recorrido de funciones escalares de dos variables. Región de definición y gráfica de funciones escalares de dos variables

1.1) Sea la función $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$. Obtener el dominio y el recorrido de la función.

Resolución:

Para el dominio de la función se tiene

$$z=\sqrt{36-x^2-y^2}$$

$$36-x^2-y^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 36\geq x^2+y^2 \quad \text{o} \quad x^2+y^2\leq 36$$

Por lo que, el dominio de la función es el conjunto

$$D_f=\{(x,\, y)/x^2+y^2\leq 36\}$$

Este es el conjunto de puntos del plano xy sobre la circunferencia $x^2+y^2=36$, así como los puntos de la región interior limitada por esta circunferencia.

Para el recorrido de la función se tiene que

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

Entonces $0 \leq z \leq 6$, por lo que el recorrido de f es el conjunto de números reales del intervalo cerrado $\left[0,\, 6\right]$.

1.2) Obtener el dominio de la función $f\left(x,\, y\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 49}}$

Resolución:

Para el dominio de la función se tiene

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 49} > 0$$

$$x^2 + y^2 - 49 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 49$$

Entonces, el dominio es el siguiente conjunto:

$$D_f = \left\{\left(x,\, y\right) \;/\; x^2 + y^2 > 49\right\}$$

Este es el conjunto de puntos de la región exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 49$.

1.3) Obtener y describir la región de definición de la función del ejercicio 1.1.

CONTENIDO
1
2
3
4

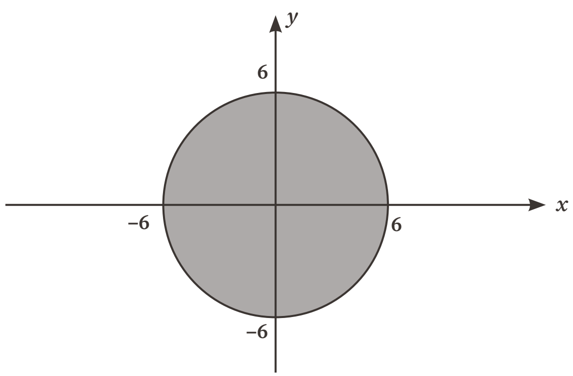
Resolución:

La región de definición de una función de dos variables es la representación gráfica del dominio de la función en el plano xy.

Según se obtuvo en el ejercicio 1.1, el dominio es

$$D_f = \{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 \leq 36\}$$

El lugar geométrico en $\mathbb{R}^2$ (plano xy) se muestra a continuación:



La región de definición corresponde a los puntos sobre la circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r = 6$, así como los puntos al interior de dicha circunferencia.

1.4) Obtener y describir la región de definición de la función del ejercicio 1.2.

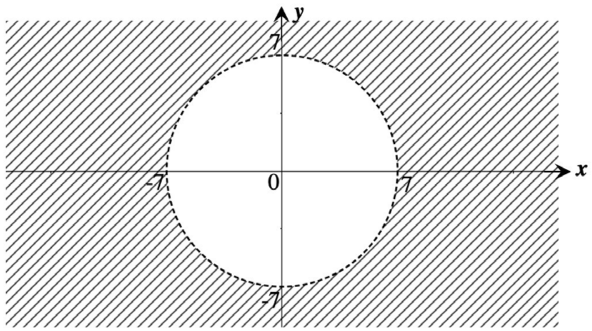
Resolución:

La región de definición de una función de dos variables es la representación gráfica del dominio de la función en el plano xy.

Según se obtuvo en el ejercicio 1.2, el dominio es

$$D_f = \{(x, y) / x^2 + y^2 > 49\}$$

El lugar geométrico en $\mathbb{R}^2$ (plano xy) se muestra enseguida:



La región de definición corresponde a los puntos del plano xy que se encuentran fuera de la circunferencia y tampoco incluye a los puntos que están sobre la circunferencia.

1.5) Graficar e identificar la superficie representada por $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

Resolución:

La gráfica de una función de dos variables es una superficie que consta de todos los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas cartesianas están determinadas por las ternas ordenadas de números reales (x, y, z).

En este caso, para graficar se pueden emplear las trazas de la superficie, según se estudió en el curso previo de Cálculo y Geometría Analítica. La traza de la superficie en el plano xy se obtiene al emplear la ecuación $z=0$ y sustituir en la ecuación de la superficie:

$$0=\sqrt{25-x^2-y^2}$$

$$x^2+y^2=25$$

Esta ecuación representa una circunferencia de centro $C(0,\ 0)$ y radio $r=5$. Para la traza en el plano xz, se tiene $y=0$, y se sustituye en la ecuación de la superficie:

$$z=\sqrt{25-x^2}$$

$$z^2=25-x^2$$

$$x^2+\ z^2=25$$

La ecuación representa una circunferencia de centro $C(0,0)$ y radio $r=5$.

Finalmente, para la traza yz se tiene $x=0$, y se sustituye en la ecuación de la superficie:

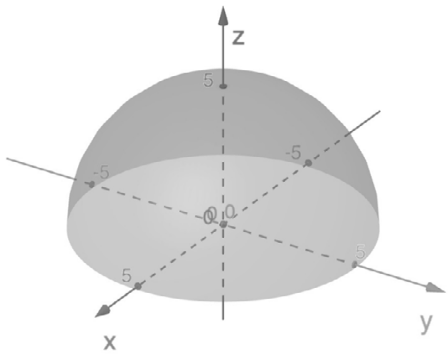
$$z=\sqrt{25-y^2}$$

$$y^2+z^2=25$$

La ecuación representa una circunferencia de centro $C(0,\ 0)$ y radio $r=5$.

De lo anterior, se tiene que todas las trazas representan circunferencias.

Finalmente, debe considerarse que la superficie se refiere solo al radical positivo, por lo que al graficar se tendrían valores para la función $z \geq 0$.



Entonces, la superficie de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ es una semiesfera de centro en el origen y radio 5.

1.6) Trazar la gráfica de la superficie cuya ecuación se muestra en cada uno de los siguientes incisos, utilizando algún graficador o software adecuado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

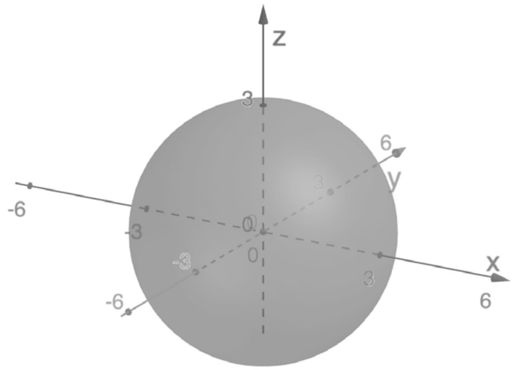
b) $x^2 + y^2 = z$

Indicar el nombre de la superficie.

Resolución:

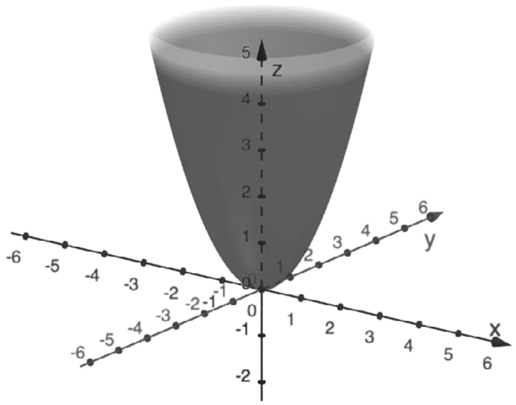
Empleando un graficador se tienen las siguientes figuras:

a)



La superficie es una esfera de centro en el origen y radio 3.

b)



La superficie es un paraboloide circular de centro en el origen y eje coincidente con el eje z.

1.7) Identificar y trazar la gráfica de las superficies cuadráticas siguientes, empleando un graficador en 3D.

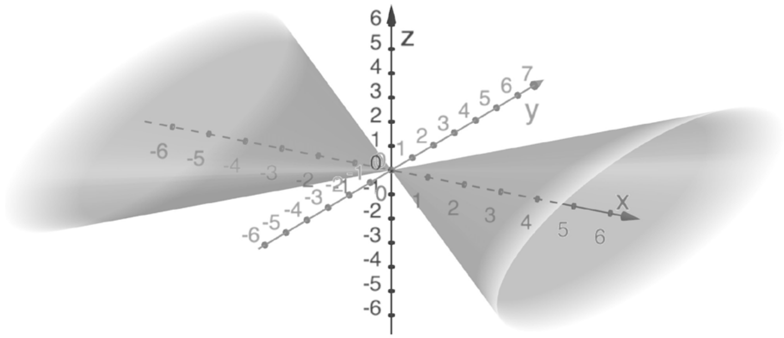
a) $y^2 + 5z^2 = x^2$

b) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

Resolución:

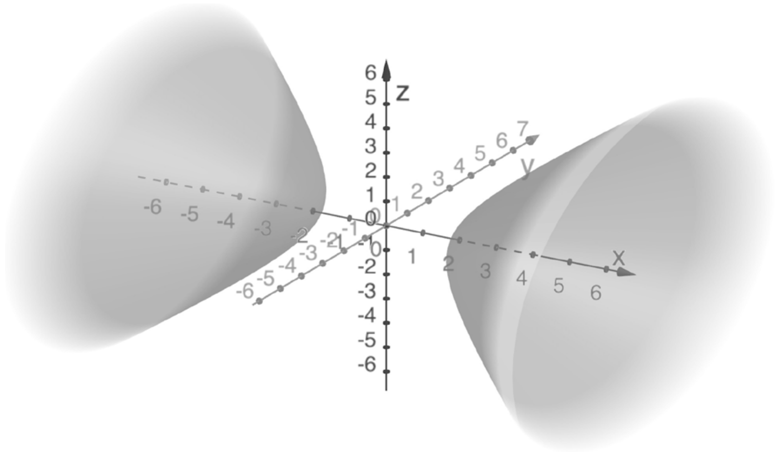
Empleando un graficador se tiene:

a)



La superficie representa un cono elíptico con eje coincidente con el eje x.

b)



La superficie representa un hiperboloide de dos hojas con eje coincidente con el eje x.

1.8) Sea la función $f(x,\ y)=\sqrt{x^2-y^2-2}$. Dibujar y describir 3 curvas de nivel asociadas a la función dada. Emplear los valores $C_1=-1$, $C_2=0$ y $C_3=\sqrt{2}$.

Resolución:

Considerando $z=C$, se toman los valores C_1, C_2 y C_3.

$$C_1=-1 \ \Rightarrow \ z=-1$$

Sustituyendo en la ecuación de la superficie:

$$z=f(x,y)$$

$$-1=\sqrt{x^2-y^2-2}$$

$$1=x^2-y^2-2 \ \Rightarrow \ x^2-y^2=3$$

O bien, $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$

Esta ecuación representa una hipérbola de centro $C(0,0)$, semieje transverso $a=\sqrt{3}$ y semieje conjugado $b=\sqrt{3}$.

Para el siguiente valor de C:

$$C_2=0 \ \Rightarrow \ z=0$$

De igual manera, se sustituye en la ecuación de la superficie:

$$0=\sqrt{x^2-y^2-2}$$

$$0=x^2-y^2-2 \ \Rightarrow \ x^2-y^2=2$$

O bien, $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

Se tiene una hipérbola de centro $C(0,0)$, semieje transverso $a = \sqrt{2}$ y semieje conjugado $b = \sqrt{2}$.

Finalmente, para $C_3 = \sqrt{2}$

$$C_3 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}$$

Se sustituye en la ecuación de la superficie

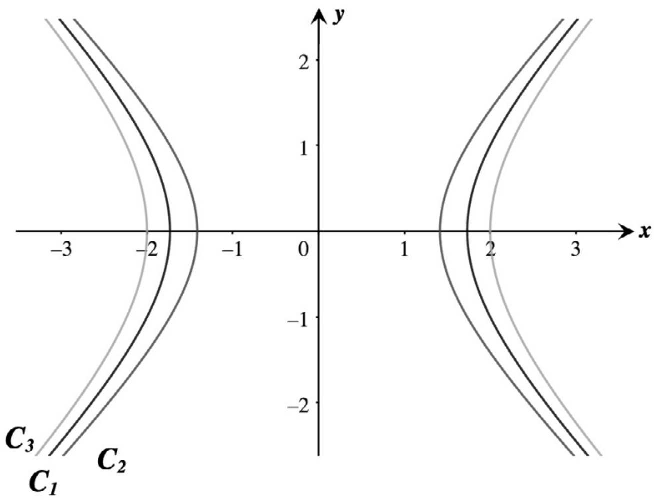
$$\sqrt{2} = \sqrt{x^2 - y^2 - 2}$$

$$2 = x^2 - y^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 4$$

O bien, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Aquí se tiene una hipérbola de centro $C(0,0)$, semieje transverso $a = 2$ y semieje conjugado $b = 2$.

El lugar geométrico de las 3 curvas de nivel se muestra enseguida:



2. Límite de funciones de dos variables y derivadas parciales de funciones de dos o más variables

2.1) A continuación, evaluar el límite indicado.

a) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(3,\,0)} f(x,y) \quad ; \quad f(x,y)=x^2+y^2$

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,y) \quad ; \quad f(x,y)=\dfrac{x\,y}{x^2+2y^2}$

Resolución:

a) Inicialmente se calcula el límite evaluando directamente la función:

$$\lim_{(x,\,y)\to(3,\,0)} \left(x^2+y^2\right)=(0)^2+(3)^2=9 \qquad \leftarrow \text{ este es el valor límite}$$

b) De manera similar, se evalúa la función al calcular el límite:

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \left(\frac{x\,y}{x^2+2y^2}\right)=\frac{(0)(0)}{(0)}=\frac{(0)}{(0)}$$

En este caso, el resultado es una indeterminación, por lo que aún no se puede concluir nada acerca del resultado del límite o de su no existencia.

En el curso de la asignatura Cálculo Integral, se ha mostrado el proceso para calcular, si existe, el límite de una función de dos variables: límites reiterados y límites por trayectorias.

Enseguida se procede a aplicar lo que establece el planteamiento por trayectorias.

Empleando la trayectoria $y=x$, al sustituir en la función original, se tiene que la función

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+2y^2}$$

se transforma en

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x^2}=\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

Por lo que el límite se calcula considerando una función de una sola variable, que en este caso es una constante.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

Empleando la trayectoria $y=2x$, se procede de manera similar, dando lugar a una función de una variable, que nuevamente es una constante

$$f(x)=\frac{x(2x)}{x^2+2(2x)^2}=\frac{2x^2}{x^2+8x^2}$$

$$f(x)=\frac{2x^2}{9x^2}=\frac{1}{9}$$

Por lo que el límite se calcula como se indica enseguida:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$$

Considerando el resultado obtenido, el valor de los límites es diferente y, teniendo presente que cuando una función tiene límite, este es único, la respuesta final es que el límite no existe.

1
2
3
4

2.2) Sea la función $z=f(x,y)= 3x^2y-4xy^2+x^2+3y^2$, obtener z_x y z_y.

Resolución:

Para calcular z_x, debe recordarse que la variable "y" se comporta como constante

$$z_x=6xy-4y^2+2x$$

Para calcular z_y , debe recordarse que la variable "x" se comporta como constante

$$z_y=3x^2-8xy+6y$$

2.3) Sea la función $w=f(x,y,z)=e^{x^2y}-2ye^{z^2}+4xy^2z$, obtener w_x, w_y y w_z.

Resolución:

Considerando que se tienen tres variables independientes, para calcular w_x debe recordarse que las variables "y" y "z" se comportan como constantes.

$$w_x=e^{x^2y}(2xy)+4y^2z=2xye^{x^2y}+4y^2z$$

Para calcular w_y, debe recordarse que las variables "x" y "z" se comportan como constantes.

$$w_y=e^{x^2y}(x^2)-2e^{z^2}+8xyz=x^2e^{x^2y}-2e^{z^2}+8xyz$$

Para calcular w_z, debe recordarse que las variables "x" y "y" se comportan como constantes.

$$w_z = -2ye^{z^2}(2z) + 4xy^2 = -4yze^{z^2} + 4xy^2$$

2.4) Sea la función $z = f(x, y) = (x^2 - y^3)^{-2}$, obtener z_x y z_y.

Resolución:

Para calcular z_x, debe recordarse que la variable "y" se comporta como constante.

$$z_x = -2(x^2 - y^3)^{-3}(2x) = -\frac{4x}{(x^2 - y^3)^3}$$

Para calcular z_y, debe recordarse que la variable "x" se comporta como constante.

$$z_y = -2(x^2 - y^3)^{-3}(-3y^2) = \frac{6y^2}{(x^2 - y^3)^3}$$

2.5) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, para la función $f(x, y) = x\cos(xy)$.

Resolución:

Inicialmente se calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y después se evalúa en el punto P:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \frac{\partial}{\partial x} \cos(xy) + \cos(xy) \frac{\partial}{\partial x}(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\left[-\operatorname{sen}(xy)(y)\right] + \cos(xy)(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(xy)\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$$

Entonces:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)\operatorname{sen}(0) + \cos(0) = 1$$

Enseguida se calcula $\frac{\partial f}{\partial y}$, posteriormente se evalúa en el punto P:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y} \cos(xy) + \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y}(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left[-\operatorname{sen}(xy)(x)\right] = -x^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)} = 0$$

2.6) Obtener z_x y z_y a partir de la función $z = 2x\,e^{\sec(xy^2)}$.

Resolución:

Para calcular z_x, debe recordarse que la variable "y" se comporta como constante.

$$z_x = 2x \frac{\partial}{\partial x} e^{\sec(xy^2)} + e^{\sec(xy^2)} \frac{\partial}{\partial x} 2x$$

$$z_x = 2x\left[e^{\sec(xy^2)} \sec(xy^2) \tan(xy^2)(y^2)\right] + e^{\sec(xy^2)}(2)$$

$$z_x = 2e^{\sec(xy^2)}\left[xy^2 \sec(xy^2) \tan(xy^2) + 1\right]$$

Para calcular z_y, debe recordarse que la variable "x" se comporta como constante.

$$z_y = 2x \frac{\partial}{\partial y} e^{\sec(xy^2)} + e^{\sec(xy^2)} \frac{\partial}{\partial y}(2x)$$

$$z_y = 2x e^{\sec(xy^2)} \sec(xy^2) \tan(xy^2)(2xy) + (0)$$

$$z_y = 4x^2 y e^{\sec(xy^2)} \sec(xy^2) \tan(xy^2)$$

2.7) Sea $f(x, y) = \ln \sqrt{\dfrac{x^2 y}{xy^2 - x^3 y^3}}$, obtener f_x y f_y

Resolución:

Para facilitar el proceso, es conveniente aplicar inicialmente propiedades de la función logaritmo natural.

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2y}{xy^2 - x^3y^3}\right)^{1/2}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2y}{xy^2 - x^3y^3}\right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2y\right) - \ln\left(xy^2 - x^3y^3\right)\right]$$

Para calcular f_x debe recordarse que la variable "y" se comporta como constante.

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2xy}{x^2y} - \frac{y^2 - 3x^2y^3}{xy^2 - x^3y^3}\right)$$

Para calcular f_y debe recordarse que la variable "x" se comporta como constante.

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x^2y} - \frac{2xy - 3x^3y^2}{xy^2 - x^3y^3}\right)$$

2.8) Sea la función: $h(x, y) = \ln\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

Obtener $\left.\dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}\right|_{P(2,1)}$

Resolución:

Se tiene una derivada parcial mixta, lo que significa:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \leftarrow$$ Se lee: derivada parcial segunda de la función "h", primera respecto a "x", segunda respecto a "y".

Antes de empezar a derivar, es conveniente simplificar la función aplicando propiedades de la función logaritmo natural.

$$h(x,\, y) = \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

$$h(x,\, y) = \frac{1}{2}\left[\ln(x-y) - \ln(x+y)\right]$$

Tiene una forma más sencilla la función, por lo que puede calcularse la primera derivada parcial

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right]$$

Antes de obtener la segunda derivada parcial, se puede escribir:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[(x-y)^{-1} - (x+y)^{-1}\right]$$

Es decir, se aplicaron propiedades de exponentes, de manera que se facilite la siguiente derivada:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x-y)^{-1} - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(-1)(x-y)^{-2}(-1)-(-1)(x+y)^{-2}(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-y)^{-2}+(x+y)^{-2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]$$

Finalmente, se evalúa en el punto $P(2,1)$

$$\left.\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}\right|_{P(2,\ 1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2-1)^2}+\frac{1}{(2+1)^2}\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}\right|_{P(2,\ 1)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

2.9) Obtener todas las derivadas parciales de segundo orden de la siguiente función:

$$f(x,\,y)=x^2-y^2+x^2y^2$$

Resolución:

Para obtener las derivadas parciales segundas, es necesario calcular inicialmente las derivadas parciales primeras, por lo que las derivadas a obtener son: $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}, f_{xx}$ y f_{yy}

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x + 2xy^2 \\ f_y &= -2y + 2x^2 y \end{aligned}\right\} \quad \text{Parciales primeras}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 2 + 2y^2 \\ f_{yy} &= -2 + 2x^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Parciales segundas}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= 4xy \\ f_{yx} &= 4xy \end{aligned}\right\} \quad \text{Parciales mixtas}$$

2.10) Obtener todas las derivadas parciales de segundo orden de la siguiente función:

$$f(x, y) = xy^2 + \cos x + x \operatorname{sen} y$$

Resolución:

Para obtener las derivadas parciales segundas, es necesario calcular inicialmente las derivadas parciales primeras, por lo que las derivadas a obtener son: $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}, f_{xx}$ y f_{yy}

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y^2 - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \\ f_y &= 2xy + x\cos y \end{aligned}\right\} \quad \text{Parciales primeras}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= -\cos x \\ f_{yy} &= 2x - x \operatorname{sen} y \end{aligned}\right\} \quad \text{Parciales segundas}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= 2y+\cos y \\ f_{yx} &= 2y+\cos y \end{aligned}\right\} \quad \text{Parciales mixtas}$$

2.11) Verificar que se cumple $T_{xy}=T_{yx}$ para la siguiente función:

$$T(x,y)=e^{y}+y\ln x+x\ln y$$

Resolución:

Se obtienen las derivadas parciales necesarias:

$$T_x=\frac{y}{x}+\ln y$$

$$T_{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$T_y=e^{y}+\ln x+\frac{x}{y}$$

$$T_{yx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

De los resultados obtenidos se concluye que:

$$T_{xy}=T_{yx}$$

2.12) Verificar que se cumple $T_{xy}=T_{yx}$ para la siguiente función:

$$T(x,y)=3xy^{2}-2x^{2}y^{3}-x^{4}y^{3}$$

Resolución:

Se obtienen las derivadas parciales necesarias:

$$T_x = 3y^2 - 4xy^3 - 4x^3y^3$$

$$T_{xy} = 6y - 12xy^2 - 12x^3y^2$$

$$T_y = 6xy - 6x^2y^2 - 3x^4y^2$$

$$T_{yx} = 6y - 12xy^2 - 12x^3y^2$$

De los resultados obtenidos se concluye:

$$T_{xy} = T_{yx}$$

2.13) Demostrar que la función

$$f(x, y, z) = e^{4x+3y}\,\text{sen}(5z)$$

satisface la ecuación tridimensional de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Resolución:

Como se muestra en la ecuación de Laplace, se requiere calcular las derivadas parciales de primer orden y, posteriormente, obtener las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4e^{4x+3y}\,\text{sen}(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 16e^{4x+3y}\,\text{sen}(5z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{4x+3y}\,\text{sen}(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9\, e^{4x+3y} \operatorname{sen}\left(5z\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{4x+3y}\, 5 \cos\left(5z\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{4x+3y} \left(-25 \operatorname{sen}\left(5z\right)\right)$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace

$$16\, e^{4x+3y} \operatorname{sen}\left(5z\right) + 9\, e^{4x+3y} \operatorname{sen}\left(5z\right) - 25\, e^{4x+3y} \operatorname{sen}\left(5z\right) = 0$$

$$0 = 0$$

Con lo que se demuestra que se satisface la ecuación de Laplace.

3. Derivación implícita y regla de la cadena

3.1) Utilizar diferenciación implícita para obtener el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el punto $P(1,-1,-1)$ de la ecuación $xy+z^3x-2yz=0$, si z es una función de las variables x y y, y las derivadas parciales existen.

Resolución:

Es posible realizar este proceso de dos maneras, las cuales se mostrarán enseguida:

a) Se aplica el operador derivada parcial en cada uno de los términos de la ecuación, después se efectúan operaciones. Finalmente, se despeja la derivada parcial de interés.

Sea $z=f(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial x}(z^3x)-2\frac{\partial}{\partial x}(yz)=0$$

$$y+z^3(1)+x\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-2y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3xz^2-2y)=-y-z^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{(y+z^3)}{3xz^2-2y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=-\frac{(-1-1)}{3(1)(1)-2(-1)}=\frac{2}{3+2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = \frac{2}{5}$$

b) Se utiliza la expresión

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

donde $F(x, y, z) = xy + z^3x - 2yz$

$$F_x = y + z^3$$

$$F_z = 3xz^2 - 2y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y + z^3}{3xz^2 - 2y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = \frac{2}{5}$$

Como se puede observar, las dos formas mostradas llevan al mismo resultado.

3.2) Derivar implícitamente para obtener las derivadas parciales primeras de w: $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$ si se tiene $x^2yz + xz^2w - y^2zw + w^2 = 3$

Resolución:

Generalizando la forma empleada en el ejercicio 3.1b, se debe calcular:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z, w)}{F_w(x, y, z, w)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z, w)}{F_w(x, y, z, w)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{F_z(x, y, z, w)}{F_w(x, y, z, w)}$$

donde $F(x, y, z, w) = x^2yz + xz^2w - y^2zw + w^3 - 3$

$$F_x = 2xyz + z^2w$$

$$F_y = x^2z - 2yzw$$

$$F_z = x^2y + 2xzw - y^2w$$

$$F_w = xz^2 - y^2z + 3w^2$$

De donde se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2xyz + z^2w}{xz^2 - yz^2 + 3w^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x^2z - 2yzw}{xz^2 - yz^2 + 3w^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x^2y + 2xzw - y^2w}{xz^2 - y^2z + 3w^2}$$

CONTENIDO
1
2
3
4

3.3) Usar la regla de la cadena para encontrar dT/dt, de la función $T(x,y)=xy$, a lo largo de la trayectoria $x=\operatorname{sen} t$, $y=\cos t$ en el punto en el que $t=\pi$.

Resolución:

Para resolver este ejercicio, debe considerarse que se tiene un caso particular de la regla de la cadena.

$$T=T(x,y), \qquad x=x(t), \qquad y=y(t)$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Se calculan las derivadas (parciales y ordinarias) indicadas:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=y \qquad ; \qquad \frac{\partial T}{\partial y}=x$$

$$\frac{dx}{dt}=\cos t \qquad ; \qquad \frac{dy}{dt}=-\operatorname{sen} t$$

Realizando la sustitución correspondiente se tiene:

$$\frac{dT}{dt}=y\cos t-x\operatorname{sen} t$$

$$\frac{dT}{dt}=(\cos t)(\cos t)-(\operatorname{sen} t)\,(\operatorname{sen} t)$$

$$\frac{dT}{dt}=\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t$$

Evaluando en $t=\pi$:

$$\frac{dT}{dt}=(\cos\pi)^2-(\operatorname{sen}\pi)^2$$

$$\frac{dT}{dt}=1$$

3.4) Expresar $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ como funciones de r y θ usando la regla de la cadena. También expresar z directamente en términos de r y θ antes de diferenciar. Considerar las funciones siguientes:

$$z=2e^y\ln x, \qquad x=r\operatorname{sen}\theta, \qquad y=\ln(r\cos\theta)$$

Resolución:

a) Empleando la regla de la cadena:

$$z=f(x,y), \quad x=g(r,\theta), \quad y=h(r,\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

Se calculan las derivadas parciales indicadas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^y\cdot\frac{1}{x} \qquad ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2e^y\ln x$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta \qquad ; \qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\cos\theta}{r\cos\theta}=\frac{1}{r}$$

Entonces, al sustituir las derivadas y las funciones $x = r\,\text{sen}\,\theta$, $y = \ln(r\cos\theta)$ se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{2e^{\ln(r\cos\theta)}}{r\,\text{sen}\,\theta} \cdot \text{sen}\,\theta + 2e^{\ln(r\cos\theta)} \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right) \cdot \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{2\,r\cos\theta}{r} + 2\,r\cos\theta \cdot \frac{1}{r} \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2\cos\theta + 2\cos\theta \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right)$$

b) Expresando z en términos de r y θ antes de diferenciar:

$$z = 2\,e^{\ln(r\cos\theta)} \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$z = 2\,r\cos\theta \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2\,r\cos\theta \cdot \frac{\text{sen}\,\theta}{r\,\text{sen}\,\theta} + \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right)\left(2\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2\cos\theta + 2\cos\theta \ln\left(r\,\text{sen}\,\theta\right)$$

Como era de esperarse, los resultados son iguales.

De manera similar se obtendrá $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

a) Empleando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Se calculan las derivadas parciales adicionales necesarias:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=r\cos\theta\ ; \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{-r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta}=-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{2e^{y}}{x}\cdot r\cos\theta+2e^{y}\ln(x)\cdot\frac{-r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta}$$

Sustituyendo las funciones $x=r\operatorname{sen}\theta$, $y=\ln(r\cos\theta)$ se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{2e^{\ln(r\cos\theta)}}{r\operatorname{sen}\theta}\cdot r\cos\theta-2e^{\ln(r\cos\theta)}\ln(r\operatorname{sen}\theta)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{2r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}r\cos\theta-2r\cos\theta\ln(r\operatorname{sen}\theta)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{2r\cos^{2}\theta}{\operatorname{sen}\theta}-2r\operatorname{sen}\theta\ln(r\operatorname{sen}\theta)$$

b) Ahora, expresando z en términos de r y θ antes de diferenciar:

$$z=2r\cos\theta\ln(r\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=(2r\cos\theta)\frac{r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}+\ln(r\operatorname{sen}\theta)\cdot(-2r\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=2r\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}-2r\operatorname{sen}\theta\ln\left(r\operatorname{sen}\theta\right)$$

Se obtiene el mismo resultado.

4. Gradiente, derivada direccional, plano tangente y recta normal

4.1) Encontrar el gradiente de la función $f(x, y)=y-x$ en el punto $P(1, 2)$. Posteriormente, trazarlo junto a la curva de nivel que pasa por el punto P.

Resolución:

Primeramente, se realiza el cálculo del gradiente de f:

$$\overline{\nabla} f=f_x i+f_y j$$

$$\overline{\nabla} f=-i+j$$

Evaluando en el punto P:

$$\overline{\nabla} f\Big|_P=-i+j$$

Para realizar el trazado, se debe tener presente que en todo punto (x_0, y_0) en el dominio de $f(x, y)$, el gradiente de f es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0). Esta observación permite encontrar ecuaciones para rectas tangentes a las curvas de nivel. Son las rectas normales a los gradientes. Así, la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$, normal a un vector $\overline{N}=\overline{A}i+\overline{B}j$ tiene la ecuación:

CONTENIDO

1

2

3

4

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Si $\overline{N}$ es el gradiente $\overline{\nabla}f\big|_{P_0}=f_x\big|_{P_0}i+f_y\big|_{P_0}j$, entonces

$$f_x\big|_{P_0}(x-x_0)+f_y\big|_{P_0}(y-y_0)=0$$

Para el ejemplo en cuestión, se tiene:

$$A=-1\ , \qquad B=1$$

Por lo que la ecuación de la recta que representa a la curva de nivel y que es normal al gradiente es:

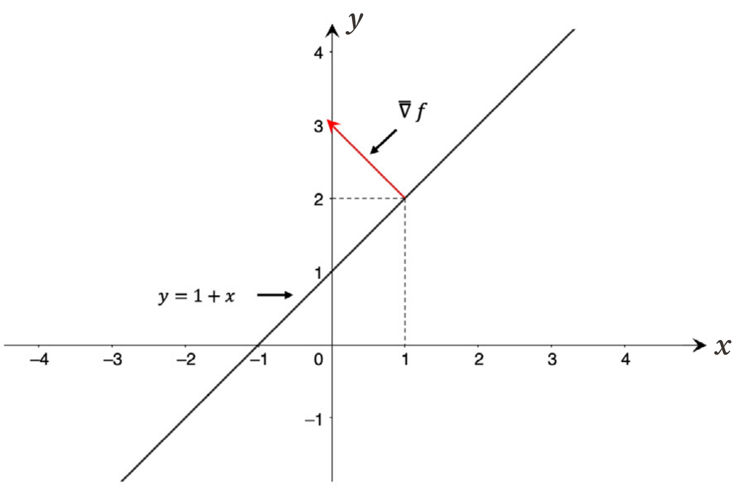
$$-1(x-1)+1(y-2)=0$$

$$-x+1+y-2=0$$

$$y-x=1$$

$$y=1+x$$

La gráfica correspondiente se muestra enseguida:



4.2) Obtener el gradiente de la función:

$$f(x,y)=x\,e^{y}+x^{2}y^{2}-ye^{x}$$

en el punto (–1, –1).

Resolución:

El gradiente se calcula a partir de la expresión:

$$\overline{\nabla} f=f_x i+f_y j$$

Calculando las derivadas parciales:

$$f_x=e^{y}+2xy^{2}-ye^{x}$$

$$f_y=xe^{y}+2x^{2}y-e^{x}$$

Se evalúa en $(-1,-1)$:

$$f_x\big|_{(-1,-1)}=e^{-1}+2(-1)(-1)^{2}-(-1)e^{-1}$$

$$f_x\big|_{(-1,-1)}=e^{-1}-2+e^{-1}=2e^{-1}-2=2\left(e^{-1}-1\right)$$

$$f_y\big|_{(-1,-1)}=(-1)e^{-1}+2(-1)^{2}(-1)-e^{-1}$$

$$f_y\big|_{(-1,-1)}=-e^{-1}-2-e^{-1}=-2e^{-1}-2=-2\left(e^{-1}+1\right)$$

Finalmente,

$$\overline{\nabla} f=2\left(e^{-1}-1\right)i-2\left(e^{-1}+1\right)j$$

4.3) Obtener el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + x\ln(z)$$

en el punto $P(1, 1, 1)$.

Resolución:

Para el caso de una función de tres variables, el cálculo del gradiente está dado por la expresión

$$\overline{\nabla} f = f_x i + f_y j + f_z k$$

Se calculan las derivadas parciales:

$$f_x = -4x + \ln z$$

$$f_y = 2y$$

$$f_z = 2z + x \cdot \frac{1}{z}$$

Enseguida se evalúan en el punto P:

$$f_x\big|_P = -4(1) + \ln(1) = -4$$

$$f_y\big|_P = 2(1) = 2$$

$$f_z\big|_P = 2(1) + 1 = 3$$

Por lo que el gradiente de f en el punto P es:

$$\overline{\nabla} f = -4i + 2j + 3k$$

4.4) Obtener el gradiente de la función

$$f(x, y) = e^{x+y} \cos x + \operatorname{sen}(x+y)$$

en el punto $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Resolución:

El gradiente de la función se calcula con la expresión:

$$\overline{\nabla} f = f_x i + f_y j$$

Lo que implica la obtención de las derivadas parciales

$$f_x = e^{x+y}(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)\, e^{x+y} + \cos(x+y)$$

$$f_x = -e^{x+y} \operatorname{sen} x + e^{x+y} \cos x + \cos(x+y)$$

$$f_y = e^{x+y} \cos x + \cos(x+y)$$

Se evalúa en el punto $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$f_x\big|_P = \left(-e^{0+\frac{\pi}{2}}\right) \operatorname{sen}(0) + \left(e^{0+\frac{\pi}{2}}\right) \cos(0) + \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_x\big|_P = 0 + e^{\frac{\pi}{2}} + 0 = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$f_y\big|_P = \left(e^{0+\frac{\pi}{2}}\right) \cos(0) + \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_y\big|_P = e^{\frac{\pi}{2}} + 0 = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Finalmente,

$$\overline{\nabla} f = e^{\frac{\pi}{2}}\, i + e^{\frac{\pi}{2}}\, j$$

4.5) Obtener la dirección en que $f(x, y) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{3}$:

a) Crece más rápidamente en $P(1, 1)$.

b) Decrece más rápidamente en $P(1, 1)$.

c) ¿Cuáles son las direcciones de cambio nulo de f en $P(1, 1)$?

Resolución:

a) La función crece más rápidamente en la dirección del gradiente de f en $P(1, 1)$, por lo que inicialmente se calcula $\overline{\nabla} f$.

$$\overline{\nabla} f = f_x i + f_y j$$

$$\overline{\nabla} f = \frac{2}{3} x i + \frac{2}{3} y j$$

$$\overline{\nabla} f\big|_P = \frac{2}{3} i + \frac{2}{3} j$$

Un vector unitario que lleva la dirección de $\overline{\nabla} f$ es

$$\overline{u} = \frac{\frac{2}{3} i + \frac{2}{3} j}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{3} i + \frac{2}{3} j}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}}}$$

$$\overline{u}=\frac{\frac{2}{3}\,i+\frac{2}{3}\,j}{\sqrt{\frac{8}{9}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{8}}{3}}\left(\frac{2}{3}\,i+\frac{2}{3}\,j\right)$$

$$\overline{u}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\,i+\frac{2}{3}\,j\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,i+\frac{1}{\sqrt{2}}\,j$$

b) La función decrece más rápidamente en la dirección de $-\overline{\nabla}f$ en $P(1,1)$. Entonces, un vector unitario que lleve esta dirección es:

$$-\overline{u}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,i-\frac{1}{\sqrt{2}}\,j$$

c) Cualquier dirección $\overline{u}$ ortogonal al gradiente es una dirección de cambio nulo de f, es decir:

$$\overline{u}\cdot\overline{\nabla}f=0$$

Por lo que las direcciones buscadas son

$$\overline{n}_1=\frac{2}{3}\,i-\frac{2}{3}\,j$$

$$\overline{n}_2=-\frac{2}{3}\,i+\frac{2}{3}\,j$$

5. Ejercicios propuestos

5.1) Sea la función $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

Obtener su dominio y recorrido.

Respuesta:

$D_f=\{(x, y)/1 \geq x^2+y^2 \ ; x, y \in \mathbb{R}\}$

$R_f=\{z/0 \leq z \leq 1\}$

5.2) Sea la función $z=\frac{1}{7}\left(14-x^2-y^2\right)$

a) Obtener el dominio de la función.

b) Determinar las ecuaciones de las curvas de nivel de la función para $z=-1$ y $z=2$

Respuesta:

a) $D_f=\{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$

b) Para $z=-1 : x^2+y^2=21$ representa una circunferencia

$C(0, 0), r=\sqrt{21}$

Para $z=2 : x^2+y^2=0$ representa un punto $P(0, 0)$

5.3) Calcular el incremento aproximado del volumen de un cilindro circular recto, si su altura aumenta de 10 cm a 10.5 cm y su radio aumenta de 5 cm a 5.3 cm. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?

Respuesta:

Incremento aproximado $\Delta V \approx dV = 133.517\,\text{cm}^3$

El nuevo volumen aproximado $V = 918.915\,\text{cm}^3$

5.4) Dada la función $f(r,s) = \ln(rs)^{rs}$, calcular $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}\right|_{P\left(\frac{1}{e^3},\,1\right)}$

Respuesta: $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}\right|_{P} = -1$

5.5) La temperatura en cualquier punto en una región del espacio está dada por la función $W(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$

Calcular la variación de la temperatura en el punto $P(2,\,2,\,1)$ en la dirección del punto P al origen.

Respuesta: $D_{\overline{u}}W = 6\,e^{-9}$

5.6) Dada la función $f(x,y) = x^3 - y^3$, obtener un vector que indique la dirección en la cual la función disminuye más rápidamente en el punto $(2,-2)$. Obtener también la razón de cambio mínima.

Respuesta:

La dirección referida es $-\overline{\nabla}f\left(2,-2\right)=-12\,i+12\,j$

La razón de cambio mínima $\dfrac{df}{ds_{min}}=-16.97$

5.7) Obtener la derivada direccional de la función $f\left(x,\,y,\,z\right)=xyz$ en el punto $P_0\left(-1,\,1,-2\right)$, en la dirección de un vector perpendicular a los vectores $\overline{a}=-i+2j-3k$ y $\overline{b}=-2i-j+k$

Respuesta: $D_{\overline{u}}f=\dfrac{11}{5\sqrt{3}}$

5.8) Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de ecuación

$$xy+y^2z-z^3=1$$

en el punto (1, –2, 1)

Respuesta: $2x+3y-z+5=0$

5.9) Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x,\,y,\,z\right)=x^2+2\,yxz-yz^2$ en el punto $\left(1,\,1,\,2\right)$ y en la dirección de la recta cuyas ecuaciones simétricas son: $\dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z-3}{-3}$

Respuesta: $D_{\overline{u}}f=\dfrac{9}{7}\sqrt{14}$

5.10) Obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z=x^2y+e^{x^2+y^2}$ en el punto en que $z(1,1)=1+e^2$

Respuesta:

$(2+2e^2)x+(1+2e^2)y-z-3e^2-2=0$ Ecuación del plano tangente

$\dfrac{x-1}{2+2e^2}=\dfrac{y-1}{1+2e^2}=\dfrac{z-(1+e^2)}{-1}$ Ecuación de la recta normal

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuaderno de ejercicios de Cálculo Integral
Se publicó la primera edición electrónica de un ejemplar (2.5 MB) en formato PDF en noviembre de 2024, en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Source Serif Pro para texto, Sienna Math Pro para fórmulas y Rubik para titulares.