

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL



Serie de Calidad y Estadística Industrial

Control estadístico de calidad de procesos

OCTAVIO ESTRADA CASTILLO

Para visualizar la obra
te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

ESTRADA CASTILLO, Octavio
SERIE DE CALIDAD Y ESTADÍSTICA INDUSTRIAL
Control estadístico de calidad de procesos
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería, 2025, 251 págs.

ISBN: 978-607-642-083-6

CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD DE PROCESOS

Primera edición electrónica de un ejemplar (14 MB) en formato PDF
Publicado en línea: en noviembre de 2025

D.R. © 2025, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Avenida Universidad núm. 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma
de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán,
México, Ciudad de México, Código Postal 04510.

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

ISBN: 978-607-642-083-6

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuidado de la edición: Patricia Eugenia García Naranjo
Diseño editorial : Luis Enrique Vite Rangel

“Cuando puede usted medir aquello de lo que está hablando, y expresarlo en números, usted sabe algo de ello; pero cuando no lo puede medir, cuando no lo puede expresar en números, su conocimiento es de carácter pobre e insatisfactorio; puede ser el principio del conocimiento, pero, en sus pensamientos, usted ha avanzado escasamente hacia el escenario de la ciencia”.

Lord Kelvin

PRÓLOGO

Desde 1988 he estado inmerso en la práctica profesional de la Ingeniería, particularmente, en la industria manufacturera y en específico en el área de Calidad y Estadística Industrial. Paralelamente, he hecho una trayectoria académica como profesor en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, desde hace más de 43 años. He impartido más de 25 asignaturas diferentes de matemáticas, física, computación, probabilidad, estadística, investigación de operaciones y calidad. Me ha tocado laborar en el sector público federal también. Desde hace más de 30 años que soy auditor certificado de sistemas de calidad, a través de ISO 9001 y me ha tocado evaluar a 134 empresas proveedoras del sector metal mecánico y eléctrico.

Siempre había tenido la inquietud de escribir textos sobre las asignaturas en las que he participado, pero generalmente he tenido cargos académico-administrativos en la administración central de la UNAM o en la propia Facultad, que no me dejaban dedicarme a esta noble y gratificante labor. Desde hace cinco años que me integré completamente como profesor de carrera en el área de calidad, investigación de operaciones y estadística industrial, he llevado a la praxis este deseo.

Este es el sexto libro de la Serie de Calidad y Estadística Industrial, la cual tendrá al menos los siguientes volúmenes:

- I. Desarrollo Histórico de la Calidad.
- II. Metodología y Herramientas para la Solución de Problemas y para la Mejora Continua.
- III. Fundamentos de Probabilidad y Aplicaciones con Excel, Minitab y R.
- IV. Fundamentos de Estadística y Aplicaciones con Excel, Minitab y R.
- V. Muestreo de Aceptación con Excel, Minitab y R.
- VI. Control Estadístico de Calidad de Procesos con Excel, Minitab y R.

- VII. Normatividad Vigente sobre Sistemas de Calidad.
- VIII. Metrología, Certificación de Producto y Certificación de Software.
- IX. Teoría del Muestreo.
- X. Estadística No Paramétrica.
- XI. Diseño de Experimentos.
- XII. Regresión y Correlación.
- XIII. Confiabilidad.
- XIV. Estadística Multivariable.
- XV. Procesos Estocásticos.

El propósito de estos volúmenes es proporcionar la teoría necesaria, la metodología, las herramientas, ejemplos y aplicaciones prácticas de cada uno de los temas, de una manera formal, dinámica, amena y didáctica, utilizando para ello Excel, Minitab y R.

Quisiera remarcar que en estos libros hablo de mis conocimientos y experiencia en el apasionante tema de la calidad y que traté de apegarme lo más posible a citar a los autores originales de estas ideas, pero no debe olvidarse que se trata de un texto dirigido a alumnos por lo cual no lleno de citas el texto, para hacerlo más didáctico.



Objetivo del libro:

El objetivo de este libro es que el lector aprenda a diseñar, desarrollar, implantar y evaluar sistemas de control estadístico de procesos por medio del uso de diagramas de control, y aplicarlos en problemas prácticos de Ingeniería; asimismo, analizar la eficiencia y eficacia del control de procesos desde un punto de vista estadístico, utilizando para ello el software de R, Minitab y Excel.

ÍNDICE

| | |
|--|-----|
| Prólogo. | IV |
| Objetivo del libro. | V |
| Índice Temático. | VI |
| Capítulo 1. Variabilidad de Procesos | 1 |
| Capítulo 2. Metodología para la aplicación del control estadístico de calidad de procesos | 4 |
| Capítulo 3. Diagramas de control estadístico de calidad de procesos que se utilizarán | 15 |
| Capítulo 4. Distribución de probabilidad normal. | 18 |
| 4.1. Teorema de aditividad de la distribución normal | 24 |
| 4.2. Teorema del límite central | 26 |
| Capítulo 5. Modelos probabilísticos discretos, continuos y muestrales . . . | 30 |
| Capítulo 6. Intervalos de confianza | 40 |
| Capítulo 7. Análisis de capacidad o habilidad de proceso | 42 |
| Capítulo 8. Pruebas de hipótesis sobre normalidad de un conjunto de datos | 60 |
| Capítulo 9. Diagramas de precontrol | 73 |
| Capítulo 10. Interpretación de un diagrama de control. | 82 |
| Capítulo 11. Diagramas de control por atributos | 89 |
| Capítulo 12. Diagramas de control de fracción defectuosa tipo “p” y diagramas de control de productos defectuosos tipo “np” | 91 |
| 12.1. Curva característica de operación para un diagrama tipo “p” o “np” | 118 |

| | |
|---|-----|
| Capítulo 13. Diagramas de control de defectos tipo “c” y diagramas de control de fracción defectuosa tipo “u”. | 120 |
| 13.1. Curva característica de operación para diagramas tipo “c” y “u”. | 135 |
| Capítulo 14. Diagramas de control por atributos de deméritos por unidad | 137 |
| Capítulo 15. Diagramas de control por variables “ \bar{X} -R” y “ \bar{X} -S” | 142 |
| 15.1. Fundamentación probabilística de los diagramas de control estadístico por variables “ \bar{X} -R” y “ \bar{X} -S” | 142 |
| Capítulo 16. Otro tipo de diagramas de control estadístico de calidad de procesos | 203 |
| 16.1. Diagrama de varianza S ² | 204 |
| 16.2. Diagrama de lecturas individuales y de rangos móviles. | 208 |
| 16.3. Diagrama de sumas acumuladas CUSUM | 215 |
| 16.4. Diagrama de medias móviles exponencialmente ponderadas EWMA | 225 |
| 16.5. Diagramas de control estadístico de la calidad tipo “g” y tipo “h” | 229 |
| PROBLEMAS PROPUESTOS | 236 |
| BIBLIOGRAFÍA | 250 |

En cualquier proceso de fabricación, sin importar su buen diseño o mantenimiento cuidadoso, siempre existirá cierto grado de variabilidad inherente o natural. Esta variabilidad natural o “ruido de fondo” es el efecto acumulativo de muchas pequeñas causas, esencialmente incontrolables. Para Genichi Taguchi ⁽⁹⁾, los factores indeseables e incontrolables que causan que las características funcionales de los productos se desvíen de su valor objetivo se denominan ruido. Cuando el ruido de fondo de un proceso es relativamente pequeño, suele considerarse un nivel aceptable del funcionamiento del proceso. En el marco del control estadístico de procesos, esta variabilidad natural se llama a menudo sistema estable de causas fortuitas. Un proceso que funciona con solo causas fortuitas de variabilidad se considera bajo control.

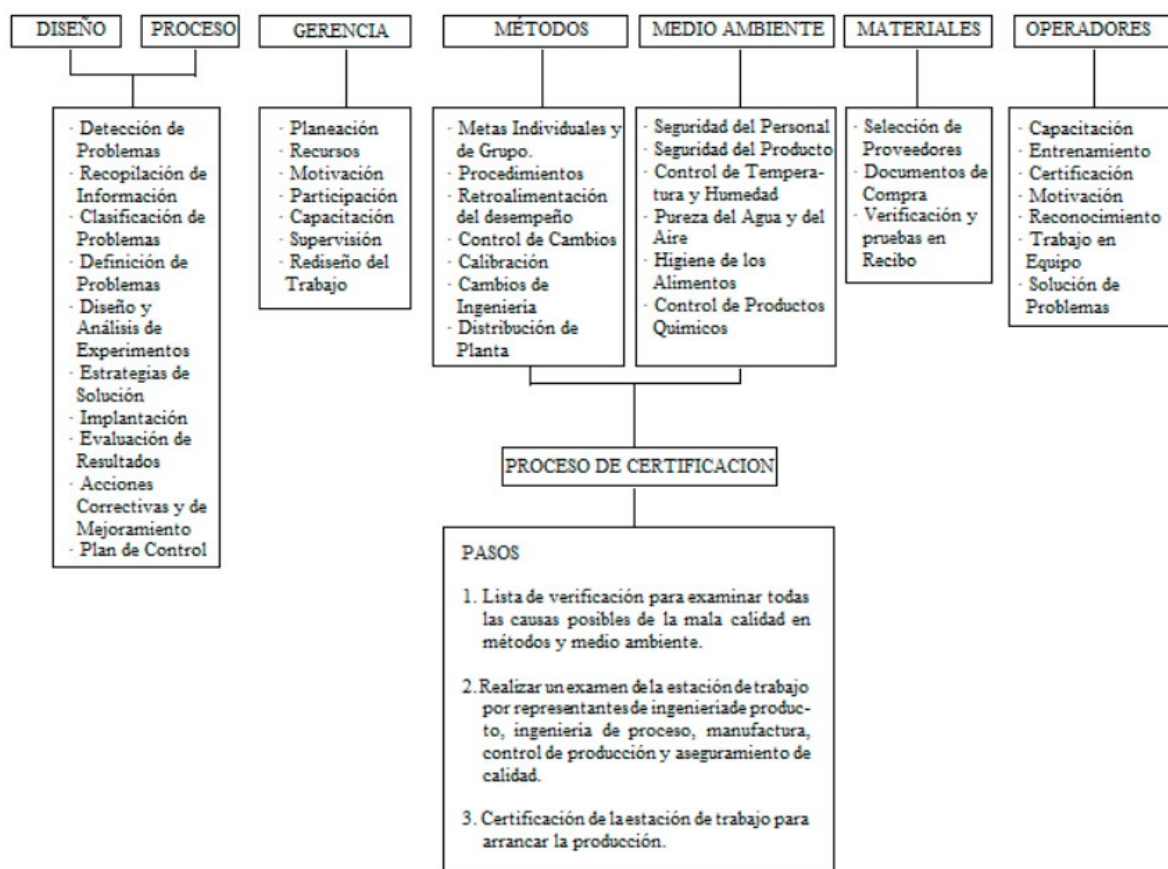
Otros tipos de variabilidad pueden estar presentes ocasionalmente en el resultado de un proceso. Esta variabilidad en características clave es en general mayor que el ruido de fondo y normalmente representa un nivel inaceptable del funcionamiento del proceso. Estas fuentes de variabilidad que no forman parte del esquema de las causas fortuitas se denominan causas atribuibles o asignables. Un proceso que funciona en presencia de causas atribuibles se considera fuera de control.

Uno de los objetivos más importantes del control estadístico de procesos es detectar, de preferencia rápidamente, la ocurrencia de causas atribuibles o cambios en el proceso, a fin de que se pueda investigar la causa raíz y tomar acciones correctivas antes de la producción de muchos artículos o servicios no conformes.

La variabilidad o ruido en características clave de calidad surge de muchas fuentes como se puede apreciar en la figura 1. En esta figura, los títulos representan fuentes de variación y en la parte inferior se citan elementos para reducir dicha variación.

Un diagrama estadístico de control de calidad de procesos es un método estadístico utilizado principalmente para el estudio y control de los procesos repetitivos o rutinarios. Su creador, el Dr. Walter A. Shewhart (Estrada, 2023), sugirió que el diagrama de control puede ser utilizado, en primer lugar, para definir la meta o el estándar de una característica de calidad de un proceso; en segundo lugar, puede ser utilizado como instrumento para alcanzar dicha meta; y, en tercer lugar, puede servir como procedimiento para juzgar si la meta fue alcanzada.

Figura 1. Causas y control de la variabilidad de procesos



En la Tabla 1 se muestran las principales técnicas utilizadas para el control estadístico de calidad de procesos y para la mejora continua. Como se puede apreciar, existe el Control Estático de Calidad que se refiere a las técnicas de muestreo de aceptación analizadas en el libro de Estrada (2023). El tema que nos ocupa en esta obra, se refiere al Control Dinámico de Calidad que se enfoca principalmente al Control Estadístico de Calidad de Procesos a través de Diagramas de Control Estadístico. La diferencia entre el Muestreo de Aceptación y los Diagramas de Control Estadístico, por similitud, es la misma que entre una fotografía y una especie de video, en que la forma de darle animación, como en las caricaturas antiguas a diferentes imágenes, era mostrarlas una tras otra secuencialmente a cierta velocidad. En una fotografía se muestra el estado que guardaba una imagen en cierto instante de tiempo; en cambio, si se toma un conjunto de fotografías ordenadas con respecto al tiempo y se muestran secuencialmente a determinada velocidad, se podrá apreciar el estado que guardaba esa imagen a lo largo de un período de tiempo y cómo fue cambiando o si permaneció igual.

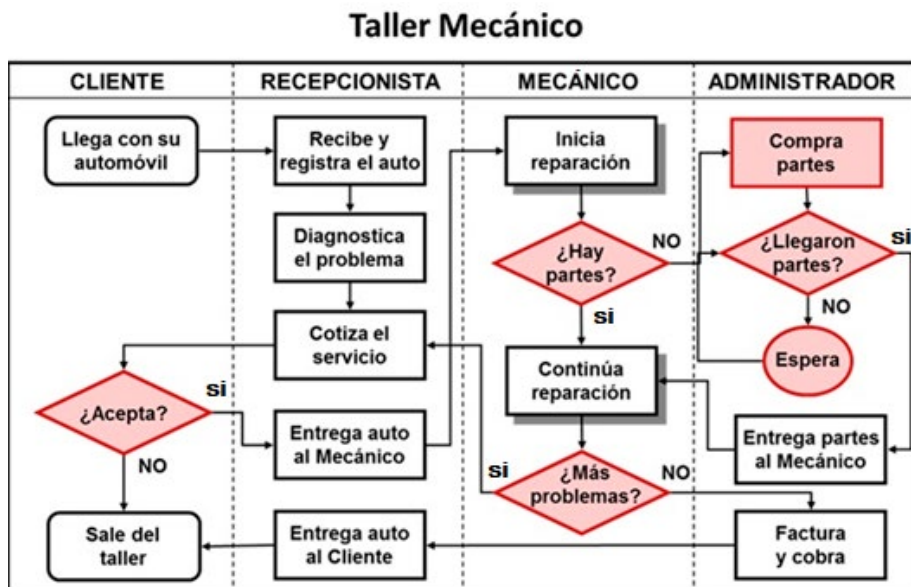
Tabla 1. Herramientas y Técnicas utilizadas para la solución de problemas en procesos productivos

| | | |
|-----------------------------|---|--|
| CONTROL ESTÁTICO DE CALIDAD | INSPECCIÓN POR ATRIBUTOS | TABLAS NOM Z12 (MIL STD 105D) TABLAS DODGE-ROMIG TABLAS PHILLIPS PLANES DE MUESTREO CONTINUO (DODGE-TORREY, ETC) |
| | INSPECCIÓN POR VARIABLES | TABLAS NOM Z14 |
| CONTROL DINÁMICO DE CALIDAD | ANÁLISIS DE DESVIACIONES | HOJAS DE VERIFICACIÓN ESTRATIFICACIÓN DIAGRAMA DE PARETO DIAGRAMA CAUSA-EFECTO DE ISHIKAWA DIAGRAMAS DE DISPERSION HISTOGRAMAS Y DISTRIBUCIONES DIAGRAMAS DE AFINIDAD DIAGRAMAS DE RELACIONES DIAGRAMAS SISTEMÁTICOS DIAGRAMAS DE MATRIZ DIAGRAMAS DE FLECHAS DESPLIEGUE DE LA FUNCIÓN DE CALIDAD |
| | GRÁFICAS DE CONTROL POR VARIABLES | GRÁFICAS DE MEDIAS Y DESVIACIONES ESTÁNDAR \bar{x} σ GRÁFICAS DE MEDIAS Y RANGOS \bar{x} R GRÁFICAS DE RANGOS MÓVILES R_M GRÁFICAS POR LECTURAS INDIVIDUALES GRÁFICAS DE PRECONTROL GRÁFICAS CUSUM |
| | GRÁFICAS DE CONTROL POR ATRIBUTOS | GRÁFICAS DE NÚMERO DE DEFECTUOSOS np GRÁFICAS DE FRACCIÓN DEFECTUOSA p GRÁFICAS DE NÚMERO DE DEFECTOS POR UNIDAD c GRÁFICAS DE DEFECTOS POR UNIDAD u GRÁFICAS DE DEMERITOS POR UNIDAD Du |
| PRUEBAS DE CONFIABILIDAD | ANÁLISIS DEL MODO Y EFECTO DE LA FALLA PRUEBAS DE VIDA INFORMES DE FALLA EN CAMPO DISEÑO DE EXPERIMENTOS | |

El primer paso para adoptar un enfoque basado en procesos en una organización, en el ámbito de un sistema de gestión de calidad, es precisamente reflexionar sobre cuáles son los procesos que deben configurar el sistema, es decir, qué procesos deben aparecer en la estructura de procesos del sistema; es necesario recordar que los procesos ya existen dentro de una organización, de manera que el esfuerzo se debería centrar en identificarlos y gestionarlos apropiadamente. Habría que plantearse, por tanto, cuáles de los procesos son lo suficientemente significativos como para que deban formar parte de la estructura de procesos y en qué nivel de detalle. La identificación y selección de los procesos que formarán parte de la estructura de procesos no debe ser algo trivial, y debe nacer de una reflexión acerca de las actividades que se desarrollan en la organización y de cómo estas influyen y se orientan hacia la consecución de los resultados.

- Una vez efectuada la identificación y la selección de los procesos, surge la necesidad de definir y reflejar la estructura de procesos de forma que facilite la determinación e interpretación de las interrelaciones existentes entre los mismos. La manera más representativa de reflejar los procesos identificados y sus interrelaciones es precisamente a través de la elaboración de un mapa de procesos, que es la representación gráfica de su estructura el cual conforma el sistema de gestión, y que se ilustra como ejemplo en la figura 3.

Figura 3. Ejemplo de Mapa de Proceso en un Taller Mecánico



El objetivo de mapear o diagramar es mostrar gráficamente, por medio de símbolos, cuáles son las actividades que se llevan a cabo dentro de una organización o un proceso, de tal manera que todo aquel que lo analice sea capaz de comprender el alcance y/o llevar a cabo el proceso.

En un diagrama los objetos se unen con líneas y flechas que muestran el flujo y orden del procedimiento o proceso, estas flechas indican las interacciones con las cuales se identifica quién entrega (proveedor) y quién recibe (cliente), además se requiere colocar mensajes o leyendas para identificar los insumos (entradas) y productos (salidas) de cada proceso o subproceso.

Para elaborar un mapa de proceso se requiere contar con una metodología estandarizada a nivel internacional, nacional, o a nivel de cada empresa. En la figura 4 se ilustra un ejemplo de dicha secuencia de pasos a seguir para mapear un proceso.

Figura 4. Ejemplo de metodología para mapear un proceso



Fuente: Recuperado de Mario Briño, 2013. <https://es.slideshare.net/mabrieno/mapeo-de-procesos-curso-3>

¿Quiénes participan en la diagramación o mapeo de un proceso?

Los expertos del proceso, la gente que lleva a cabo el trabajo, con el apoyo de un asesor o coordinador que tenga conocimientos y experiencia en el mapeo de procesos. Los expertos citados antes deben ser personas que trabajan en el proceso con el conocimiento y experiencia de los siguientes factores: a) actividades; b) insumos y productos; c) proveedores y clientes, d) puntos finos y trucos del proceso. Es importante que se mezclen habilidades, edades, fuerzas personales, educación y todo tipo de factores de personalidad y funciones laborales para lograr un grupo con ideas y puntos de opinión variados, que enriquezcan el proceso al momento de discutir y estandarizar.

Para entender el proceso es recomendable:

- » Describir el proceso.
- » Identificar los principales resultados o productos del proceso y sus respectivos clientes (las necesidades y preocupaciones de los clientes).
- » Identificar las principales necesidades del proceso o subproceso (insumos) que se está mapeando.
- » Describir un proceso estándar.

Preguntas iniciales que se deben responder:

- » ¿Qué hace el proceso actualmente?
- » ¿Qué se supone debe producir o realizar?
- » ¿Cómo está relacionado el proceso con las necesidades del cliente?
- » ¿Cuál es la mejor manera conocida en la actualidad para realizar dicho proceso?

Características fundamentales de los procesos:

- » A través del tiempo tienden hacia el confort más que hacia la competitividad.
- » Todas las personas trabajan dentro de un proceso y debe haber un responsable para cada uno de ellos.

- » Existe una gran variabilidad en la aplicación de los elementos de los procesos (personas, materiales, información y técnicas). Al reducir la variación, se mejoran los resultados.
- » La falta de estándares de trabajo lleva a la confusión y generan variabilidad.

Existen cuatro áreas generales donde comúnmente se generan la mayoría de los problemas en los procesos:

- a. Falta de entendimiento del proceso, tanto a nivel administrativo como operativo.
- b. Poco conocimiento de las necesidades y deseos de los clientes.
- c. Falta de mediciones de control de procesos en puntos clave.
- d. Mala comunicación entre las áreas.

Puntos clave para identificar qué procesos requieren de atención:

- a. Como iniciativa de algún plan dentro de la organización, se determina que cierto proceso requiere mejoras.
- b. Cualquier proceso nuevo.
- c. Procesos donde exista insatisfacción de clientes externos y/o internos.
- d. Todos los procesos que de algún modo estén relacionados a la seguridad del personal o a cuestiones ambientales.
- e. Procesos que no han sufrido algún cambio en mucho tiempo.
- f. Cuando alguna certificación, ley o reglamento requiere que un proceso sea estandarizado o documentado.
- g. Cuando se reciben quejas constantes, devoluciones, trabajos que requieren hacerse más de una vez, fechas no cumplidas, moral baja, rotación de personal, baja productividad o malos resultados en auditorías, entre otro tipo de problemas.

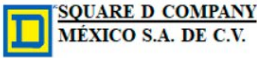
Para el autor, controlar es mantener algo en su estado deseado, con base en la definición de control que hace Juran (1951); por lo que no se puede controlar un proceso que no ha alcanzado su estado deseado. Es de gran importancia entender y cumplir que se deben estandarizar los procesos, para luego medir

los factores clave de los mismos. Con el resultado de dicha medición y las nuevas propuestas de mejora (muchas de las cuales surgen durante el proceso de estandarización), se generan nuevos procesos estándares. Todo esto a través de un proceso de mejora continua.

3. Para cada proceso seleccionado se debe establecer un plan de inspección, que de acuerdo con la norma ISO 9001:2015, es un documento que contiene todas las etapas por las que atraviesa un proceso, destacando aquellas donde se realiza algún tipo de verificación, para asegurar la calidad de cada etapa. En la figura 5 se muestra un ejemplo de Plan de Inspección de una empresa del sector eléctrico. (cabe aclarar que esta empresa ya no existe, fue adquirida por el grupo Schneider hace más de 30 años, pero el autor de esta obra trabajó allí y le tocó realizar algunos de estos documentos).

El mapa conceptual del proceso contiene todas las etapas por las que atraviesa dicho plan; para cada etapa deben describirse las acciones (¿qué?), los responsables de ejecutarlas (¿quién?), el lugar donde se ejecutarán (¿dónde?), los indicadores a usar que definirán cómo medir el desempeño en cada acción, las metas por alcanzar (¿cuánto se pretende alcanzar de cada indicador?), la forma en la que se llevarán a cabo las acciones (¿cómo?), con qué instrumentos de trabajo, los instructivos de operación de los instrumentos a usar, la frecuencia con la que se realizarán las acciones (¿cuándo?), los documentos y registros donde se registrarán los resultados y cómo se reaccionará ante una no conformidad, como se muestra en el formato de la tabla 2.

Figura 5. Ejemplo de un Plan de Inspección de Square D Company México (1990)



PLAN DE CALIDAD PRODUCCIÓN ESTÁNDAR

No. E100NRB

| | | |
|--|--|---|
| CATÁLOGO: E100NRB - CFE DESCRIPCIÓN: GABINETE PARA INT. TERMOMAGNÉTICO MARCO AIL, NEMA 3R | No. ESPECIFICACIÓN: S73481-962-02 No. ÚLTIMO ACI: ED 90063 No. ÚLTIMA REVISIÓN: NUEVO FECHA ÚLTIMO ACI: MARZO/14/1990 | FECHA EMISIÓN: AGOSTO/06/1990 No. GRUPO MANUFACTURA: 09 DEPTO: INTERRUPTORES DE SEGURIDAD No. 211 DIVISIÓN: DISTRIBUCIÓN |
|--|--|---|

| RESP | GPO | DEPTO | LUGAR | OPERACIÓN | MÉTODO | FRECUENCIA | REGISTRO | REACCIÓN A NO CONFORMIDAD |
|--------------------------|----------------|-------------------|---|---|---|---------------------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> | - | 015 | Verificación Recibo Recibo Materiales | Verificar materia prima | De acuerdo a procedimiento de inspección XF-107 | En cada lote recibido | Historial proveedor (F-8-197) | Según proc de control de no conform (F-8-123) |
| <input type="checkbox"/> | 11 11 | 231 234 | Fabrica: cizallas, prensas, dobladoras, punteadoras | Inspeccionar componentes fabricados | De acuerdo a procedimiento de inspección XF-108 | Autorizar las muestras y liberar lote | Tarjeta de control de proceso (F-8-282) | Elaborar reporte no conformidad y disponer (F-8-221) |
| <input type="checkbox"/> | 11 11 11 | 238 236 237 | Fabrica: galvanoplastia, pinturas | Inspeccionar componentes fabricados | De acuerdo a procedimiento de inspección XF-109 | Autorizar las muestras y liberar lote | Tarjeta de control de proceso (F-8-282) | Elaborar reporte no conformidad y disponer (F-8-221) |
| <input type="checkbox"/> | 11 11 | 238 236 | Fabrica: galvanoplastia, pinturas | Verificar acabado de componentes | De acuerdo a Manual de Procesos Especiales XF-110 | Autorizar las muestras y liberar lote | F-8-021 Electroli F-8-034 Fosfátiz F-8-012 Acabad | Detiene, ajusta, si se requiere elabora Reporte de No Conformidad |
| <input type="checkbox"/> | 09 | 211 | Línea de Ensamble | Ensamble de Neutro y Ensamble de Caja | De acuerdo a procedimiento de inspección XF-111 | Al iniciar el Subensamble | Identificar Mat Tarjeta Verde F-8-211 | Elaborar Reporte No Conformidad y disponer (F-8-221) |
| <input type="checkbox"/> | 09 | 211 | Verificación y Pruebas Línea de Ensamble | Ensamble de Neutro, Caja y Cubierta | De acuerdo a procedimiento de inspección PCS-21000 | Al iniciar Orden de Trabajo | Reporte Verificación F-8-200 | Ajustar Neumáticos Elaborar reporte (F-8-221) |
| <input type="checkbox"/> | 09 | 211 | Verificación y Pruebas Línea de Ensamble | Verificar Producto Terminado Gabinete, Cubierta, Ensamble, Caja y Empaque | De acuerdo a procedimiento de inspección-verificación, Referencia S73431-872-03 | Por muestreo en cada lote | Lista de Verificación Producto Terminado | Elaborar Reporte No Conformidad y disponer (F-8-221) |
| <input type="checkbox"/> | 09 | 211 | Verificación y Pruebas Almacén Producto Terminado | Auditoria a Producto Terminado, Gabinete, Cubierta, Ensamble, Empaque, Manejo de Material, Estiba | De acuerdo a procedimiento de inspección-verificación, Referencia S73431-872-03 | De acuerdo a Programa de Auditorías | Lista de Verificación Producto Terminado | Elaborar Reporte No Conformidad y disponer (F-8-221) |

Tabla 2. Formato de Plan de Inspección

| ETAPA DEL PROCESO | LUGAR (DÓNDE) | RESPONSABLE (QUIÉN) | CARACTERÍSTICA A INSPECCIONAR | NORMA DE REFERENCIA | ESPECIFICACIÓN O ESTÁNDAR | INSTRUMENTO DE MEDICIÓN | INSTRUCTIVO DE OPERACIÓN | FRECUENCIA (CADA CUANDO) | PROCEDIMIENTO (CÓMO) | REGISTRO DE INSPECCIÓN | CÓMO REACCIONAR ANTE NO CONFORMIDAD |
|-------------------|---------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|---------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------|------------------------|-------------------------------------|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

En el plan de inspección que se establezca, se deben definir las características de calidad que se requieren medir, inspeccionar o evaluar. Estas características de calidad en ocasiones podrán ser medidas a través de instrumentos que arrojan un resultado numérico, por lo cual se denominan características de calidad por variables; por citar algunos ejemplos, se pueden mencionar las dimensiones de una pieza (como son la altura, el ancho, el espesor), la temperatura, la resistencia mecánica, la carga de un resorte, la viscosidad, etcétera. En otras ocasiones, dichas características de calidad no son medibles numéricamente, únicamente clasificables, por ejemplo, el tipo de cabeza de un tornillo (cuadrada, hexagonal, de gota, de pan, etcétera); la apariencia de una pieza solo puede ser clasificable como se acepta o se rechaza, en tales casos se denominan características de calidad por atributos.

En la figura 6 se muestra otro ejemplo de Plan de Inspección aplicable a una empresa constructora. (cabe mencionar que se toma este ejemplo de información pública en internet, para mostrarla en una obra académica sin fines de lucro, por lo cual no se consideró necesario solicitar permiso).

Figura 6. Ejemplo de un Plan de Inspección de una Empresa Constructora

| | | CONSTRUCTORA NORBERTO ODEBRECHT S. A. | | | | REVISIÓN: F0 | | | | | | | |
|---|---|---|---|------------|----|---|---|-----------------------------|-----|---|-----|--|---|
| | | PLAN DE INSPECCION Y ENSAYOS (PIE) | | | | FECHA: 05-12-2011 | | | | | | | |
| | | PROYECTO: COMPLEJO AGROINDUSTRIAL DE DERIVADOS DE LA CAÑA DE AZÚCAR, PORTUGUESA | | | | PÁGINA 1 de 6 | | | | | | | |
| OBRA: "Obras Civiles, Eléctricas, Mecánicas y de Instrumentación para la Construcción, Instalación y Montaje de la Planta de Destilería y Torula, para el CADCA-Portuguesa" | | | | | | CODIGO: | AREA: CALIDAD - CIVIL | | | | | | |
| | | | | | | No. CONTRATO: | | | | | | | |
| N° | DESCRIPCION DE ACTIVIDADES | REQUERIMIENTOS DE INSPECCION Y/O ENSAYO | CRITERIO DE ACEPTACION | MÉTODO I&E | | DOCUMENTOS DE REFERENCIA: Norma, planos, procedimiento o especificación | FRECUENCIA | MATRIZ DE RESPONSABILIDADES | | | | CODIGO DEL FORMATO | EQUIPO DE PRUEBA O ENSAYO |
| | | | | IV | ME | | | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 1 General | | | | | | | | | | | | | |
| 1.1 | Documentos Técnicos Contractuales | Revisar y tener disponibles últimas revisiones | Fecha de las últimas revisiones de los documentos involucrados | IV | ME | Planos y Especificaciones aplicables | Al inicio de la Obra y cada vez que se emita/modifique un nuevo documento | V | V | A | VA | Planos y Especificaciones Aplicables | N/A |
| 1.2 | Recepción de Materiales (Arena, relleno, concreto pobre, etc. | Verificar la conformidad de los productos respecto a los requerimientos de la Requisición u Orden de Compra | Almacenar según especificaciones del fabricante, Órdenes de Compra, aprobación por el Cliente | IV | ME | Certificados de Calidad, Órdenes de Compra | Cada vez que se realicen recepciones de material | IV | IV | A | M | XXX-001 | Cinta Métrica, Vernier, otros |
| 1.3 | Planos Civiles como construidos (As built) | Incorporar todos los cambios efectuados sobre los planos | Verificar incorporación de cambios según Especificaciones del proyecto | IV | ME | Planos As built | Según Procedimiento | E | V | M | A | Listado actualizado de los planos como construidos | N/A |
| 1.4 | Dispositivos de Medición y Segurimento ISO 9001:2008 | Certificar la calibración de los equipos del contratista y/o de laboratorios, utilizados para las actividades de excavación, relleno y compactación | Fecha y Frecuencia de Calibración de los Dispositivos de Medición y Segurimento | IV | ME | Recomendaciones del Fabricante, Certificados de Calibración | De acuerdo a la frecuencia especificado en el Certificado de Calibración | | V-M | N | V-A | XXX-004 | Patrones de Calibración utilizados por la Empresa Aprobada por Metrología Legal |

| LEYENDA DE LA MATRIZ DE RESPONSABILIDADES | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|-------------------|----|---------------------|---|---------|----------------|---|---|------------|----------|-------------------------|----|-----------|--|
| 1: Aseguramiento y Control de Calidad CNO | | | | 2: Construcción CNO | | | | 3: Aseguramiento y Control de Calidad PDVSA | | | | 4: Ing. Inspector PDVSA | | | |
| METODO DE INSPECCION | IV | INSPECCION VISUAL | ME | MEDICION | A | APROBAR | V | VERIFICAR | M | MONITOREAR | E | EJECUTAR | NA | NO APLICA | |
| EMPRESAS | Construtora Norberto Odebrecht, S. A. (CNO) | | | | | | PDVSA Agrícola | | | | | | | | |
| NOMBRE / FIRMA / FECHA: | Ing. Cruz Cheng / 05-12-2011 Coordinador de Calidad | | | | | | APROBADO | | | | REVISADO | | | | |

| | | CONSTRUCTORA NORBERTO ODEBRECHT S. A. | | | | REVISIÓN: F0 | | | | | | | |
|---|--|---|---|------------|----|---|------------------------------|-----------------------------|---|---|-----|---|---------------------------------|
| | | PLAN DE INSPECCION Y ENSAYOS (PIE) | | | | FECHA: 05-12-2011 | | | | | | | |
| | | PROYECTO: COMPLEJO AGROINDUSTRIAL DE DERIVADOS DE LA CAÑA DE AZÚCAR, PORTUGUESA | | | | PÁGINA 2 de 6 | | | | | | | |
| OBRA: "Obras Civiles, Eléctricas, Mecánicas y de Instrumentación para la Construcción, Instalación y Montaje de la Planta de Destilería y Torula, para el CADCA-Portuguesa" | | | | | | CODIGO: | AREA: CALIDAD - CIVIL | | | | | | |
| | | | | | | No. CONTRATO: | | | | | | | |
| N° | DESCRIPCION DE ACTIVIDADES | REQUERIMIENTOS DE INSPECCION Y/O ENSAYO | CRITERIO DE ACEPTACION | MÉTODO I&E | | DOCUMENTOS DE REFERENCIA: Norma, planos, procedimiento o especificación | FRECUENCIA | MATRIZ DE RESPONSABILIDADES | | | | CODIGO DEL FORMATO | EQUIPO DE PRUEBA O ENSAYO |
| | | | | IV | ME | | | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 1.5 | | | | | | | | | | | | | |
| 1.5 | Consulta Técnica en Campo / Desvío de Ingeniería | Formalizar por medio de Consulta Técnica al Cliente, las modificaciones y/o desvíos de Ingeniería que ocasionalmente pudieran presentarse durante la ejecución de la obra | Especificaciones y Códigos aplicables. Planos aprobados para construcción. Verificación física por parte del Cliente. | IV | ME | Especificaciones y Códigos aplicables. | Cada vez que sean detectadas | E | V | A | M-A | XXX-001 | Cinta Métrica, Vernier, otros |
| 2 Topografía | | | | | | | | | | | | | |
| 2.1 | Equipos Topográficos | Confabilidad de los equipos. Certificados de calibración | Conven ISO 9001-2000 Procedimiento de la Contratista | IV | ME | Procedimiento de la Contratista YYY-004 | De acuerdo a procedimiento | E | V | M | A | XXX-005 | N/A |
| 2.1 | Nivelación y Replanteo | Verificar el demarcado de áreas | Especificaciones del Proyecto | IV | ME | YYY-004 Planos de Construcción | Al inicio de la obra | E | V | M | A | Libreta Topógrafo XXX-003 XXX-001 | Teodolito, Nivel, Cinta métrica |
| 3 Niveles y Posicionamiento | | | | | | | | | | | | | |
| 3.1 | Encofrado | Verificación de ubicación y dimensiones | Especificaciones Generales/detalle del proyecto | IV | ME | Planos de Construcción YYY-006 | Antes del Vaciado | E | V | M | A | XXX-006 | Cinta Métrica, Nivel |

Fuente: Anderson Bell Suárez Mogollón, 2017. Recuperado de <https://es.scribd.com/document/363205202/101958969-Plan-de-Inspeccion-y-Ensayos-Civil-Odebrecht-Guia-Plan-de-Ensayos>

4. El control estadístico de calidad que se aplique en cada etapa del proceso dependerá del número y tipo de características de calidad que se van a controlar. En una etapa dada de un proceso, si la característica de calidad por controlar es medible numéricamente con instrumentos, convendrá aplicar un diagrama de control por variables; si no es medible, solo clasificable, convendrá aplicar un diagrama de control por atributos. En aquellas etapas donde se tengan varias características de calidad para controlar, lo más adecuado es aplicar un diagrama de control para atributos que agrupe al total de características que se desea controlar.

Por ejemplo, en el caso de tratar de controlar la calidad de un tornillo en una etapa del proceso, las características de calidad que pueden ser tomadas en cuenta son el tipo de cabeza (atributo), largo (variable), diámetro (variable), tipo de rosca (variable), resistencia al torque (variable); si se pretende aplicar un diagrama de control estadístico para cada característica de calidad, se tendrían que definir cinco tipos de diagrama de control diferentes, lo cual volvería muy complicado el proceso. En este caso, dado que un tornillo es un artículo no complejo en su diseño, ni en su manufactura, lo más recomendable es definir un diagrama de control de tornillos defectuosos (por atributos, np si el tamaño de muestra es constante o p si el tamaño de muestra es variable), en donde se considera que un tornillo que no cumple una o más de las cinco características de calidad anteriormente citadas se clasifica como defectuoso.

5. Antes de intentar siquiera controlar una etapa del proceso con un diagrama de control estadístico, conviene previamente analizar la distribución de probabilidad que presentan los datos que se recaben de las características de calidad sujetas a estudio. Por ejemplo, si lo que se va a controlar es el número de artículos defectuosos en productos simples o no complejos, la distribución de probabilidad de esta característica se supone que es hipergeométrica o binomial. Si lo que se va a controlar es el número de defectos por unidad, en artículos complejos, la distribución de probabilidad de la característica de calidad se supone que es de tipo Poisson. Si la característica de calidad que se va a controlar es medible numéricamente, conviene

determinar si su distribución de probabilidad es normal o presenta algún otro tipo de distribución continua.

6. También, antes de pensar en establecer un control estadístico de una o varias características de calidad en una etapa del proceso, conviene hacer un estudio o análisis de capacidad o habilidad de proceso (capability en inglés), a cada una de ellas, para determinar si el proceso es capaz de cumplir especificaciones, lo cual se tratará más adelante en esta obra. Un diagrama de control estadístico de proceso solo permite saber si un proceso se comporta como tradicionalmente se viene comportando y si este ha mejorado o empeorado, pero no establece si el proceso cumple especificaciones; de allí la importancia de efectuar previamente un análisis de capacidad o habilidad de proceso.
7. Una vez definido el tipo de diagrama de control estadístico por aplicar, se deben planear las técnicas de muestreo que se emplearán: a) tipo de muestreo aleatorio (simple, estratificado, por conglomerados, sistemático), el cual dependerá de la estructura que presente la población; b) n , tamaño de las muestras (constante o variable); c) definir $1-\alpha$, el nivel de confianza que se pretende alcanzar de los resultados; d) h , la frecuencia del muestreo, es decir, el periodo de tiempo entre muestra y muestra tomada.
8. El control estadístico de calidad que se vaya a aplicar requiere de dos fases de tiempo diferentes. En una primera fase, se toman un número considerable de muestras, m , de tamaño n (puede ser constante o variable) cada una de ellas, con las cuales se estimarán los límites de control por aplicar para cada característica de calidad que se va a controlar. La segunda fase es usar los límites de control estimados previamente para volver a recoger muestras y trazar el diagrama de control actual y verificar si éste se encuentra bajo control o no.
9. En la primera fase de la estimación de los límites de control estadístico por aplicar conviene verificar lo establecido en los pasos 5 y 6, es decir, verificar qué distribución presentan los datos obtenidos y calcular la capacidad

o habilidad del proceso para cumplir especificaciones. Esto es vital, porque no se recomienda aplicar un diagrama de control a un proceso que desde un principio se sabe que no es capaz de cumplir especificaciones. Recuérdese el significado de controlar: mantener un proceso en su estado deseado; si el proceso no se encuentra en dicho estado, es imposible pretender controlarlo. Si de entrada se detecta que el proceso no es capaz, no conviene implantar el diagrama porque va a estar deteniendo el proceso frecuentemente, lo cual puede ser muy costoso y complejo. También, es necesario verificar la distribución de probabilidad que presentan los datos porque si no cumplen las condiciones iniciales que se establecen para calcular los límites, puede ocasionar errores de cálculo o peor aún, tomar decisiones equivocadas de cuándo parar o no parar un proceso.

10. En la segunda fase de aplicación del diagrama de control, durante el proceso, recoger las muestras requeridas, calcular el valor de la característica que se va a controlar de cada muestra, y trazar el diagrama de control que contenga el valor de la característica por controlar, junto con los límites de control que se usarán e interpretarlo para determinar si el proceso está bajo control o requiere detenerse.

Antes de proseguir a abordar en detalle cada uno de los puntos mencionados de la metodología anterior, conviene mostrar la tabla 3 en la que se resumen cada uno de los diagramas de control estadístico que se tratarán en este módulo.

Tabla 3. Diagramas de Control Estadístico de Calidad de Procesos que se utilizarán

| Tipo | Diagrama de Control | Notación | Característica a Controlar | Condiciones iniciales |
|------------------|---------------------------------------|----------------|-----------------------------------|---|
| Por Variables | Medias y Rangos | X-R | Media | n= 4, 5, 6 |
| | | | Rango | n= 4, 5, 6 |
| | Medias y Desviaciones Estándar | X-S | Media | n >= 10 |
| | | | Desviación Estándar | n >= 10 |
| | Lectura Individuales y Rangos Móviles | X-RM | Lectura Individual | |
| Precontrol | | Rango Móvil | | |
| Sumas Acumuladas | CuSum | Suma Acumulada | | |
| Por Atributos | Número de Defectuosos | np | Número de Defectuosos | n muy grande y constante |
| | Fracción Defectuosa | p | Fracción Defectuosa | n muy grande y constante o variable |
| | Número de Defectos por Unidad | c | Número de Defectos por Unidad | n muy grande y constante |
| | Fracción de Defectos por Unidad | u | Fracción de Defectos por Unidad | n muy grande y constante o variable |
| | Deméritos por Unidad | Du | Deméritos por Unidad | n muy grande y constante |
| Otros Diagramas | Precontrol | | Cualquier característica | Como etapa de capacitación al Control |
| | S ² (de varianzas) | S ² | Varianza | Alternativa a S o a R, n grande y constante |
| | CUSUM | CUSUM | Cualquier característica | Para detectar cambios pequeños |
| | EWMA | EWMA | Cualquier característica | Para detectar cambios pequeños |
| | Eventos Raros | g ó h | Fracción defectuosa o de defectos | Probabilidad de ocurrencia muy baja |

La importancia de la tabla anterior es que servirá para elegir el diagrama de control estadístico por aplicar, como a continuación se ilustrará para diferentes tipos de procesos.

Ejemplo 3.1. Una empresa fabrica rollos de papel en longitudes de 5000 metros lineales (el mismo caso se daría para cable que puede ser eléctrico, telefónico, de fibra de vidrio, varilla o alambión, monofilamento de plástico, tela, etcétera), en forma continua, y en la etapa final del proceso se requiere hacer

inspección antes de su envío a almacén en rollos de, por ejemplo, 5000 metros lineales. Para llevar a cabo esta etapa del proceso, selecciona una muestra de una parte del cable, la más a la mano que se encuentre. ¿Qué se inspecciona en este caso? En un caso similar al anterior, se buscarían defectos o imperfecciones en el papel como agujeros, roturas, raspaduras, partes ásperas, arrugas, espesores muy delgados o muy gruesos, etcétera. Se contabilizaría el número de defectos, por citar un caso por cada 100 metros lineales de papel, por lo que se trata de tamaños de muestra constantes, con lo que se concluye que el diagrama de control estadístico por aplicar sería por atributos, tipo c.

Ejemplo 3.2. Suponga que un fabricante elabora tornillos con cabeza de gota, de 1 ± 0.01 cm de diámetro con rosca milimétrica, con una longitud de 3 ± 0.01 cm y una resistencia al torque mínima de 16 in/lb.

Los defectos que puede presentar un tornillo son que no sea el tipo de cabeza solicitado, que tenga un diámetro menor o en exceso del solicitado, que tenga una longitud menor o mayor a lo especificado o que la resistencia al torque sea menor a la especificada. El tipo de cabeza se inspecciona visualmente, si este tiene la cabeza diferente a la de tipo gota se clasifica como defectuoso. Para inspeccionar el diámetro y tipo de rosca se utiliza un calibrador pasa-no pasa, el cual consiste en dos agujeros con la rosca deseada, en donde dice no pasa el tornillo no debe entrar y viceversa, donde dice pasa el tornillo debe entrar; así, un tornillo que pase por donde dice no pasa o que no pase por donde dice pasa debe clasificarse como defectuoso. La longitud del tornillo se mide con un vernier y debe caer entre 2.99 y 3.01 cm; si es menor a 2.99 o mayor a 3.01, el tornillo se clasifica como defectuoso. La resistencia al torque se mide con un torquímetro y debe tener como mínimo antes de romperse una lectura mayor o igual a 16 in/lb, si la lectura del torquímetro es menor a 16 in/lb, el tornillo se clasifica como defectuoso.

Como se puede apreciar en este ejemplo, existen cinco características de calidad diferentes, si se pretende establecer un control estadístico de proceso se tendría que garantizar un diagrama de control por atributos para el tipo de cabeza, un diagrama de control por atributos para el diámetro y tipo de rosca,

un diagrama de control por variables para el largo del tornillo y un diagrama de control por variables para la resistencia al torque de los tornillos. Dado que habría cuatro diagramas de control diferentes, el proceso de control se volvería muy complejo, lo mejor es considerar un solo diagrama por atributos que controle el número de tornillos defectuosos en el proceso. Se utilizará la clasificación de artículos en defectuosos o no defectuosos. Lo anterior significa que se debe tomar una muestra aleatoria de n tornillos; para cada uno de ellos se requiere inspeccionar el tipo de cabeza (visualmente), su diámetro y tipo de rosca (con el calibrador pasa-no pasa), su longitud (con el vernier) y la resistencia al torque (con el torquímetro). Los tornillos que cumplan las especificaciones de las características mencionadas se clasifican como no defectuosos, los que no cumplan alguna(s) de las características antes dichas se clasifican como defectuosos. En este caso, el diagrama de control que se aconseja aplicar es el diagrama de control por atributos tipo np, ya que su tamaño de muestra es constante.

Ejemplo 3.4. En un Ingenio Azucarero, como en el de San Cristóbal, en la Ciudad de Carlos A. Carrillo Veracruz, durante el proceso de llenado de sacos de azúcar, una de las etapas finales es el envasado. Para llevarlo a cabo, un operario levanta un saco vacío, pisa un pedal, se abre una escotilla y de la escotilla se deja caer una cantidad de azúcar equivalente a 200 Kg.

En esta etapa del proceso, la única característica de calidad que se controla es el peso de cada saco de azúcar. Podría pensarse que existen otras cualidades correspondientes al azúcar, por ejemplo, no debe estar húmeda o “llorosa”, no debe tener impurezas, etcétera, pero estas no se controlan en esta etapa del proceso, sino previamente. Así, en este caso, se tiene una sola característica de calidad: el peso, que es medible con una báscula, por lo cual, el diagrama de control que se aplica sería por variables: X-R si el tamaño de muestra es menor de 10 ó X-S si el tamaño de muestra es mayor o igual a 10.

La esencia del control estadístico de calidad de procesos permite determinar, medir, analizar y controlar las características de operación de un proceso dado, a través del uso de modelos matemáticos. Un proceso que trabaja bajo condiciones normales de operación está bajo control y es capaz de producir repetidamente partes que cumplen las especificaciones dadas. Los procesos que están bajo control estadístico presentan una cantidad de variación estable y predecible debido a causas comunes o naturales de variación. Las causas comunes de variación ocurren naturalmente en cualquier proceso y en muchos casos la cantidad de variación que provocan puede ser simulada a través de una distribución normal. Se establecerán a continuación las principales características de una distribución normal.

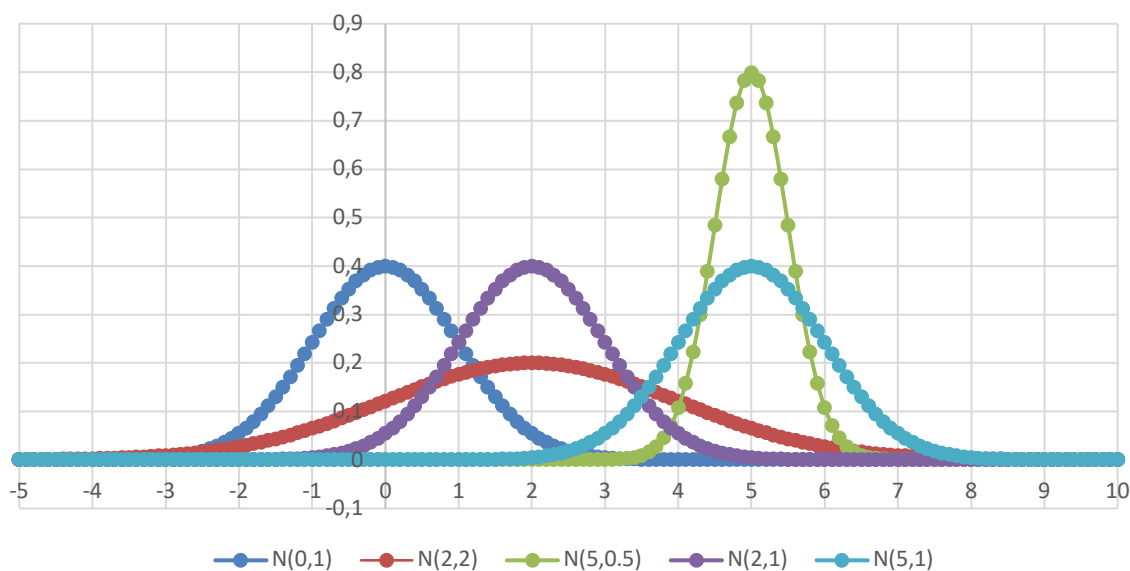
La Distribución Normal fue estudiada por primera vez en el siglo XVIII, cuando se observó que los patrones de errores de medición seguían una distribución simétrica, en forma del perfil de una campana. Fue presentada en forma matemática en 1733 por De Moivre, quien la obtuvo como una forma límite de la distribución binomial. La distribución también fue conocida por Laplace en fecha no posterior a 1775. Debido a un error histórico ha sido atribuida a Gauss, cuya primera referencia impresa relativa a esta distribución apareció en 1809 y por lo mismo con frecuencia se utiliza el término Distribución de Gauss (o gaussiana). Durante los siglos XVIII y XIX se realizaron varios intentos de establecer a esta distribución como la ley probabilística base de todas las variables continuas; debido a esto, se llegó a utilizar el término de Normal, lo cual se debe también a que en muchos aspectos resulta ser la piedra angular de la estadística.

Se dice que una variable aleatoria x tiene una Distribución Normal con media m_x ($-\infty < m_x < \infty$) y desviación estándar $s_x > 0$, si tiene función de densidad de probabilidad dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2} ; \infty < x < \infty \quad \dots (1)$$

En la figura 7 se muestran ejemplos de gráficas para este tipo de distribución. Se usa tanto, que para representarla a menudo se emplea la notación abreviada $x \sim N(m_x, s_x)$, para indicar que la variable aleatoria x se distribuye normalmente con media m_x y desviación estándar s_x .

Figura 7. Gráficas de distribuciones normales



En la figura 7 anterior, nótese que las gráficas de las variables x_1 , x_4 y x_5 tienen la misma forma, solo que la primera tiene su eje de simetría en $x=0$; la cuarta tiene su eje de simetría en $x=2$; y la quinta, en $x=5$; esto implica que la media representa el eje de simetría de la curva normal; dos curvas normales que tengan la misma desviación estándar tendrán forzosamente la misma forma. Por otra parte, obsérvese que las variables x_2 y x_3 (por una parte), y, x_3 y x_5 tienen la misma media respectivamente, lo que implica que tienen el mismo

eje de simetría; sin embargo, obsérvese que mientras más grande sea la desviación estándar, mayor es la dispersión de los datos y más plana es la curva; esto es lógico ya que, si se recuerda, el área total bajo la curva de una función de densidad de probabilidad, siempre es uno, por lo que mientras más dispersión tenga, más plana se hace para conservar esta propiedad. Asimismo, mientras más “picuda” sea menos dispersión tendrá, como en el caso de la variable x_3 ; esto implica que la desviación estándar s_x es la que le da la forma a la curva normal, por lo que se le denomina parámetro de forma.

En la figura 7 anterior, a la distribución de la variable $x_1 \sim N(0,1)$, que tiene media cero y desviación estándar uno se le denomina distribución normal estándar y se le representa con la letra z . Cabe señalar que a través de la distribución de probabilidad normal estándar se calculan las probabilidades de cualquier distribución normal $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$, a través del siguiente cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (2)$$

Por su enorme ámbito de aplicación de la normal estándar, tradicionalmente, existen tablas para el cálculo de probabilidades de dicha distribución, como la que se muestra en la tabla 4, que fue elaborada utilizando Excel. En esta tabla los valores de probabilidad representan el área bajo la curva a la izquierda del valor z_0 que se defina. Por ejemplo, para $z = 0.35 = 0.3 + 0.05$, el área bajo la curva a la izquierda de $z = 0.35$ es 0.63683.

Tabla 4. Cálculo de probabilidades de la distribución normal estándar realizada en Excel

| TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR | | | | | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $p(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ | | | | | | | | | | |
| z | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |
| 3.8 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99995 |
| 3.9 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99997 | 0.99997 |

Suponga que $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$, se calcularán las probabilidades de que x se encuentre en el intervalo $\mu_x - k\sigma_x \leq x \leq \mu_x + k\sigma_x$ para diferentes valores de k . A este intervalo precisamente se le conoce como intervalo de confianza de x , al valor que tome $1-\alpha_k$ se le conoce como nivel de confianza, y a su complemento se le denomina nivel de significancia α_k .

$$1 - \alpha_k = p(\mu_x - k\sigma_x \leq x \leq \mu_x + k\sigma_x) \quad \dots (3)$$

En el intervalo anterior, aparecen los límites de confianza:

$$LIC = \mu_x - k\sigma_x$$

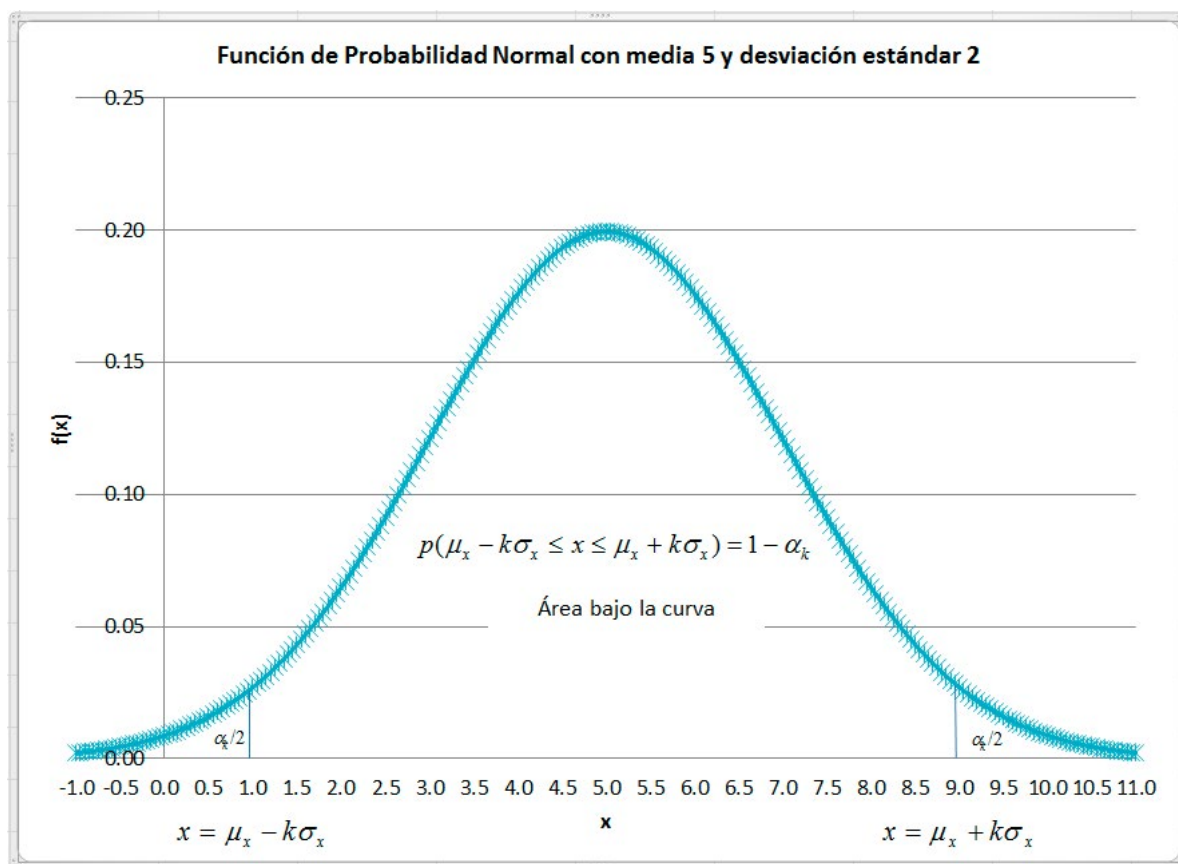
$$LMC = \mu_x$$

$$LSC = \mu_x + k\sigma_x$$

... (4)

Al primero, LIC, se le conoce como Límite Inferior de Confianza; al tercero, LSC, Límite Superior de Confianza; al valor central de estos límites, LMC, se le conoce como Límite Medio de Confianza. Como se puede ver, dependen de los valores que tomen, la media μ_x , la desviación estándar σ_x y el valor de k para un nivel de confianza de $1-\alpha_k$, como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Área bajo la curva normal a k desviaciones estándar de su media



En la tabla 5 se muestran los niveles de confianza que se alcanzan para diferentes valores de k :

Tabla 5. Valores de $1-\alpha_k$ para diferentes valores de k

| k | $1-\alpha_k$ |
|-----|--------------|
| 0.5 | 38.2925% |
| 1.0 | 68.2689% |
| 1.5 | 86.6386% |
| 2.0 | 95.4500% |
| 2.5 | 98.7581% |
| 3.0 | 99.7300% |
| 3.5 | 99.9535% |
| 4.0 | 99.9937% |
| 4.5 | 99.9993% |
| 5.0 | 99.9999% |

Si la variable aleatoria x se estandarizara:

$$1 - \alpha_k = p\left(\frac{\mu_x - k\sigma_x - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{\mu_x + k\sigma_x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad \dots (5)$$

$$1 - \alpha_k = p(-k \leq z \leq k)$$

Nótese que la k se comporta como una variable aleatoria normal estándar, quedando de la siguiente forma el intervalo de confianza:

$$p\left(\mu_x - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_x \leq x \leq \mu_x + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_x\right) = 1 - \alpha_z \quad \dots (6)$$

Si en el intervalo anterior se toma un nivel de confianza alto (es decir, mayor al 99%), el intervalo anterior puede considerarse como intervalo de proceso. El ancho de proceso, en este caso, sería la diferencia entre el límite superior y el límite inferior de proceso, es decir, el ancho de proceso sería:

$$LIP - LSP = \left(\mu_x + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_x\right) - \left(\mu_x - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_x\right) = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_x \quad \dots (7)$$

Walter Shewhart consideró un nivel de confianza del 99.73%, lo que implica que $z_{\alpha/2} = 3$ como se observa en la tabla 5. Como se puede apreciar entonces, el ancho de proceso sería $6\sigma_x$, y los límites de proceso serían:

$$\begin{aligned}
 LIP &= \mu_x - 3\sigma_x \\
 LMP &= \mu_x \\
 LSP &= \mu_x + 3\sigma_x
 \end{aligned}
 \quad \dots (8)$$

De lo visto en probabilidad y estadística, se sabe que la combinación lineal de dos o más variables aleatorias normales estadísticamente independientes, también origina a su vez una distribución normal, de media la combinación lineal de las medias y de varianza la suma de los cuadrados de los coeficientes de la combinación lineal por las varianzas. Al teorema que afirma esto se le denomina Teorema de Aditividad de la Distribución Normal.

4.1. Teorema de Aditividad de la Distribución Normal

Sean

$$\begin{aligned}
 x_1 &\sim N(\mu_{x_1}, \sigma_{x_1}) \\
 x_2 &\sim N(\mu_{x_2}, \sigma_{x_2}) \\
 &\vdots \\
 x_n &\sim N(\mu_{x_n}, \sigma_{x_n})
 \end{aligned}
 \quad \dots (9)$$

$$\text{Sea } y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$\text{Entonces } y \sim N(\mu_y, \sigma_y) \quad \dots (10)$$

En donde:

$$\mu_y = a_1\mu_{x_1} + a_2\mu_{x_2} + \dots + a_n\mu_{x_n} \quad \dots (11)$$

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + \dots + a_n^2\sigma_{x_n}^2} \quad \dots (12)$$

Ejemplo 4.1. En la figura 10 se graficaron cinco variables aleatorias normales: $x_1 \sim N(0,1)$, $x_2 \sim N(2,2)$, $x_3 \sim N(5,0.5)$, $x_4 \sim N(2,1)$, $x_5 \sim N(5,1)$. Obtenga la gráfica de la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria $y = 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5$.

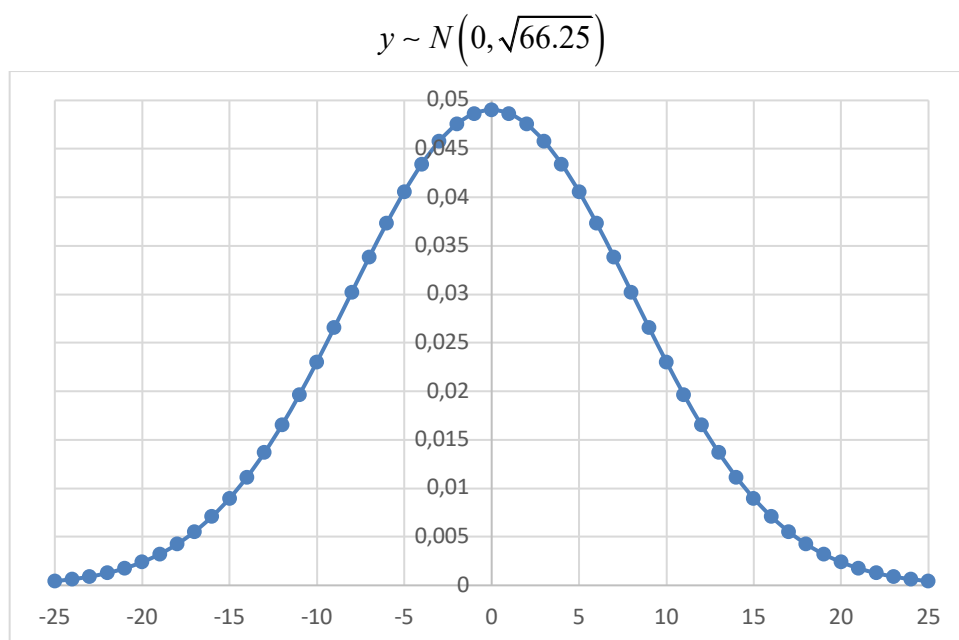
Nótese que de acuerdo con el Teorema de Aditividad de la Distribución Normal

$$\mu_y = 5(0) + 3(2) - 1(5) + 2(2) - 1(5) = 0$$

$$\sigma_y = \sqrt{(5)^2(1)^2 + (3)^2(2)^2 + (-1)^2(0.5)^2 + (2)^2(1)^2 + (-1)^2(1)^2} = \sqrt{66.25}$$

La gráfica de la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria y se muestra en la figura 9.

Figura 9. Gráfica de la variable aleatoria $y=5x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5$



Existe un teorema fundamental que une a la Probabilidad con la Estadística y que va más allá de lo afirmado anteriormente; en realidad, no importa la distribución de probabilidad de cada una de las variables que se están sumando, si el número de variables que se suman es significativamente muy alto, una combinación lineal de variables aleatorias con cualquier distribución de probabilidad también tiende a una distribución normal, tal y como lo afirma el Teorema del Límite Central.

4.2. Teorema del Límite Central

Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, n variables aleatorias estadísticamente independientes, con cualquier distribución de probabilidad, con medias $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$, y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_n^2$

Si n es muy grande, la variable aleatoria $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$ tiende a tener una distribución normal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right] \sim N(0,1)$$

Lo que implica que

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n \sim N(\mu_y, \sigma_y)$$

En donde

$$\mu_y = a_1\mu_{x_1} + a_2\mu_{x_2} + \dots + a_n\mu_{x_n}$$

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + \dots + a_n^2\sigma_{x_n}^2}$$

El Teorema del Límite Central establece que a medida que n se acerca a infinito, la distribución de la variable aleatoria $z_y = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$ tiende a una distribución normal estándar. El hecho de que y se distribuya casi de manera normal, cuando los términos x_i pueden tener fundamentalmente cualquier distribución, discreta o continua, es la razón básica de la importancia que tiene la distribución normal. Esto tiene consecuencias muy significativas en las aplicaciones de la probabilidad y la estadística. De alguna forma, se puede buscar un procedimiento de trabajo que permita aplicar el teorema del límite central y con ello partir del supuesto de que la distribución de los datos en estudio tiene un comportamiento aproximadamente normal.

Un caso particular se presenta cuando las variables x_i tienen la misma distribución. En este caso la variable y tiene media $\mu_y = n\mu_x$ y desviación estándar $\sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x$. De esta forma, la variable $\sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x$ tiene distribución normal estándar.

Nótese qué ocurre cuando la variable aleatoria por analizar es la media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño “n”. Como se sabe, la media aritmética de una muestra representa el valor óptimo de tendencia central de dicha muestra, y se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \quad \dots (13)$$

La media de esta variable aleatoria sería:

$$\mu_{\bar{x}} = E\{\bar{x}\} = E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i\right\} = \frac{1}{n} \{n\mu_x\} = \mu_x \quad \dots (14)$$

Su varianza sería:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E\left\{(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2\right\} = E\left\{\left[\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x}\right)^2\right]\right\} = \frac{1}{n^2} \{n\sigma_x^2\} = \frac{\sigma_x^2}{n} \quad \dots (15)$$

Por el Teorema de Aditividad de la Distribución Normal, si la distribución de probabilidad de los datos poblacionales es normal, entonces su media aritmética muestral también es normal:

$$x \sim N(\mu_x, \sigma_x) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) \quad \dots (16)$$

De otra forma, si se considera a n como muy grande, entonces, por el Teorema del Límite Central, se puede suponer que su media aritmética muestral también es normal:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) \quad \dots (17)$$

Nótese que los Límites de Confianza para la Media Muestral serían los siguientes:

$$\begin{aligned}
 LIC_{\bar{x}} &= \mu_x - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \\
 LMC_{\bar{x}} &= \mu_x \\
 LSC_{\bar{x}} &= \mu_x + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}
 \dots (18)$$

Debe quedar claro que los Límites de Proceso de la variable aleatoria x , son diferentes:

$$\begin{aligned}
 LIP_{-x} &= \mu_x - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_x \\
 LMP_{-x} &= \mu_x \\
 LIP_{+x} &= \mu_x + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_x
 \end{aligned}
 \dots (19)$$

Estos límites son aplicables a lecturas individuales de la población bajo estudio.

También existe diferencia con los denominados Límites de Especificación, LIE, LME, LSE, los cuales son aquellos que se establecen en una norma de especificación o en un plano.

Como se aprecia, se puede suponer que la distribución de probabilidad de la media aritmética muestral es normal cuando la población es normal o cuando el tamaño de muestra se considera lo suficientemente grande como para aplicar el teorema del límite central.

Por otra parte, surge la siguiente pregunta: ¿qué tan grande debe ser n , para obtener resultados razonables, utilizando la distribución normal para aproximar la distribución de probabilidad de la media muestral?

Desde un punto de vista práctico pueden proporcionarse algunas reglas heurísticas o reglas de “dedo”, cuando la distribución de los términos x_i cae en alguno de los tres grupos siguientes:

1. “Bien Comportada”. La distribución de x_i no se aparta radicalmente de la distribución normal. En este caso, los experimentalistas en probabilidad y estadística, y en otras áreas de aplicación, han determinado que para que se pueda suponer que la media muestral es normal, n debe ser al menos 4, es decir, $n \geq 4$.

Esto da pie a considerar que el tamaño muestral adecuado para un diagrama de control X-R es $n = 4, 5$ o 6 , como más adelante se verá.

2. “Comportada Aceptablemente”. La distribución de x_i no tiene modo protuberante y se parece mucho a una función de densidad de probabilidad uniforme. En este caso, la regla comúnmente aceptada es que $n \geq 12$.
3. “Mal Comportada”. La distribución de x_i tiene forma completamente contraria al perfil de una campana (cóncava hacia arriba y asimétrica, como por ejemplo la distribución exponencial negativa). Para muchas aplicaciones prácticas, $n \geq 100$ debería ser satisfactoria.

Esto da pie a considerar que el tamaño muestral adecuado para un diagrama de control por atributos es $n \geq 100$, como más adelante se verá.

Cabe señalar que, aunque la distribución normal es aplicable a muchos casos prácticos, no todas las características de interés se comportan como ella. Es necesario considerar que algunas variables aleatorias tienen un comportamiento probabilístico muy diferente.

En la tabla 6 que se muestra a continuación se resumen los principales modelos probabilísticos discretos, que se usan para aproximar el comportamiento de algunas características de interés de fenómenos físicos o de procesos industriales.

Tabla 6. Modelos Probabilísticos Discretos

| Distribución | Función de Probabilidad: $p(x)$ | Función de Probabilidad Acumulada: $P(x)=p(t \leq x)$ | Media | Varianza |
|-------------------|---|---|--------------------------------|--|
| Bernoulli | $p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{(1-x)} & x = 0,1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $P(x) = p(t \leq x) = \begin{cases} 1-p & x=0 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ | p | $\begin{matrix} 0 & p < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ ó } 1 & p = \frac{1}{2} \\ 1 & p > \frac{1}{2} \end{matrix}$ |
| Binomial | $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} & x = 0,1,2,\dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $p(t \leq x) = \sum_{t=0}^{t=x} \binom{n}{t} p^t (1-p)^{(n-t)}$ | np | $np(1-p)$ |
| Geométrica | $p(x) = \begin{cases} p(1-p)^{(x-1)} & x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $p(t \leq x) = \sum_{t=0}^{t=x} p(1-p)^{(t-1)}$ | $1/p$ | $(1-p)/p^2$ |
| Binomial Negativa | $p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{(x-1)} & x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $p(t \leq x) = \sum_{t=0}^{t=x} \binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{(t-r)}$ | $\frac{r}{p}$ | $\frac{r(1-p)}{p^2}$ |
| Hipergeométrica | $p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0,1,2,\dots, \min(n,D) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $p(t \leq x) = \sum_{t=0}^{t=x} \frac{\binom{D}{t} \binom{N-D}{n-t}}{\binom{N}{n}}$ | $n \left(\frac{D}{N} \right)$ | $n \left(\frac{D}{N} \right) \left(1 - \frac{D}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ |
| Poisson | $p(x) = \begin{cases} e^{-c} \frac{c^x}{x!} & x = 0,1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $p(t \leq x) = \sum_{t=0}^{t=x} e^{-c} \frac{c^t}{t!}$ | c | c |

Los modelos probabilísticos discretos, se aplican para características de calidad de interés, cuyo dominio cae en el campo de los números naturales incluyendo al cero. Para ilustrar la aplicación de estos modelos, el primero es el de Bernoulli que se aplica cuando se realiza un experimento de un solo ensayo, en el cual solo existen dos posibles resultados: éxito ($x=1$, cuya probabilidad es p); o fracaso ($x=0$, cuya probabilidad de éxito es $1-p$).

Este modelo se aplicaría al lanzar una moneda al aire, solo se tendrían dos posibles resultados: águila o sol; o también al sacar una baraja de un mazo, donde solo se tuvieran dos resultados: As o no As. En el caso de procesos industriales equivaldría, por ejemplo, a sacar un tornillo de un lote, en el cual solo existieran dos posibles resultados: defectuoso o no defectuoso.

En el segundo modelo probabilístico, en donde se supone que se pueden realizar un número infinito de ensayos, en los cuales solo existen dos posibles resultados, éxito o fracaso, con una probabilidad de éxito constante p , se efectúan n ensayos y se cuenta el número de ensayos en los que se tuvo éxito, el modelo a aplicar se denomina Binomial.

Ejemplo 5.1. Para ilustrar el segundo modelo de la tabla 6, suponga que se tiene un dado con seis caras, cada cara marcada con un símbolo (A: As, R: Rey, Q: Reina, J: Jack, 9: Nueve rojo; 7: Siete negro) y se denomina éxito a que caiga el As; la probabilidad de éxito $p=1/6$ (suponiendo que el dado no está cargado), probabilidad de fracaso $1-p=5/6$; ¿si se lanza el dado $n=10$ veces, cuál sería la probabilidad de obtener $x=4$ Ases? Nótese que el dado puede ser lanzado un número infinito de veces.

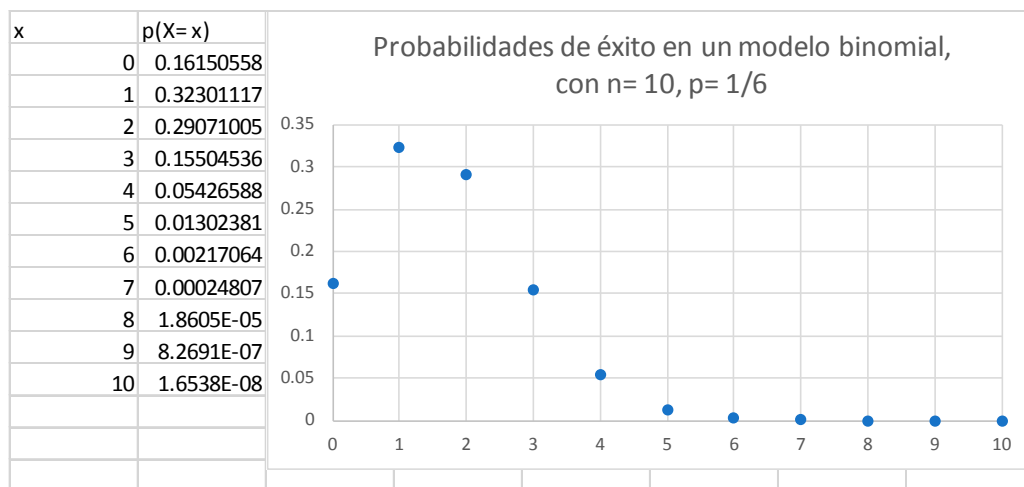
En este caso, la forma de calcular probabilidades sería con el modelo binomial:

$$\begin{aligned}
 p(x=0) &= \binom{n=10}{x=0} \left(\frac{1}{6}\right)^{x=0} \left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-x=10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0.16150558 \\
 p(x=1) &= \binom{n=10}{x=1} \left(\frac{1}{6}\right)^{x=1} \left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-x=9} = 10 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0.32301117 \quad \dots (20) \\
 p(x=2) &= \binom{n=10}{x=2} \left(\frac{1}{6}\right)^{x=2} \left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-x=8} = \left(\frac{10*9}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0.29071005
 \end{aligned}$$

Estas probabilidades pueden ser calculadas usando Excel, el comando sería:

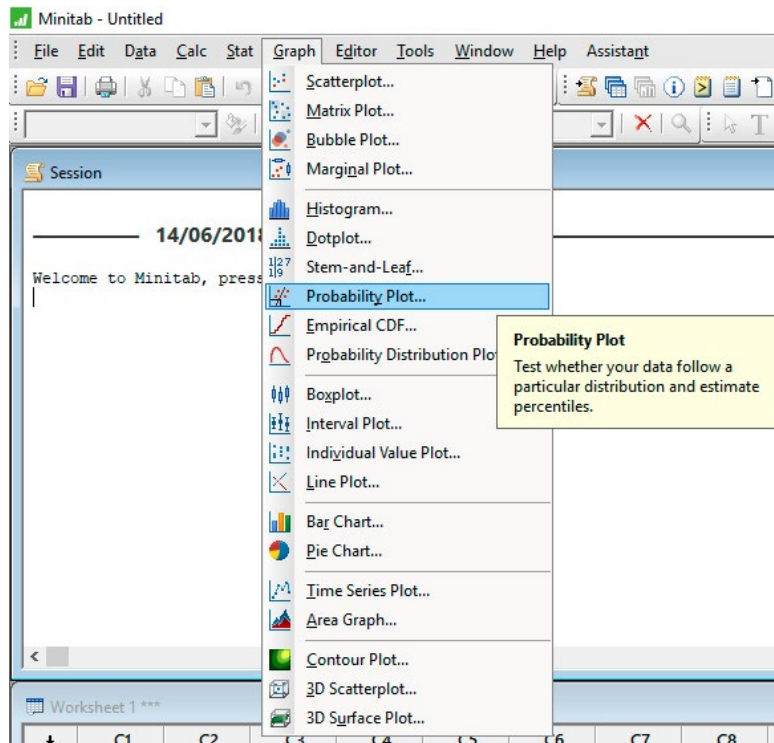
=DISTR.BINOM.N(x= número de éxitos, n= número de ensayos, p=probabilidad de éxito, acumulada=1 o puntual=0). Los resultados se muestran a continuación, así como su gráfica correspondiente:

Figura 10. Gráfica de probabilidad del modelo binomial



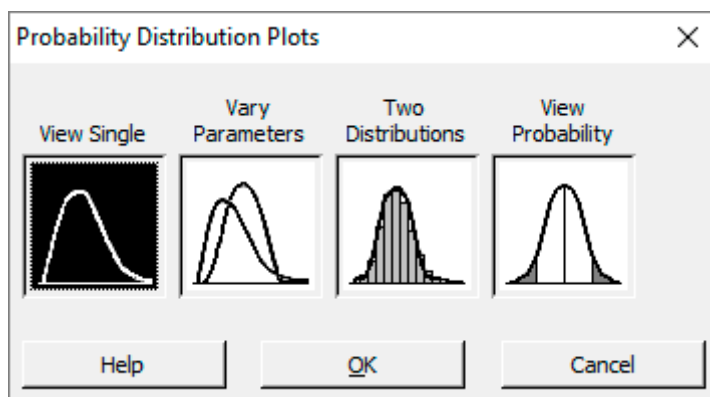
Puede utilizarse Minitab con los siguientes pasos: entre al menú Graph, luego Probability Plot, como se muestra en la figura 11.

Figura 11



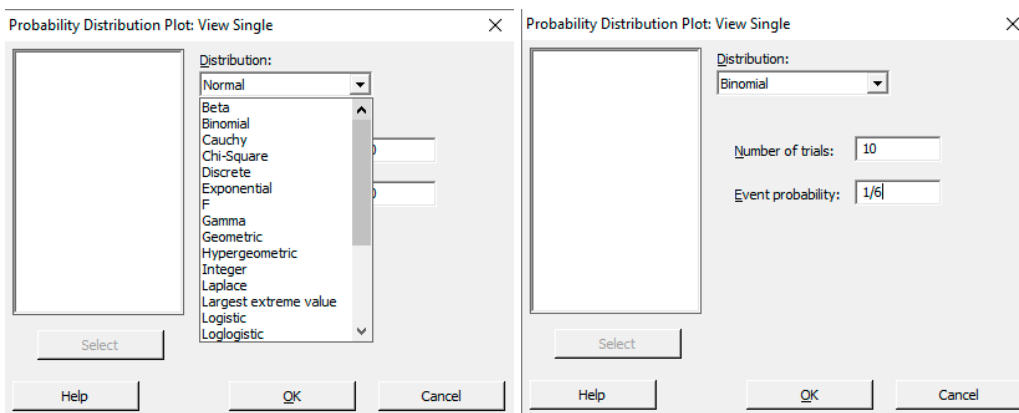
Aparece la pantalla que se muestra en la figura 12 en donde se elige la opción View Single.

Figura 12

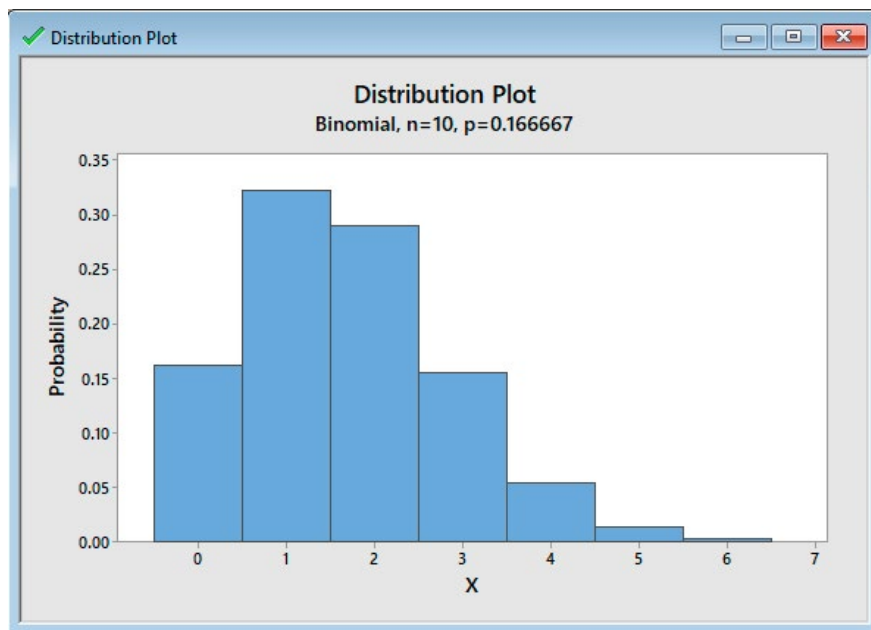


Después de dar Ok en la pantalla de la figura 12, aparece la pantalla de la figura 13.

Figura 13

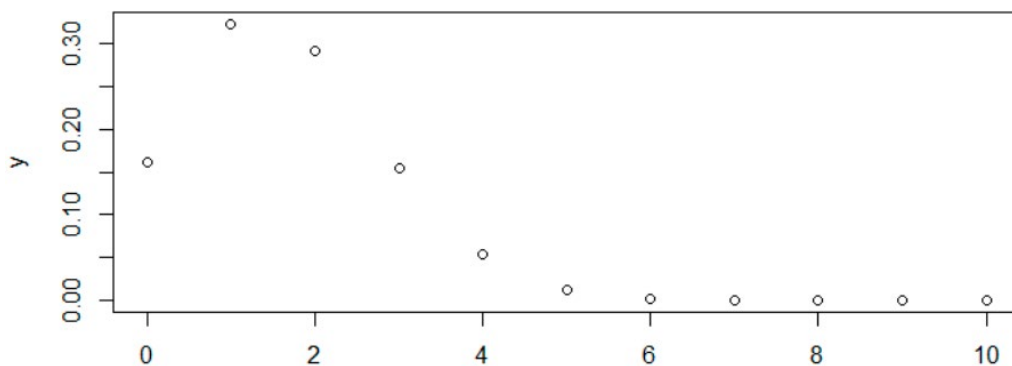


En la pantalla de la figura 13 se elige la función de probabilidad por graficar (la opción preelegida es la normal), en este caso se elige la binomial y se teclean el número de ensayos $n=10$ y la probabilidad de éxito en cada ensayo $p=1/6=0.166667$, con lo cual se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 14.

Figura 14


También puede usarse el lenguaje de programación R, con el siguiente comando. Su gráfica se muestra en la figura 15.

```
x<- 0:10
y<- dbinom(x, n, p)
plot(x,y)
```

Figura 15. Gráfica de la Distribución Binomial usando R


El modelo hipergeométrico es el que debe aplicarse cuando el lote es finito con N artículos, de los cuales se sabe que D son defectuosos, y se saca una muestra de tamaño n , es decir, se realizan n ensayos aleatorios estadísticamente independientes.

El modelo binomial es un caso especial del modelo hipergeométrico, cuando N es infinito y la probabilidad de éxito en cada ensayo, p , es constante. El modelo binomial se puede usar como aproximación del hipergeométrico cuando $n/N \leq 0.1$ y se tienen artículos defectuosos mezclados aleatoriamente con no defectuosos.

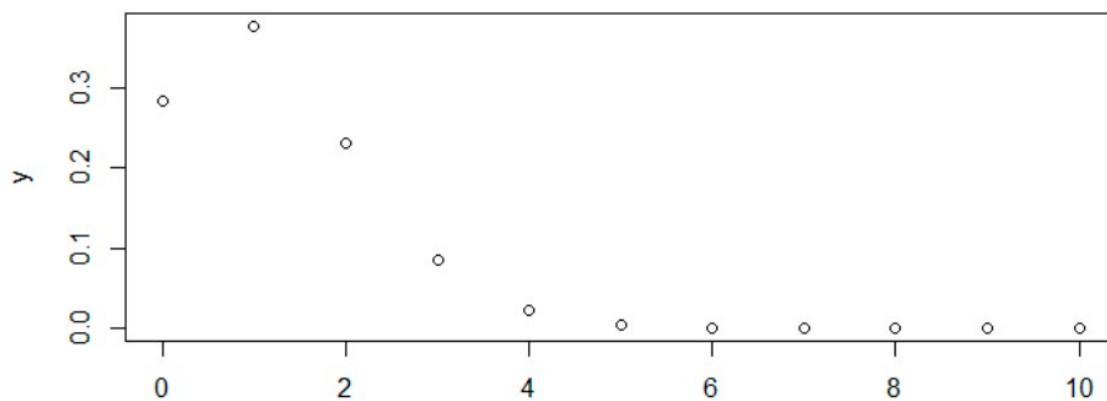
Ejemplo 5.2. Para ilustrar la aplicación del modelo hipergeométrico, suponga que se tiene un lote con $N=500$ artículos, de los cuales se sabe que existen $D=30$ defectuosos y se obtiene aleatoriamente una muestra de $n=20$ artículos del lote; ¿cuál es la probabilidad de obtener $x=5$ defectuosos?

$$p(x = 5, n = 20, D = 30, N = 500, Acum = 0) = \frac{\binom{D = 30}{x = 5} \binom{N - D = 470}{n - x = 15}}{\binom{N = 500}{n = 20}} = 0.00393287$$

Nuevamente, ahora usando R, se obtienen los resultados y la gráfica que se muestra en la figura 16.

```
x<-0:10
y<- dhyper(x, 30,470,20)
plot(x,y)
```

Figura 16. Gráfico de probabilidad del modelo hipergeométrico usando R.



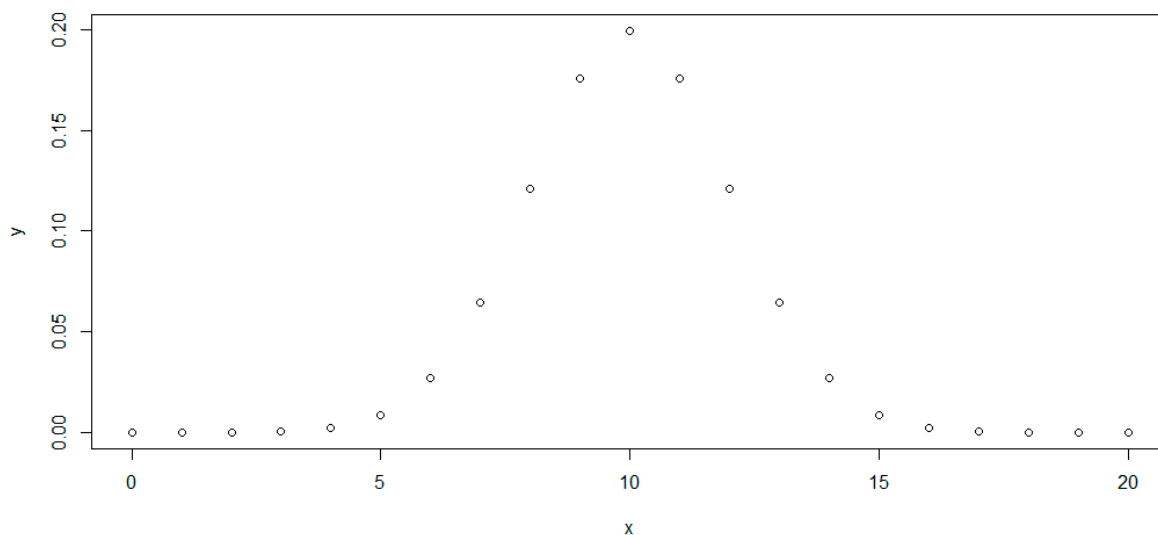
En la Tabla 7 que se muestra a continuación se resumen los principales modelos probabilísticos continuos que se usan para aproximar el comportamiento de algunas características de interés de fenómenos físicos o de procesos industriales.

Tabla 7. Modelos Probabilísticos Continuos

| Distribución | Función Densidad de Probabilidad: $f(x)$ | Función de Distribución o de Probabilidad Acumulada: $F(x)=P(t \leq x)$ | Media | Varianza |
|--------------|---|--|--|---|
| Uniforme | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$ | $\frac{b+a}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Triangular | $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} & \text{si } b < x \leq c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases}$ | $\frac{c+b+a}{3}$ | $\frac{1}{18}[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$ |
| Exponencial | $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| Normal | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ | $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} dt$ | μ | σ^2 |
| LogNormal | $f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(x)-\mu_x)^2}{\sigma_y^2}}$ | $F(x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(t)-\mu_x)^2}{\sigma_y^2}}}{t} dt$ | $\mu_x = e^{\left[\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}\right]}$ | $\sigma_x^2 = \mu_x^2 \left(e^{\sigma_y^2} - 1\right)$ |
| Gamma | $f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}$ | $F(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \int_0^x (\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t} dt$ | $\frac{r}{\lambda}$ | $\frac{r}{\lambda^2}$ |
| Beta | $f(x) = \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(r)} x^{\lambda-1} (1-x)^{r-1}$ $0 \leq x \leq 1 \quad \lambda > 0 \quad r > 0$ | $F(x) = \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(r)} \int_0^x t^{\lambda-1} (1-t)^{r-1} dt$ | $\mu_x = \frac{\lambda}{\lambda+r}$ | $\sigma_x^2 = \frac{\lambda r}{(\lambda+r)^2(\lambda+r+1)}$ |
| Weibull | $f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^\beta}$ | $F(x) = \frac{\beta}{\delta} \int_{\gamma}^x \left(\frac{t-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\delta}\right)^\beta} dt$ | $\mu_x = \gamma + \delta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$ | $\sigma_x^2 = \delta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right]$ |

Para el caso de los modelos probabilísticos continuos, la variable aleatoria toma valores continuos en un rango establecido, aunque también puede usarse como aproximación de modelos probabilísticos discretos; en este último caso, para la distribución de probabilidad normal con valores discretos en x , con media 10 y desviación estándar 2, su gráfica se trazaría con R, de la siguiente forma:

```
x<-0:20
y<-dnorm(x,10,2)
plot(x,y)
```

Figura 17


En la Tabla 8 que se muestra a continuación se resumen los principales modelos probabilísticos de distribuciones muestrales que se usan para aproximar el comportamiento de algunas características de interés de fenómenos físicos o de procesos industriales.

Tabla 8. Modelos Probabilísticos de Distribuciones Muestrales

| Distribución | Función Densidad de Probabilidad: $f(x)$ | Función de Distribución o de Probabilidad Acumulada: $F(x)=P(t \leq x)$ | Media | Varianza |
|--------------------------|---|---|------------------------------------|---|
| Ji Cuadrada (χ^2) | $f(u) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}$ | $F(u) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^u v^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{v}{2}}$ | k | $2k$ |
| t de Student | $f(t) = \frac{\Gamma\left[\frac{k+1}{2}\right]}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{\left[\frac{t^2}{k} + 1\right]^{\frac{k+1}{2}}}$ | $F(t) = \frac{\Gamma\left[\frac{k+1}{2}\right]}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left[\frac{k}{2}\right]} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\left[\frac{s^2}{k} + 1\right]^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{\left[\frac{s^2}{k} + 1\right]^{\frac{k+1}{2}}} ds$ | 0 | $\frac{k}{k-2}$ |
| F de Fisher | $h(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{u}{v}\right) f^{\frac{u-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left[\frac{u}{v} f + 1\right]^{\frac{(u+v)}{2}}}$ | $H(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{u}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^f \frac{t^{\frac{u-1}{2}}}{\left[\frac{u}{v} t + 1\right]^{\frac{(u+v)}{2}}} dt$ | $\mu_f = \frac{v}{v-2}$ $v > 2$ | $\sigma_f^2 = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}$ $v > 4$ |

Los modelos probabilísticos de Distribuciones Muestrales se aplican en parámetros estadísticos muestrales de poblaciones generalmente consideradas como normales. Se ilustrarán algunas de ellas.

Ya se estableció en la expresión 16 que, si x es normal, su media muestral también lo es; expresado en lenguaje matemático, se diría que:

$$x \sim N(\mu_x, \sigma_x) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$$

Si x es normal de media 10 y desviación estándar 4, entonces, la media muestral de tamaño $n=16$ tendría distribución normal de media 10 y desviación estándar 1.

Por otra parte, se sabe que la variable aleatoria:

$$\chi^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \dots + z_k^2 \quad \dots (21)$$

presenta una distribución de probabilidad Ji cuadrada con $n-1$ grados de libertad. Al respecto, obsérvese que la varianza muestral se calcula como:

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{(n-1)} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right] \quad \dots (22)$$

Si se sustituye la media muestral por la media poblacional y se divide en ambos miembros entre la varianza poblacional, la varianza muestral también puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_x^2} = \left[\left(\frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad \dots (23)$$

Lo que implica que esta variable

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_x^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \dots (24)$$

presenta una distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, con media $(n-1)$ y varianza $2(n-1)$.

Por otra parte, se sabe que la variable $\bar{x} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$ es normal por una de dos razones, que la población de datos sea normal o que el tamaño de muestra es lo suficientemente grande como para suponer que se cumple el teorema del límite central.

Nótese que la variable

$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}} = \frac{\frac{(\bar{x} - \mu_x)}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1) S_{n-1}^2}{(n-1) \sigma_x^2}}} = \frac{(\bar{x} - \mu_x)}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} \quad \dots (25)$$

Lo que implica que esta variable

$$\frac{(\bar{x} - \mu_x)}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \quad \dots (26)$$

es una variable t de Student con (n-1) grados de libertad, con media cero y varianza k/(k-2).

Asimismo, la variable aleatoria:

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{k_1}}{\frac{\chi_2^2}{k_2}} = \frac{\frac{(n_1 - 1) S_1^2}{(n_1 - 1) \sigma_1^2}}{\frac{(n_2 - 1) S_2^2}{(n_2 - 1) \sigma_2^2}} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad \dots (27)$$

Lo que conduce a afirmar que la variable

$$\frac{\frac{\sigma_2^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{S_1^2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1} \quad \dots (28)$$

presenta distribución F de Fisher con (n1-1) grados de libertad en el numerador y (n2-1) grados de libertad en el denominador, con media (n2-1)/(n2-3) y varianza $2(n_2-1)^2(n_1+n_2-4)/[(n_1-1)(n_2-3)^2(n_2-5)]$.

De las distribuciones de probabilidad muestrales deducidas anteriormente surgen los intervalos de confianza que se muestran en las tablas 9 y 10.

Tabla 9. Estimadores por intervalos de confianza para una población

| Variable | Condiciones iniciales | Estimador Puntual | Intervalo Bilateral de Confianza al $(1-\alpha)100\%$ | Error |
|--------------|--|-------------------|--|---|
| μ_x | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ $N \rightarrow \infty$ σ_x^2 conocida | \bar{x} | $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ |
| μ_x | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ N finita σ_x^2 conocida | \bar{x} | $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ |
| μ_x | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ $N \rightarrow \infty$ | \bar{x} | $\bar{x} - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_{(n-1)}}{\sqrt{n}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_{(n-1)}}{\sqrt{n}}$ | $E = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_{(n-1)}}{\sqrt{n}}$ |
| μ_x | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ N finita | \bar{x} | $\bar{x} - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_{(n-1)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_{(n-1)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ | $E = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_{(n-1)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ |
| σ_x^2 | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ $N \rightarrow \infty$ | $S_{(n-1)}^2$ | $\frac{(n-1)S_{(n-1)}^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)S_{(n-1)}^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}$ | $E = \frac{(n-1)S_{(n-1)}^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}$ |
| σ_x^2 | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ N finita | $S_{(n-1)}^2$ | $\frac{(n-1)S_{(n-1)}^2 \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)S_{(n-1)}^2 \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}$ | $E = \frac{(n-1)S_{(n-1)}^2 \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}$ |
| p | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ $N \rightarrow \infty$ | \hat{p} | $\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ |
| p | $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ $N \rightarrow \infty$ | \hat{p} | $\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \frac{N-n}{N-1}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \frac{N-n}{N-1}}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \frac{N-n}{N-1}}$ |

Tabla 10. Estimadores por intervalos de confianza para dos poblaciones

| Variable | Intervalo Bilateral de Confianza al $(1-\alpha)100\%$ | Error | Toma de Decisiones |
|---------------------------------|---|--|--|
| $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | $\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)}$ | $E = \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)}$ | Si el intervalo contiene al uno entonces las varianzas poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | $\frac{S_1^2}{S_2^2} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) F_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)}$ | $E = \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)}$ | Si el intervalo contiene al uno entonces las varianzas poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $p_2 - p_1$ | $(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} \leq p_2 - p_1 \leq (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las fracciones defectuosas poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $p_2 - p_1$ | $(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)} \leq p_2 - p_1 \leq (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las fracciones defectuosas poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \leq (\mu_2 - \mu_1) \leq (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)} \leq (\mu_2 - \mu_1) \leq (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)}$ | $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2+n_1-2\right)} \sqrt{\frac{(n_2-1)S_2^2 + (n_1-1)S_1^2}{n_2+n_1-2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} \leq (\mu_2 - \mu_1) \leq (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2+n_1-2\right)} \sqrt{\frac{(n_2-1)S_2^2 + (n_1-1)S_1^2}{n_2+n_1-2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}$ | $E = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2+n_1-2\right)} \sqrt{\frac{(n_2-1)S_2^2 + (n_1-1)S_1^2}{n_2+n_1-2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2+n_1-2\right)} \sqrt{\frac{(n_2-1) \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1} \right) S_2^2 + (n_1-1) \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1} \right) S_1^2}{n_2+n_1-2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} \leq (\mu_2 - \mu_1) \leq (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2+n_1-2\right)} \sqrt{\frac{(n_2-1) \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1} \right) S_2^2 + (n_1-1) \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1} \right) S_1^2}{n_2+n_1-2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}$ | $E = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2+n_1-2\right)} \sqrt{\frac{(n_2-1) \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1} \right) S_2^2 + (n_1-1) \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1} \right) S_1^2}{n_2+n_1-2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)} \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}} \leq (\mu_2 - \mu_1) \leq (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)} \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}$ $\nu = \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1} + \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1}} - 2$ | $E = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)} \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)} \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)} \leq (\mu_2 - \mu_1) \leq (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)} \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)}$ $\nu = \frac{\left(\frac{S_2}{n_2} \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right) + \frac{S_1}{n_1} \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_2}{n_2} \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)^2}{n_2+1} + \frac{\left(\frac{S_1}{n_1} \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)\right)^2}{n_1+1}}$ | $E = t_{\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)} \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) + \frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right)}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $\bar{D} - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $E = \bar{D} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |
| $\mu_2 - \mu_1$ | $\bar{D} - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ | $E = \bar{D} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ | Si el intervalo contiene al cero entonces las medias poblacionales son iguales, de lo contrario son diferentes |

La capacidad o habilidad de una máquina o proceso (*capability*= *capacity*+*ability* en inglés) se define como la aptitud para producir artículos que cumplan con las especificaciones. También se puede interpretar como la aptitud del proceso o de una máquina, para cumplir los límites de tolerancia.

El análisis de capacidad o habilidad de proceso se suele realizar cuando se necesita estudiar un nuevo proceso, cuando se ha modificado alguna de las partes esenciales del proceso, cuando se han emplazado una o más máquinas en otro lugar, cuando ha habido un reajuste en el funcionamiento de las máquinas, cuando los gráficos de control muestran cierta inestabilidad, etcétera.

Para realizar un análisis de capacidad o habilidad de proceso a través del estudio de su variabilidad, se requiere el conocimiento o la estimación de la distribución de la característica estudiada, o bien la estimación de los parámetros que definen dicha variabilidad.

Se define el análisis de la capacidad de un proceso como un estudio de ingeniería orientado a estimar la aptitud del proceso para cumplir especificaciones. Este análisis de capacidad es parte decisiva de un programa general de mejoramiento de la calidad. Entre los usos más importantes de los datos de dicho análisis de aptitud de proceso pueden mencionarse los siguientes:

- a. Predecir que tan bien cumple el proceso las tolerancias.
- b. Ayudar a los diseñadores o realizadores del producto o servicio a seleccionar o modificar un proceso.

- c. Ayudar a establecer un vínculo entre muestreo y controles de proceso.
- d. Especificar los requisitos para el funcionamiento de nuevos equipos.
- e. Elegir entre diferentes proveedores.
- f. Planear la sucesión de procesos de producción cuando existe un efecto interactivo de los procesos sobre las tolerancias.
- g. Reducir la variabilidad en un proceso de manufactura.

Las condiciones previas que se deben tener en cuenta, en un estudio de capacidad o habilidad de una máquina o proceso, son:

1. La máquina o proceso escogido para su estudio debe ser representativo de la totalidad de máquinas o procesos.
2. En el caso de máquinas, se debe garantizar que la materia prima en cuestión esté dentro de especificaciones.
3. La máquina o proceso a la cual se le evaluará su capacidad o habilidad, debe estar bajo control estadístico para garantizar que su variabilidad sea estable.
4. Analizar como mínimo 100 unidades, midiendo la característica objeto de estudio.
5. Verificar que la característica en cuestión se distribuye normalmente.

Un estudio de la capacidad o habilidad de un proceso es un análisis de la variabilidad que contiene un proceso. Este estudio puede ser en un período corto de tiempo o puede ser a largo plazo. Este análisis se hace considerando los límites de especificación que presenta una característica de calidad en una etapa del proceso. Suponga que una característica de calidad de un proceso se representa como θ y según una norma técnica o una especificación de ingeniería, esta debe mantenerse entre un límite inferior LIE y un límite superior LSE. Por el momento, se supondrá que:

$$\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta) \quad \dots (29)$$

Tal como se dijo anteriormente, la capacidad de proceso puede estimarse en un período corto de tiempo, para lo cual, se estima la desviación estándar durante ese período de tiempo, tomando muestras periódicas, o se estima

la desviación estándar de proceso en períodos largos de tiempo a través de muestras periódicas. Para distinguir uno de otro, se acostumbra usar Cp para el análisis de capacidad de corto plazo o Pp para el análisis de capacidad de largo plazo.

El Índice de Capacidad o Habilidad de Proceso, Cp o Pp, se define como:

$$C_p = \frac{\text{Ancho_Especificado}}{\text{Ancho_de_Proceso}} = \frac{LSE - LIE}{LSP - LIP} = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}_\theta} \quad \dots (30)$$

Nótese que para su cálculo es necesario obtener un buen estimador de la desviación estándar de la variable aleatoria θ , ya que la varianza poblacional no es conocida.

Ejemplo 7.1. Se muestran a continuación seis ejemplos de qué valores proporciona el Cp para diferentes procesos. Se supondrá que las especificaciones establecen que la variación permitida de θ debe estar entre LIE= 4 y LSE= 12, con media de diseño en D= 8. Para efectos didácticos se supondrá que todos los procesos tienen centrada su media en la media de diseño. Se tienen seis procesos diferentes con el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 2) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 2 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 14 \\ \theta_2 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 1.33) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 4 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 12 \\ \theta_3 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 1) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 5 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 11 \\ \theta_4 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 0.8) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 5.6 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 10.4 \\ \theta_5 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 0.67) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 6 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 10 \\ \theta_6 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 0.33) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 7 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 9 \end{aligned} \quad \dots (31)$$

En la figura 18 que se muestra a continuación se calculan los valores de Cp. En todos los casos el ancho especificado es LSE-LIE= 12-4=8.

Nótese que la fracción de artículos que cumple la especificación se puede obtener como la probabilidad:

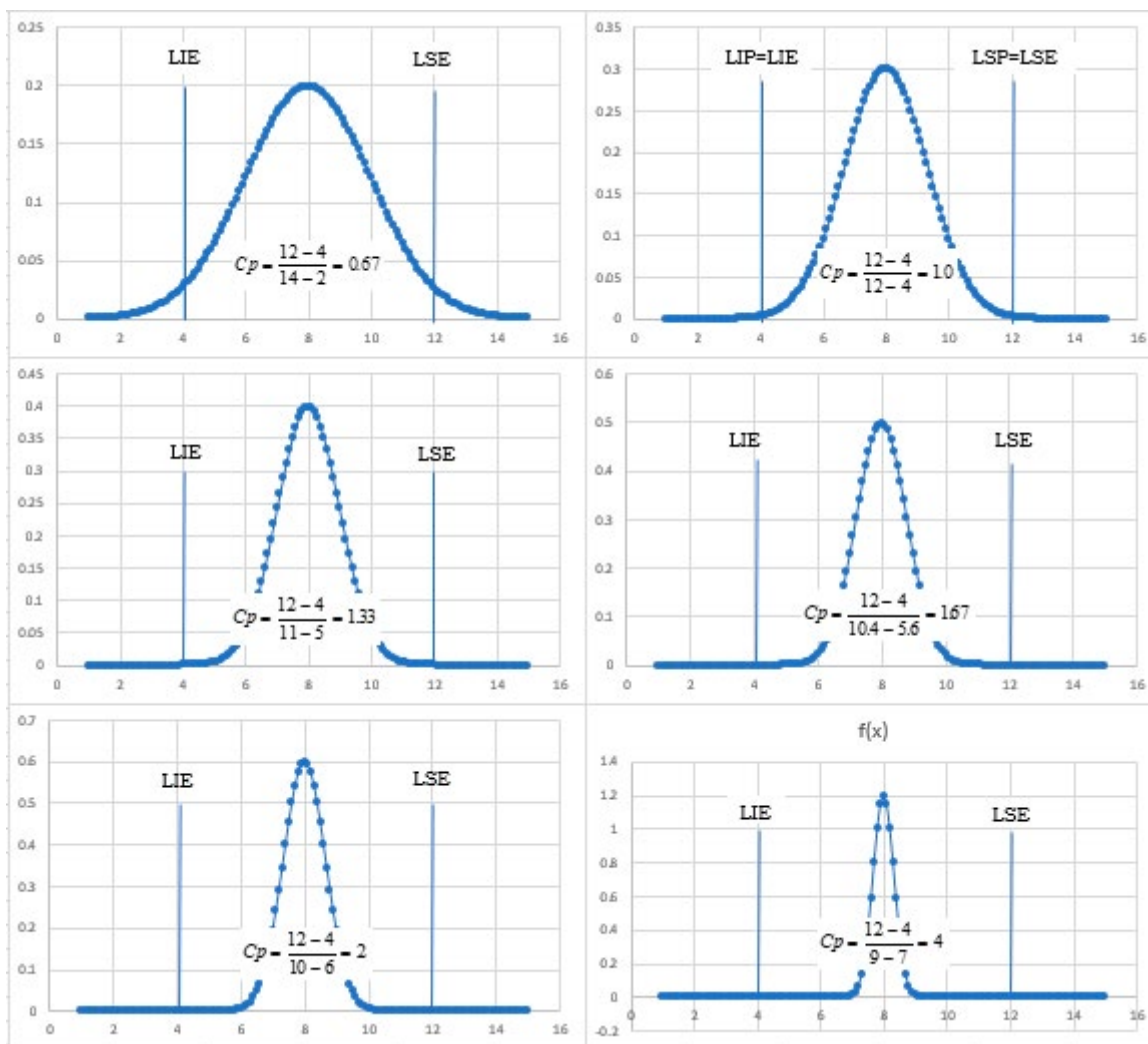
$$\begin{aligned} p(LIE \leq \theta \leq LSE) &= p\left(\frac{LIE - \mu_\theta}{\sigma_\theta} \leq \frac{\theta - \mu_\theta}{\sigma_\theta} \leq \frac{LSE - \mu_\theta}{\sigma_\theta}\right) \quad \dots (32) \\ p\left(\frac{LIE - \mu_\theta}{\sigma_\theta} \leq z \leq \frac{LSE - \mu_\theta}{\sigma_\theta}\right) &= p\left(z \leq \frac{LSE - \mu_\theta}{\sigma_\theta}\right) - p\left(z < \frac{LIE - \mu_\theta}{\sigma_\theta}\right) \end{aligned}$$

El complemento de la probabilidad anterior sería la fracción defectuosa del proceso.

La fracción defectuosa p , de cada uno de los procesos anteriores, sería:

$$\begin{array}{lll}
 \theta_1 \sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 2) & 1 - p = 0.9545 & p = 0.0455003 \\
 \theta_2 \sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 1.33) & 1 - pp = 0.9973 & p = 0.0026998 \\
 \theta_3 \sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 1) & 1 - p = 0.999936658 & p = 6.334E - 05 \\
 \theta_4 \sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 0.8) & 1 - p = 0.999999427 & 5.733E - 07 \\
 \theta_5 \sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 0.67) & 1 - p = 0.99999998 & 1.973E - 09 \\
 \theta_6 \sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 0.33) & 1 - p = 1 & 1
 \end{array} \dots (33)$$

Figura 18. Capacidad de seis procesos diferentes centrados en la media de diseño



Como se puede apreciar en las expresiones 33, las fracciones defectuosas en muchas ocasiones resultan ser muy pequeñas para expresarlas en porcentaje, es más conveniente expresarlas en partes por millón, ppm, como se ilustran en Tabla 11, remarcando que se trata de procesos centrados, es decir, la media de proceso coincide con la media de diseño:

Tabla 11. Relación entre C_p y p

| C_p | p (%) | p (ppm) |
|-------|---------|-----------|
| 0.67 | 4.5500% | 45,500 |
| 1 | 0.2700% | 2,700 |
| 1.33 | 0.0063% | 63.34 |
| 1.67 | 0.0001% | 0.5733 |
| 2 | 0.0000% | 0.0019 |
| 4 | 0.0000% | 0 |

¿Cuándo se podría decir que un proceso es capaz?

Podría pensarse que el valor de referencia es $C_p = 1.0$, pero esto solo que se estuviera seguro que la variación de proceso es igual a la variación especificada, lo cual no es el caso, por qué en casos prácticos, la desviación estándar del proceso no se conoce, sino que se estima. Por ello, se acostumbra tomar como referencia el valor $C_p = 1.33$. Se dice que un proceso es capaz, si su C_p es 1.33 o mayor; es más, mientras más grande sea C_p es mejor.

Como se puede apreciar un C_p de 1.33 representa que la variación del proceso es exactamente igual a $\frac{3}{4}$ partes de la variación especificada o permitida. De hecho, una meta que se persigue en los procesos es que su C_p sea 2.0. Este último valor se alcanza cuando la variación de proceso es exactamente la mitad de la variación especificada. Nótese que esto se alcanza cuando el numerador del C_p tiene el doble del 6σ del denominador. Un enfoque de calidad que surgió en Motorola y otras empresas persigue esta meta, por ello, a este enfoque se le conoce como Enfoque Seis Sigma.

La forma en la que se definió el C_p anteriormente no puede generalizarse, debido a que existen procesos que no tienen los dos límites de especificación.

Por ejemplo, en el caso de una característica de calidad como la resistencia que debe tener un cable, la especificación de interés es el límite inferior de especificación; en este caso, se define otro indicador conocido como Índice de Capacidad de Proceso Unilateral Inferior, C_{pl} , el cual se calcula de la siguiente forma:

$$C_{pl} = \frac{\hat{\mu}_\theta - LIE}{3\hat{\sigma}_\theta} \quad \dots (34)$$

Otras características de calidad, por ejemplo, el tiempo de espera, trabajan con un máximo tiempo de espera, por lo que, en estos casos, se utiliza el Índice de Capacidad de Proceso Unilateral Superior, el cual se calcula como:

$$C_{pu} = \frac{LSE - \hat{\mu}_\theta}{3\hat{\sigma}_\theta} \quad \dots (35)$$

Precisamente, la debilidad del C_p es que solo compara los anchos de especificación y de proceso, nunca considera qué tan lejos está la media de proceso $\hat{\mu}_x$ de la media de diseño D ; por ello, en el caso de los procesos sesgados, se define un indicador más exacto para calcular la capacidad del proceso, el cual se conoce como C_{pk} , y que se define con base en los dos indicadores C_{pl} y C_{pu} anteriores:

$$C_{pk} = \min \{ C_{pl}, C_{pu} \} = \min \left\{ \frac{\hat{\mu}_\theta - LIE}{3\hat{\sigma}_\theta}, \frac{LSE - \hat{\mu}_\theta}{3\hat{\sigma}_\theta} \right\} \quad \dots (36)$$

Nótese que si el proceso estuviera centrado, es decir, si la media de proceso fuera igual a la media de diseño, entonces C_p y C_{pk} son iguales. Si existe sesgo, entonces el C_{pk} siempre será menor que el C_p ; es más, la cota superior del C_{pk} es el C_p y se alcanza cuando el proceso queda centrado con respecto a su media de diseño D .

Sin embargo, C_{pk} sigue siendo una medida inadecuada del centrado del proceso, ya que para cualquier valor fijo de $\mu\theta$ en el intervalo de LIE a LSE , el C_{pk} depende inversamente de σ_q y se hace grande cuando σ_q tiende a cero. Esta característica puede hacer inadecuado a C_{pk} , por eso se define un nuevo índice de capacidad apto para indicar el centrado del proceso, al cual se le conoce como C_{pm} :

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \dots (37)$$

$$\xi = \frac{\hat{\mu}_\theta - D}{\hat{\sigma}_\theta} \quad \dots (38)$$

En donde a la diferencia $\hat{\mu}_x - D$ se le conoce como sesgo y a ξ se le conoce como sesgo estandarizado; D representa la media de diseño, μ_q la media de proceso y σ_q la desviación estándar de proceso.

De la misma forma, se tiene el concepto de C_{pk}_m :

$$C_{pk}_m = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \dots (39)$$

Otra forma de presentar la capacidad o habilidad de proceso es a través de un intervalo de confianza, lo que permite asignarle un nivel de confianza a su estimación. Montgomery, Douglas C. en su célebre libro *Introduction to Statistical Quality Control*, 6ª Edition, John Wiley and Sons. 2009, página 359, ecuación 8-20, establece que si la característica de calidad analizada presenta distribución normal, entonces, el C_{pk} puede obtenerse con la siguiente expresión:

$$\hat{C}_{pk} \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}{n-1}} \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} \sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}{n-1}} \quad \dots (40)$$

Ejemplo 7.2. Se ilustrarán a continuación seis ejemplos de los valores que toma un proceso, de sus límites de especificación y de los diversos valores que toma la capacidad de proceso según los diferentes índices:

Suponga que en un proceso productivo las especificaciones deben estar entre $LIE= 10$ y $LSE= 20$, con una media de diseño $D= 15$. Se supondrán los siguientes procesos:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &\sim N(\mu_\theta = 8, \sigma_\theta = 2) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 2 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 14 \\
 \theta_2 &\sim N(\mu_\theta = 21, \sigma_\theta = 1) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 18 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 24 \\
 \theta_3 &\sim N(\mu_\theta = 15, \sigma_\theta = 7/3) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 8 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 22 \\
 \theta_4 &\sim N(\mu_\theta = 12, \sigma_\theta = 2/3) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 10 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 14 \\
 \theta_5 &\sim N(\mu_\theta = 14, \sigma_\theta = 1) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 11 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 17 \\
 \theta_6 &\sim N(\mu_\theta = 15, \sigma_\theta = 1/3) & LIP &= \mu_\theta - 3\sigma_\theta = 14 & LSP &= \mu_\theta + 3\sigma_\theta = 16
 \end{aligned} \quad \dots (41)$$

Se obtendrán los valores que toman cada uno de los índices Cp, Cpl, Cpu, Cpk, Cpm y Cpkm, como se muestran en la Tabla 12.

Tabla 12

| Proceso | Media | Desv Est | ξ | Cp | Cpl | Cpu | Cpk | Cpm | Cpkm |
|---------|-------|----------|-------|------|-------|-------|-------|------|-------|
| 1 | 8.00 | 2.00 | -3.50 | 0.83 | -0.33 | 2.00 | -0.33 | 0.23 | -0.09 |
| 2 | 21.00 | 1.00 | 6.00 | 1.67 | 3.67 | -0.33 | -0.33 | 0.27 | -0.05 |
| 3 | 15.00 | 2.00 | 0.00 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 |
| 4 | 12.00 | 0.67 | -4.50 | 2.50 | 1.00 | 4.00 | 1.00 | 0.54 | 0.22 |
| 5 | 14.00 | 1.00 | -1.00 | 1.67 | 1.33 | 2.00 | 1.33 | 1.18 | 0.94 |
| 6 | 15.00 | 0.33 | 0.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 |

Las gráficas de estos procesos se muestran en la figura 19.

Nótese que en el segundo proceso el Cp= 1.67 da la idea que el proceso es capaz; sin embargo, observe que el Cpk=-0.33 es negativo, lo cual indica un proceso totalmente incapaz. Aunque la variación de proceso es 6 comparada con la especificada 10, de allí el $10/6=1.67$, el proceso se encuentra descentrado o desfasado, ya que su media de proceso es 21 (cae fuera de la especificación) y la media especificada es 15.

También, obsérvense los procesos 3 y 6, cuando la media de proceso y la media de diseño coinciden, todos los indicadores de capacidad o habilidad de proceso son iguales.

Ahora se mostrará cuál es la fracción defectuosa por abajo del límite inferior, cuál es la fracción defectuosa por encima del límite superior y cuál es la fracción defectuosa total para los seis procesos mostrados en la figura 19. Estas fracciones defectuosas se calculan suponiendo que la variación del proceso es normal, con las siguientes fórmulas:

Fracción por debajo del Límite Inferior de Especificación:

$$p(\theta < \text{LIE}) \quad \dots (42)$$

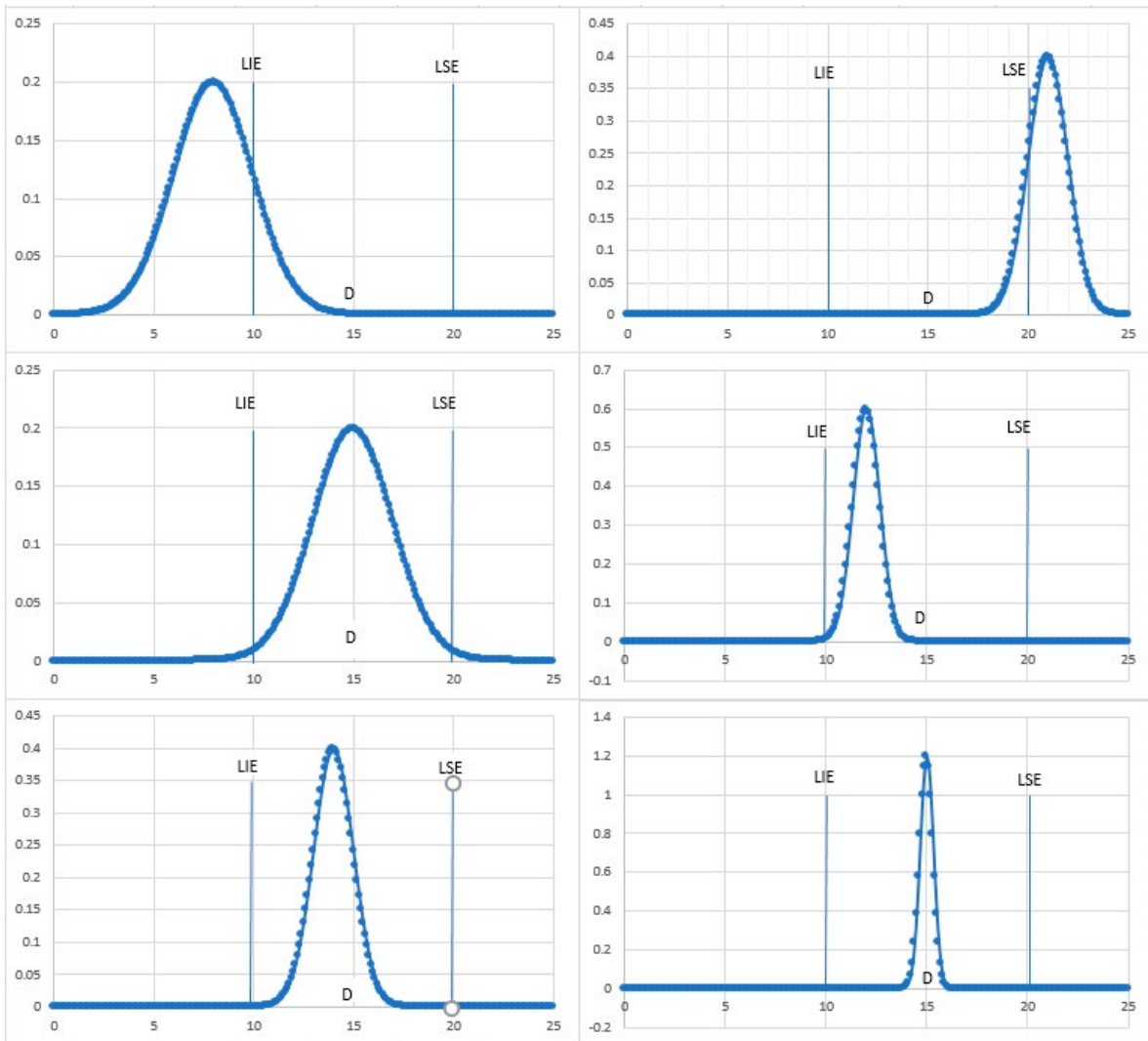
Fracción por encima del Límite Superior de Especificación:

$$p(\theta > \text{LSE}) = 1 - p(\theta \leq \text{LSE}) \quad \dots (43)$$

Fracción defectuosa total:

$$p(\theta < \text{LIE}) + p(\theta > \text{LSE}) \quad \dots (44)$$

Figura 19. Capacidad o habilidad de seis procesos diferentes



Utilizando Excel, el cálculo sería con la siguiente instrucción:

$$\begin{aligned}
 p(\theta < \text{LIE}) &= \text{DISTR.NORM.N}(\text{LIE}, \text{Media}, \text{Desv Est}, 1) \\
 p(\theta > \text{LSE}) &= 1 - \text{DISTR.NORM.N}(\text{LSE}, \text{Media}, \text{Desv Est}, 1)
 \end{aligned}
 \quad \dots (45)$$

Si se usa R, la instrucción sería la siguiente:

$$\begin{aligned}
 p(\theta < \text{LIE}) &= \text{pnorm}(\text{LIE}, \text{Media}, \text{Desv Est}) \\
 p(\theta > \text{LSE}) &= 1 - \text{pnorm}(\text{LSE}, \text{Media}, \text{Desv Est})
 \end{aligned}
 \quad \dots (46)$$

Los resultados se muestran en la tabla 13.

Tabla 13

| Proceso | Media= | Desv Est= | $p(q < \text{LIE})=$ | $p(q > \text{LSE})=$ | $p(\text{Frac Def.})$ |
|---------|--------|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 2 | 0.841344746 | 9.86588E-10 | 0.841344747 |
| 2 | 21 | 1 | 1.91066E-28 | 0.841344746 | 0.841344746 |
| 3 | 15 | 2 | 0.006209665 | 0.006209665 | 0.012419331 |
| 4 | 12 | 0.666667 | 0.001349905 | 0 | 0.001349905 |
| 5 | 14 | 1 | 3.16712E-05 | 9.86588E-10 | 3.16722E-05 |
| 6 | 15 | 0.333333 | 3.67014E-51 | 0 | 3.67014E-51 |

Observe que los procesos 1 y 2 tienen la misma fracción defectuosa.

Tabla 14. Decisión sobre el valor que toma el Cpk

| Valor del Cpk | Clase de Proceso | Explicación |
|---------------------------------|------------------|--|
| $\text{Cpk} \geq 2$ | Clase Mundial | Calidad Seis Sigma |
| $1.33 \leq \text{Cpk} < 2$ | 1 | Más que adecuado |
| $1.0 < \text{Cpk} < 1.33$ | 2 | Capaz pero requiere control a medida que se acerca a 1.0 |
| $0.67 \leq \text{Cpk} \leq 1.0$ | 3 | No Capaz. Requiere adecuarse el proceso |
| $\text{Cpk} < 0.67$ | 4 | No Capaz. Requiere modificaciones fuertes |

Para ilustrar la aplicación y la importancia del análisis de habilidad o capacidad de proceso, se resolverá a continuación un ejemplo práctico de medición de la habilidad o capacidad de proceso a corto plazo. La medición de la capacidad a largo plazo se hará cuando se vean los diagramas de control de proceso.

Ejemplo 7.3. Una empresa fabricante de baleros o rodamientos automotrices cuenta con un proceso de fabricación de balines de media pulgada que debe cumplir la especificación de 0.490" a 0.510" pulgadas de diámetro.

Dicha empresa requiere entregarle a su cliente principal evidencia del cumplimiento de especificaciones y para ello decide hacer un estudio de habilidad o capacidad de proceso. Cabe señalar que esta empresa todavía no controla su proceso a través de diagramas de control; por lo mismo, no cuenta con datos históricos del comportamiento del proceso y al cliente le urge tener dicha evidencia. Por ello, diseña un plan de muestreo para calcular dicha capacidad.

Lo primero que realiza es diseñar su plan de muestreo, para ello, analiza cómo envía los balines para balero y lo hace en un contenedor que tiene 10000 balines a granel. La característica de calidad por estudiar es el diámetro medio del balín. La primera condición inicial que se establece es que el diámetro de cada balín presenta una distribución de probabilidad normal $\phi \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta)$, por lo que se puede suponer que el intervalo de confianza del diámetro medio del balín está dado por la siguiente expresión:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \leq \mu_x \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \quad \dots (47)$$

Nótese que en este caso se está considerando que la población es finita y se desconocen la media y la desviación estándar de la población además de que se desea estimar el tamaño de la muestra. Para ello, se utiliza la definición de Error Aleatorio, en este caso específico:

$$\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \quad \dots (48)$$

Lo primero que se hará será despejar el tamaño de muestra:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma_\phi^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \\ n(N-1)\varepsilon^2 &= z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma_\phi^2 (N-n) \\ \left[(N-1)\varepsilon^2 + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma_\phi^2 \right] n &= z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma_\phi^2 N \\ n &= \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma_\phi^2 N}{(N-1)\varepsilon^2 + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma_\phi^2} = \frac{N\sigma_\phi^2}{(N-1)\left(\frac{\varepsilon}{z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 + \sigma_\phi^2} \end{aligned}$$

Lo que implica que el tamaño de muestra a elegir está dado por:

$$n \geq \frac{N\sigma_{\phi}^2}{(N-1)\left(\frac{E}{z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 + \sigma_{\phi}^2} \quad \dots (49)$$

Para poder elegir el tamaño de muestra adecuado, se necesita la desviación estándar poblacional, que en este caso no se conoce. Tampoco se tiene definido el máximo error aleatorio permitido y se requiere también el nivel de confianza que se usará. Para dilucidar cómo estimar la desviación estándar poblacional se tomará una premuestra o muestra piloto. El tamaño de esta premuestra es elegido por quien realiza las pruebas. Suponga que en este caso se toma $n_{\text{piloto}} = 20$, y se procede a sacar aleatoriamente 20 balines del lote completo de 10,000 balines. Se partirá del supuesto de que nadie se tomó la molestia en ordenar a los balines y que basta con tomar los primeros 20 que surjan (¿hay alguna objeción del lector para ello?). La premuestra de 20 balines es la siguiente:

Tabla 15

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 0.492 | 0.501 | 0.499 | 0.494 |
| 0.500 | 0.499 | 0.499 | 0.498 |
| 0.494 | 0.502 | 0.495 | 0.492 |
| 0.498 | 0.496 | 0.493 | 0.499 |
| 0.495 | 0.495 | 0.494 | 0.499 |

De esta premuestra o muestra piloto se obtiene un estimador puntual de la desviación estándar, el cual puede ser la desviación estándar muestral, o su cuadrado, la varianza muestral:

$$\hat{\sigma}_{\phi}^2 \approx S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (\phi_i - \bar{\phi})^2 = 9.4E - 6 \quad \dots (50)$$

Se obtiene el valor a utilizar, para lo cual se usó Excel, pero puede usarse R o Minitab.

El nivel de confianza se fijará al 95.45% en una prueba de dos colas, por lo que $z_{\alpha/2} = 2$.

Nótese que la lectura mínima son milésimas de pulgada y por experiencia profesional se toma un error aleatorio $E = 0.0006$ que daría el redondeo a una milésima.

Con todos estos datos se procede a calcular el tamaño de muestra a usar:

$$n \geq \frac{(9.11084E - 6) * 10000}{9999 \frac{(0.0006)^2}{(2)^2} + (9.11084E - 6)} = 103.37 \quad \dots (51)$$

Por facilidad en los cálculos se tomará una muestra de tamaño $n = 100$. Cabe mencionar que el error aleatorio que se fijó fue muy pequeño $E = 0.0006$ (si $E = 0.0007$ el tamaño de muestra hubiera sido 76.15), menos de una milésima de pulgada, eso permite reducir el tamaño de muestra a 100 sin que afecte significativamente los resultados.

Se procede a recolectar una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ balines del lote de 10,000 balines. Nuevamente, se parte del supuesto de que los balines no fueron ordenados de ninguna forma, por lo que se puede suponer que se encuentran en forma aleatoria, se toman 80 balines porque ya se habían tomado 20 de ellos. La muestra completa se presenta en la Tabla 16 a continuación:

Tabla 16

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.492 | 0.499 | 0.493 | 0.496 | 0.493 | 0.499 | 0.496 | 0.496 | 0.500 | 0.498 |
| 0.500 | 0.499 | 0.494 | 0.499 | 0.493 | 0.498 | 0.504 | 0.503 | 0.495 | 0.496 |
| 0.494 | 0.495 | 0.497 | 0.497 | 0.493 | 0.498 | 0.498 | 0.497 | 0.505 | 0.498 |
| 0.498 | 0.493 | 0.490 | 0.495 | 0.495 | 0.497 | 0.496 | 0.500 | 0.500 | 0.500 |
| 0.495 | 0.494 | 0.497 | 0.502 | 0.498 | 0.494 | 0.494 | 0.497 | 0.501 | 0.500 |
| 0.501 | 0.494 | 0.498 | 0.497 | 0.496 | 0.499 | 0.494 | 0.494 | 0.498 | 0.494 |
| 0.499 | 0.498 | 0.491 | 0.498 | 0.497 | 0.497 | 0.495 | 0.497 | 0.496 | 0.494 |
| 0.502 | 0.492 | 0.496 | 0.498 | 0.496 | 0.499 | 0.493 | 0.495 | 0.497 | 0.499 |
| 0.496 | 0.499 | 0.497 | 0.498 | 0.500 | 0.493 | 0.500 | 0.499 | 0.500 | 0.488 |
| 0.495 | 0.499 | 0.493 | 0.501 | 0.493 | 0.495 | 0.501 | 0.502 | 0.493 | 0.497 |

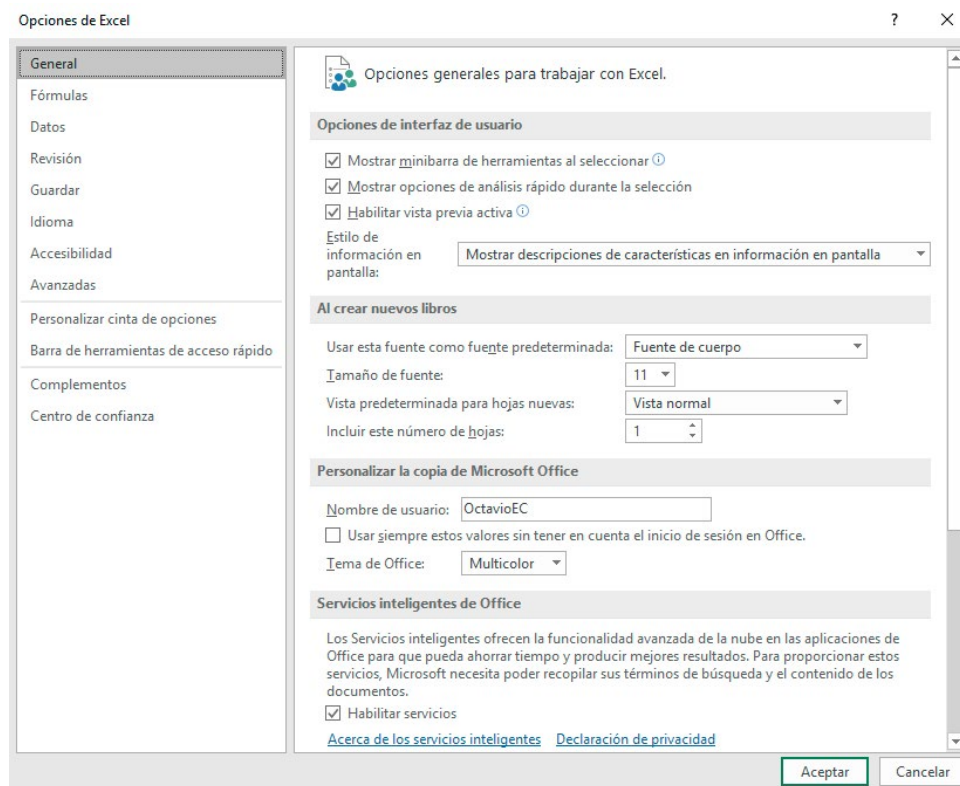
Ya con la muestra completa se proceden a calcular los parámetros muestrales correspondientes, los cuales servirán como estimadores de los parámetros poblacionales, ya que éstos se desconocen.

Para hacer estos cálculos rápidamente con Excel, se aplican los siguientes pasos:

- Se capturan los datos en una sola columna de Excel, por ejemplo, en la columna A, quedarían de la celda A1 a la celda A100.
- Se da un clic en el menú denominado Datos y luego en el submenú intitolado Análisis de datos.

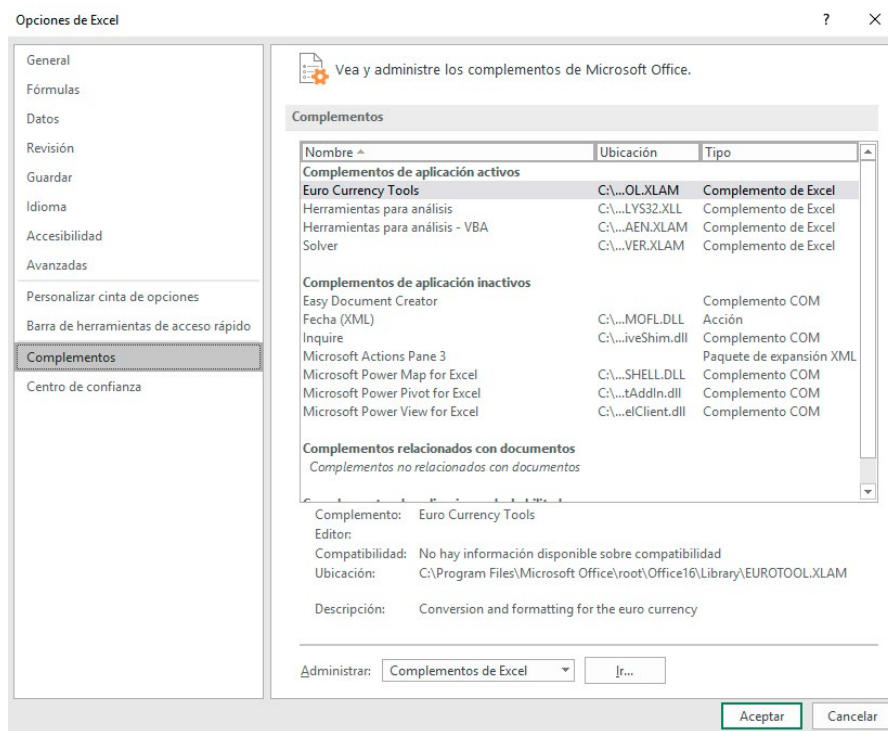
Si no aparece el submenú de *Análisis de datos*, se deberá activarlo con las siguientes instrucciones: dar un clic en el menú *Archivo*, elija el submenú *Opciones* y aparece la siguiente pantalla:

Figura 20



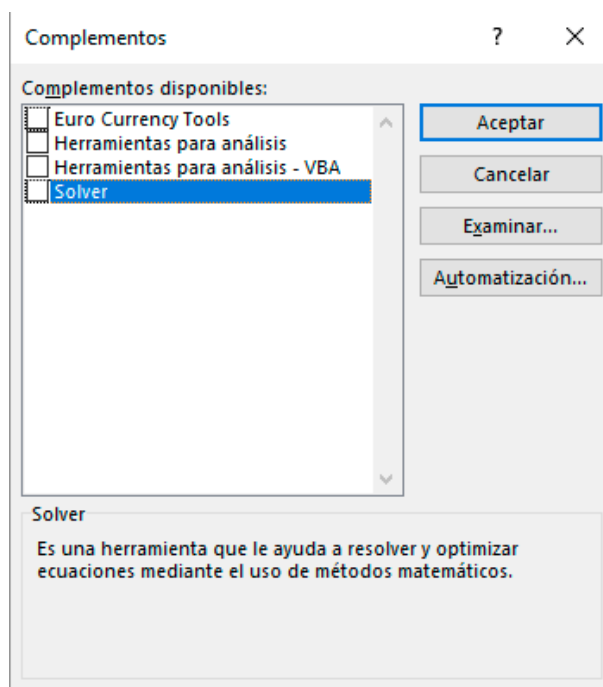
Elija el menú Complementos en esta pantalla y aparece la siguiente:

Figura 21



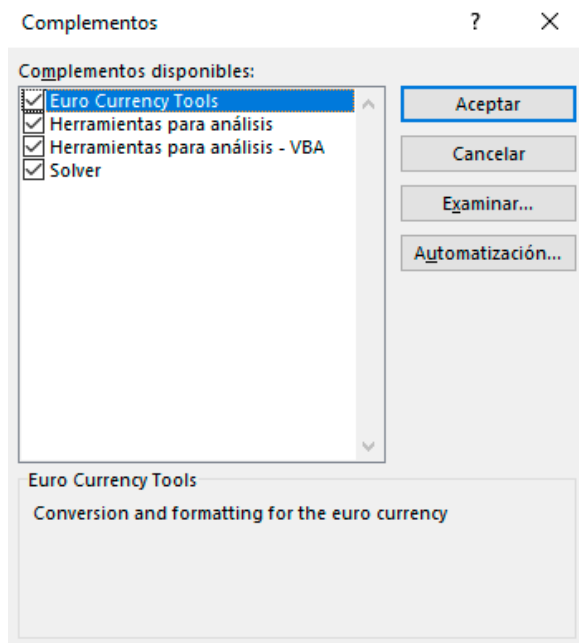
Hasta debajo de esta pantalla aparecen los Complementos de Excel, dé un clic en Ir... y aparece la siguiente pantalla:

Figura 22



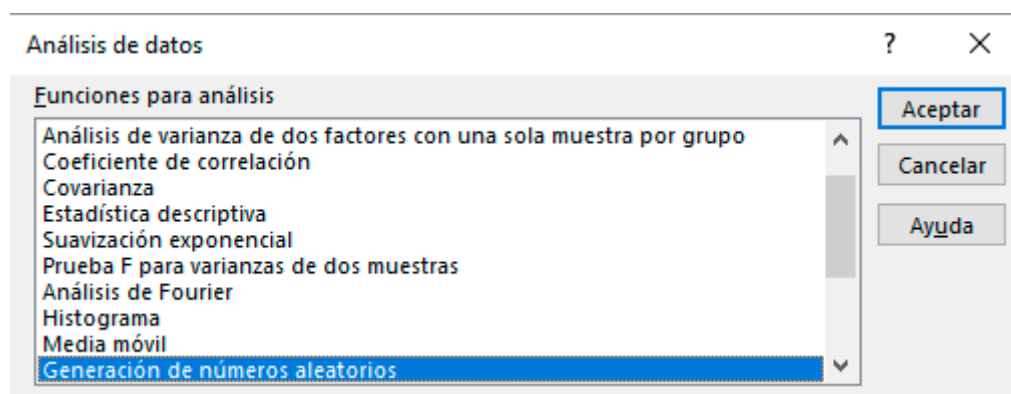
Palomee los complementos que requiera, por lo menos debe activar Herramientas para análisis, quedando:

Figura 23



c. Una vez activado el submenú de Análisis de datos, dándole clic aparece la siguiente pantalla

Figura 24



d. Se da clic en Estadística descriptiva, luego en aceptar y aparece la pantalla:

Figura 25

Estadística descriptiva

Entrada

Rango de entrada: ↑

Agrupado por: Columnas Filas

Rótulos en la primera fila

Opciones de salida

Rango de salida: ↑

En una hoja nueva:

En un libro nuevo

Resumen de estadísticas

Nivel de confianza para la media 95 %

K-ésimo mayor:

K-ésimo menor:

Aceptar Cancelar Ayuda

En esta pantalla, en donde dice Rango de entrada, se deben teclear las coordenadas de las celdas donde se encuentran los datos $\$A\$1: \$A\100 (el símbolo pesos se utiliza para fijar o anclar la columna y el renglón); de otra forma, sitúese donde está el primer dato y arrastre el ratón sin soltar el botón izquierdo del mismo hasta donde se encuentre el último dato. En esta misma pantalla, palomee la opción Rótulos en la primera fila si existe encabezado de los datos, si no existe encabezado déjela en blanco. Palomee la opción Resumen de Estadísticas y dé un clic en Aceptar.

Aparece la siguiente tabla:

Tabla 17

| Parámetros Muestrales de 100 balines | |
|--------------------------------------|-------------|
| Parámetro | Valor |
| Media | 0.4968805 |
| Error típico | 0.000310218 |
| Mediana | 0.496885135 |
| Moda | #N/A |
| Desviación estándar | 0.003102181 |
| Varianza de la muestra | 9.62353E-06 |
| Curtosis | 0.124525905 |
| Coefficiente de asimetría | 0.02798326 |
| Rango | 0.016966176 |
| Mínimo | 0.488402432 |
| Máximo | 0.505368607 |
| Suma | 49.68804997 |
| Cuenta | 100 |

En este resumen aparecen los valores de la media muestral y de la desviación estándar muestral que servirán como estimadores de la media poblacional y de la desviación estándar poblacional respectivamente. Cabe señalar que el valor de la media muestral lo calcula Excel con el concepto de media aritmética, habrá que ver qué dimensiones tienen los valores, ya que si los datos fueran dimensiones poblacionales debe usarse la media geométrica; por otro lado, si los datos representaran rapidez de cambio como porcentajes, velocidades o aceleración, el concepto que debe usarse es el de media armónica. De la misma forma, el concepto que usa Excel para calcular la desviación estándar muestral es con $n-1$, no con n .

Existen una gran cantidad de métodos para hacer el análisis de la bondad de ajuste de un conjunto de puntos obtenidos empíricamente a un modelo probabilístico particular y puede usarse una variedad copiosa de software para ello. En este libro se emplean tres de ellos, Excel, Minitab y R, pero es indispensable conocer las bases teóricas, las condiciones iniciales, los criterios para aceptar o rechazar la hipótesis nula de cada uno de los métodos citados, para así poder aplicarlos.

- a. Por comparación del histograma de frecuencias observado contra el histograma de probabilidad esperado. Es un método subjetivo porque la comparación se realiza visualmente.
- b. Comparación de los valores observados contra los esperados con cierta distribución de probabilidad, y utilizando un gráfico de papel probabilístico.
- c. Por pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas, como las que se listan a continuación:
 - » Prueba de Anderson-Darling (A-D).
 - » Prueba de Cramer-von Mises (CVM).
 - » Prueba de Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov).
 - » Prueba χ^2 de Pearson.
 - » Prueba de Shapiro-Wilk (S-W) o su similar Ryan-Joyner (R-J).
 - » Prueba de Shapiro-Francia (S-F).
 - » Prueba de Jarque-Bera (J-B).
 - » Prueba de Frosini.
 - » Prueba de Geary.
 - » Prueba de Hegazy-Green.
 - » Prueba de Curtosis.
 - » Prueba de Asimetría.

- » Prueba de Spiegelhalter.
- » Prueba de Weisberg-Bingham (W-B).
- » Prueba de Agostino-Shapiro (A-S).

El método que se empleará, en primer lugar, es por su importancia histórica al utilizar papel probabilístico. En una hoja de Excel se colocan los datos en una columna con el encabezado Diámetro ϕ ; en otra columna se pone un consecutivo desde uno hasta el total de datos, en este caso 100, con el encabezado j ; luego se coloca una columna con el encabezado $(j-0.5)/n$; después otra columna con el encabezado ϕ Esperado; y por último, otra columna con el encabezado ϕ Observado; como se muestra a continuación:

Tabla 18

| | A | B | C | D | E |
|----|-----------------|-----|-------------|-----------------|------------------|
| 1 | Diámetro ϕ | j | $(j-0.5)/n$ | ϕ Esperado | ϕ Observado |
| 2 | 0.492 | 1 | 0.005 | 0.492 | 0.488 |
| 3 | 0.500 | 2 | 0.015 | 0.492 | 0.490 |
| 4 | 0.494 | 3 | 0.025 | 0.492 | 0.491 |
| 5 | 0.498 | 4 | 0.035 | 0.492 | 0.492 |
| 6 | 0.495 | 5 | 0.045 | 0.493 | 0.492 |
| 7 | 0.501 | 6 | 0.055 | 0.493 | 0.493 |
| 8 | 0.499 | 7 | 0.065 | 0.493 | 0.493 |
| 9 | 0.502 | 8 | 0.075 | 0.493 | 0.493 |
| 10 | 0.496 | 9 | 0.085 | 0.493 | 0.493 |

En la columna A, a partir de la celda A2 y hasta la celda A101, como ya se dijo, se colocan los datos de la muestra.

En la columna B, a partir de la celda B1 y hasta B101 se colocan los números consecutivos de uno a cien.

En la columna C y a partir de la celda C2 se coloca la fórmula

“ $=(B2-0.5)/100$ ”

Una vez que le dé “enter” a esta fórmula, aparece la celda C2 en su esquina inferior derecha con un botón de color verde, dele doble clic para que copie la fórmula en todas las demás celdas de esa columna.

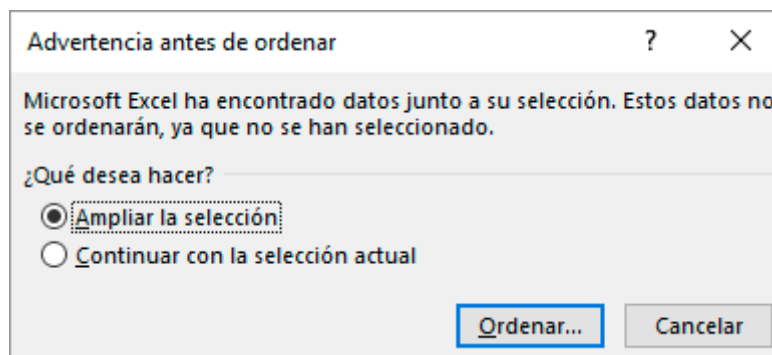
En la columna D, en la celda D2 se va a colocar la siguiente fórmula:

`"=INV.NORM(C2, PROMEDIO(A2:A101), DESVEST(A2:A101))"`

Una vez que dé un “enter” en esta fórmula, dé un clic en el botón inferior derecho que aparece en la celda, para que haga los cálculos de todas las demás celdas de esa columna.

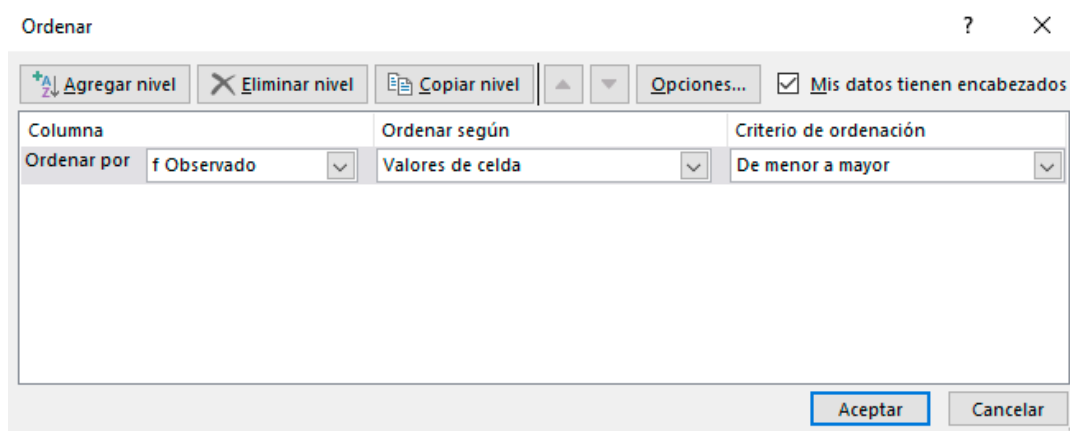
En la columna E, a partir de la celda E2 se colocan los datos de la columna A, ordenados de menor a mayor. Para ello, se copian los datos y se pegan en dicha columna, posteriormente se iluminan o marcan arrastrando el ratón con el botón izquierdo oprimido, soltando, posteriormente se da un clic en el menú Datos y luego en el submenú Ordenar; aparece la siguiente pantalla:

Figura 26



Marque *Continuar con la selección actual* y luego dé clic en *Ordenar*; aparece la siguiente pantalla:

Figura 27



Así como se muestra dé un clic en Aceptar.


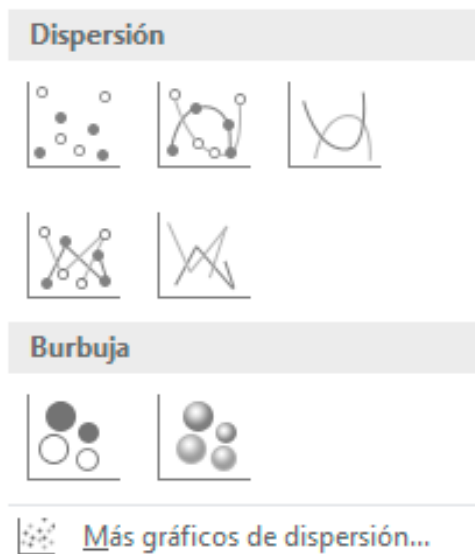
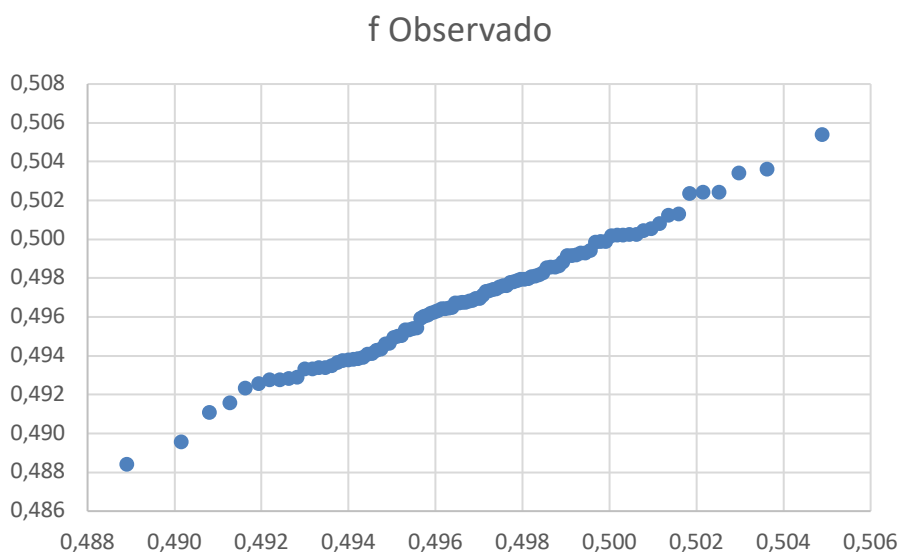
Una vez hecho esto ya se tiene la tabla completa para proceder a graficar en Excel la columna de f Esperado contra la columna de f Observado. Para ello, primero se iluminan o marcan todos los datos de ambas columnas, luego se da un clic en el menú Insertar y posteriormente en el submenú Insertar gráfico de dispersión que se representa como , aparece la siguiente pantalla:

Figura 28



Elija la primera opción y aparece la gráfica que se busca:

Figura 29



Para proporcionar más información con respecto al ajuste buscado, dé un clic con el botón de lado izquierdo dentro de la gráfica y luego un clic con el botón de lado derecho; aparece la siguiente imagen:

Figura 30



Ahora, elija agregar línea de tendencia y aparece al lado derecho de la pantalla:

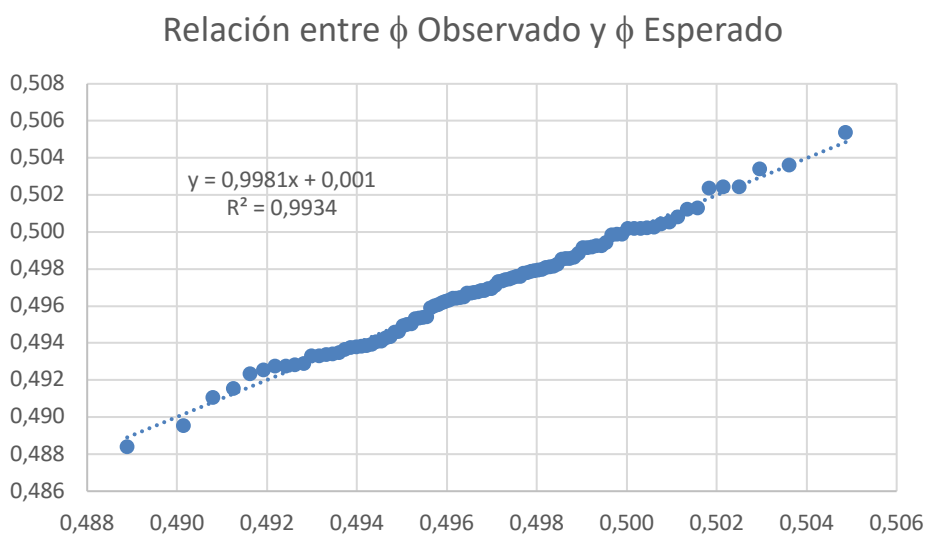
Figura 31

En esta parte elija la opción preseleccionada Lineal, luego señale Presentar ecuación en el gráfico y Presentar el valor R cuadrado en el gráfico, dando al final un “enter”.

La gráfica debe verse como se muestra en la figura 32.

En el gráfico de la figura 32 se aprecia el valor del coeficiente de determinación $R^2 = 0.9934$, que representa el cuadrado del coeficiente de correlación ρ , por lo cual, el coeficiente de correlación es $\rho = 0.9967$. Si el coeficiente de correlación es mayor de 0.9 se puede considerar que si existe un buen ajuste entre la ϕ Observada y la ϕ Esperada. La ϕ Observada corresponde a los valores medidos de la muestra de 100 balines y la ϕ Esperada corresponde a los valores esperados si la distribución del diámetro de los balines fuera normal. Por lo anterior, se puede considerar que la distribución de probabilidad del diámetro de los balines sí es normal.

Figura 32



También se puede determinar la normalidad de la distribución de probabilidad de los datos dados usando el software Minitab, para ello, se capturan los datos de los diámetros de los balines en la hoja de presentación de Minitab. Se pueden copiar los datos de Excel de la Tabla 16 y pegar directamente en una sola columna de la pantalla de Minitab.

Posteriormente, en la parte superior, en el menú principal, se elige la opción “Stat”, luego “Basic Statistics”, posteriormente “Normality Test”, como se muestra en la figura 33 y aparece la pantalla de la figura 34.

Figura 33

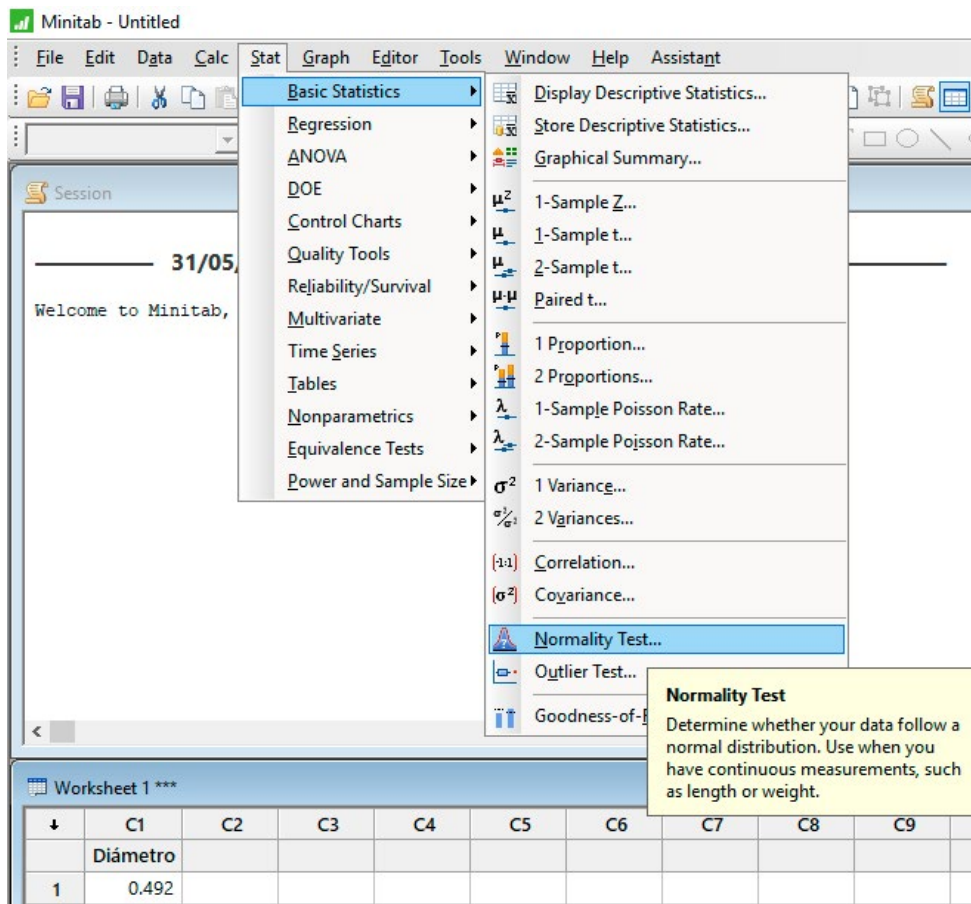
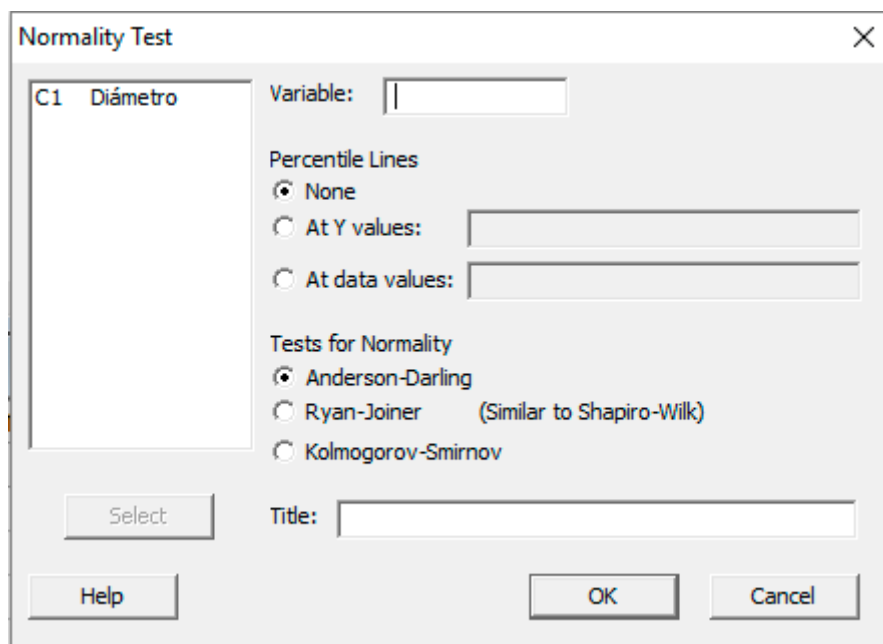
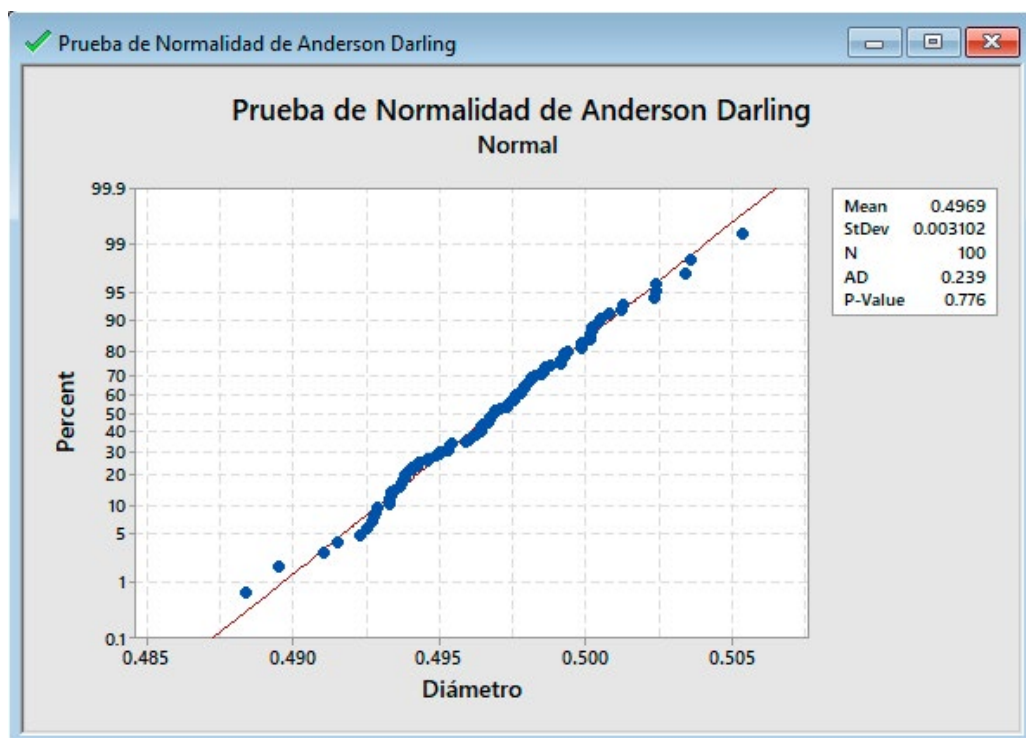


Figura 34



En la pantalla de la figura 34 se elige C1 Diámetro, se oprime “Select”; en el menú de “Test for Normality” se puede dejar la opción preseleccionada o elegir alguna de las otras dos pruebas, en este caso se sugiere usar la primera opción; en “Title” se teclea “Prueba de Normalidad de Anderson-Darling” y se oprime el botón “Ok”, obteniéndose la imagen de la figura 35.

Figura 35



En la prueba de Anderson-Darling, si el valor p es menor que el nivel de significancia seleccionado (por lo general 0.05 o 0.10), se concluye que los datos no siguen la distribución especificada. En este caso en particular, se puede observar en la figura 35 que $p=0.776 > 0.05$, por lo que no existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula que los datos son normales.

Con R también se pueden hacer hasta 15 pruebas de normalidad diferentes a un conjunto de datos.

Se aplicarán algunas de estas pruebas a los datos del diámetro de los balines para probar su normalidad. El método va a ser calcular la probabilidad de obtener el valor de la prueba y comparar contra el nivel de significancia que

se fije. En este caso en particular se tomará un nivel de significancia de 0.05 o 5%. Si la p que se obtenga en cada prueba es menor que este valor, entonces se tiene suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de normalidad de los datos. Si la p es mayor al nivel de significancia de 0.05, entonces no se tiene suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula y se aceptará que los datos presentan distribución normal.

Existen dos aplicaciones de R que pueden servir para hacer pruebas de normalidad.

La primera aplicación se denomina Nortest y contiene las siguientes pruebas:

Tabla 19

| Comando | Prueba de Normalidad |
|--------------|---------------------------------|
| ad.test | Anderson-Darling |
| cvm.test | Cramer-von Mises |
| lillie.test | Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) |
| pearson.test | Ji Cuadrada de Pearson |
| sf.test | Shapiro-Francia |

Para llevar a efecto las pruebas se teclean las instrucciones que aparecen a continuación:

```
package 'nortest' successfully unpacked and MD5 sums checked
```

```
The downloaded binary packages are in
```

```
C:\Users\OctavioEC\AppData\Local\Temp\RtmpcdABFD\downloaded_packages
```

```
> x <- c(0.492,0.500,0.494,0.498,0.495,0.501,0.499,0.502,0.496,0.495,0.499,0.499,0.495,0.493,0.494,0.494,0.498,0.492,0.499,0.499,0.493,0.494,0.497,0.490,0.497,0.498,0.491,0.496,0.497,0.493,0.496,0.499,0.497,0.495,0.502,0.497,0.498,0.498,0.498,0.501,0.493,0.493,0.493,0.495,0.498,0.496,0.497,0.496,0.500,0.493,0.499,0.498,0.498,0.497,0.494,0.499,0.497,0.499,0.493,0.495,0.496,0.504,0.498,0.496,0.494,0.494,0.495,0.493,0.500,0.501,0.496,0.503,0.497,0.500,0.497,0.494,0.497,0.495,0.499,0.502,0.500,0.495,0.505,0.500,0.501,0.498,0.496,0.497,0.500,0.493,0.498,0.496,0.498,0.500,0.500,0.494,0.494,0.499,0.488,0.497)
```

```
> shapiro.test(x)$p.value
```

```
[1] 0.427445
```

```
> require(nortest)
```

```
Loading required package: nortest
```

```
> ad.test(x)$p.value
```

```
[1] 0.118273
```

```
> cvm.test(x)$p.value
```

```
[1] 0.1057997
```

```
> lillie.test(x)$p.value
```

```
[1] 0.1120453
```

```
> pearson.test(x)$p.value
```

```
[1] 2.438496e-05
```

```
> sf.test(x)$p.value
```

```
[1] 0.2797344
```

Como se puede apreciar, en cinco de las seis pruebas aplicadas se obtuvo que $p > 0.05$. ¿podría el amable lector verificar por qué en la prueba de Pearson no sucede esto?

La segunda aplicación se llama Normtest y contiene las siguientes pruebas:

Tabla 20

| Comando | Prueba de Normalidad |
|-------------------------|----------------------|
| ajb.norm.test | Jarque-Bera ajustado |
| frosini.norm.test | Frosini |
| geary.norm.test | Geary |
| hegazy1.norm.test | Hegazy-Green 1 |
| hegazy2.norm.test | Hegazy-Green 2 |
| jb.norm.test | Jarque-Bera |
| kurtosis.norm.test | Kurtosis |
| skewness.norm.test | Asimetría |
| spiegelhalter.norm.test | Spiegelhalter |
| wb.norm.test | Weisberg-Bingham |

Para llevar a efecto las pruebas se teclean las instrucciones que aparecen a continuación:

```
c(0.492,0.499,0.493,0.496,0.493,0.499,0.496,0.496,0.500,0.498,0.500,0.499,0.494,0.499,0.493,0.498,0.504,0.503,0.495,0.496,0.494,0.495,0.497,0.497,0.493,0.498,0.498,0.497,0.505,0.498,0.498,0.493,0.490,0.495,0.495,0.497,0.496,0.500,0.500,0.500,0.495,0.494,0.497,0.502,0.498,0.494,0.494,0.497,0.501,0.500,0.501,0.494,0.498,0.497,0.496,0.499,0.494,0.494,0.498,0.494,0.499,0.498,0.491,0.498,0.497,0.497,0.495,0.497,0.496,0.494,0.502,0.492,0.496,0.498,0.496,0.499,0.493,0.495,0.497,0.499,0.496,0.499,0.497,0.498,0.500,0.493,0.500,0.499,0.500,0.488,0.495,0.499,0.493,0.501,0.493,0.495,0.501,0.502,0.493,0.497)
```

```
> require(normtest)
```

```
Loading required package: normtest
```

```
> ajb.norm.test(x)
```

```
AJB = 0.03759, p-value = 0.9735
```

```
> frosini.norm.test(x)
```

B = 0.2563, p-value = 0.105

> hegazy2.norm.test(x)

T = 0.017492, p-value = 0.2235

> kurtosis.norm.test(x)

T = 3.0257, p-value = 0.948

> skewness.norm.test(x)

T = -0.012086, p-value = 0.957

> spiegelhalter.norm.test(x)

T = 1.2437, p-value = 0.577

> wb.norm.test(x)

WB = 0.98524, p-value = 0.2705

Nótese que en todas las pruebas anteriores $p > \alpha$ por lo que se puede confirmar que los datos presentan distribución normal.

Ya con la confianza (nunca se puede asegurar al 100%) de que la distribución de los datos es normal y con el conocimiento de la media y la desviación estándar de la muestra como estimadores de la población (la muestra debe ser “grande”, n mayor o igual a 100), se procede a estimar los índices de habilidad o capacidad de proceso de corto plazo:

LIE= 0.490”

LSE= 0.510”

$$\hat{\mu}_\theta \approx \bar{\theta} = 0.496881$$

$$\hat{\sigma}_\theta \approx S_{n-1} = 0.003102 \quad \dots (52)$$

$$Cp = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}_\theta} = \frac{0.020}{6(0.003102)} = 1.0745$$

$$Cpl = \frac{\bar{\theta} - LIE}{3\hat{\sigma}_\theta} = \frac{0.496881 - 0.49}{3(0.003102)} = 0.7394 \quad \dots (53)$$

$$Cpu = \frac{LSE - \bar{\theta}}{3\hat{\sigma}_\theta} = \frac{0.51 - 0.496881}{3(0.003102)} = 1.4097$$

$$Cpk = \minimo\{Cpl \text{ o } Cpu\} = 0.7394$$

$$\xi = \frac{\hat{\mu}_\theta - D}{\hat{\sigma}_\theta} = \frac{0.496881 - 0.5}{0.003102} = -1.0055$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1.0745}{\sqrt{1 + (-1.0055)^2}} = 0.7577 \quad \dots (54)$$

$$C_{pkm} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{0.7394}{\sqrt{1 + (-1.0055)^2}} = 0.5214$$

Para obtener un intervalo de confianza de la capacidad de proceso se utiliza la ecuación 40

$$\hat{C}_{pk} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{n-1}} \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{n-1}}$$

Para la cual es necesario estimar los valores de la distribución de probabilidad ji cuadrada. Se usará un nivel de confianza del 95%, con n= 100, usando Excel:

$$\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 = \chi_{0.975, 99}^2 = 73.36108$$

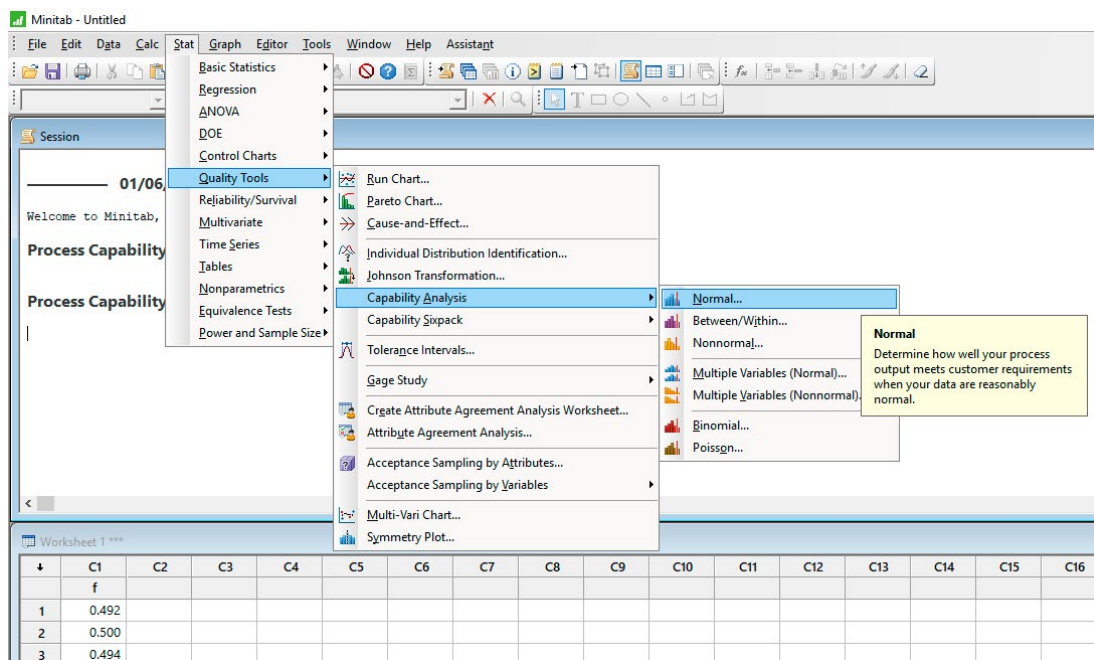
$$\chi_{\alpha/2, n-1}^2 = \chi_{0.025, 99}^2 = 128.422$$

Por lo que el intervalo de confianza para Cpk, al 95% de nivel de confianza es

$$0.636495 \leq C_{pk} \leq 0.842135$$

Como se puede apreciar, el proceso no es capaz de cumplir especificaciones, por lo que deberá ajustarse. Si se observa, la principal razón es que la media de proceso está descentrada con respecto a la media de diseño; la primera acción correctiva y de mejora a emprender sería centrar la media de proceso en la media de diseño. Si esto se hace, la capacidad de proceso subiría al valor del Cp, es decir, Cpk= 1.0745, lo cual ya se acerca al valor esperado que es 1.33 por lo menos. Todavía no sería capaz con esta medida pero reduce la fracción defectuosa de proceso.

También se puede calcular la capacidad de un proceso con Minitab, para ello se ingresa al menú principal, elige “Stat”, luego “Quality Tools”, posteriormente “Capability Analysis”, como se muestra en la figura 36. Por el momento no se harán los cálculos porque esta opción está orientada a diagramas de control, donde se tocará nuevamente este punto.

Figura 36


También se puede hacer el análisis de capacidad o habilidad de proceso con el lenguaje R, pero como ya se mencionó, se tocará el punto cuando se toquen los diagramas de control estadístico particulares.

Las fracciones defectuosas de este proceso, tal como está, serían:

$$p(\phi < \text{LIE}) = \text{pnorm}(0.49, 0.496881, 0.003102) = 0.013269 = 1.3269\% \\ = 13,269 \text{ ppm}$$

$$p(\phi > \text{LSE}) = 1 - \text{pnorm}(0.51, 0.496881, 0.003102) = 1.172583e-05 \\ = 0.0017\% = 17.26 \text{ ppm}$$

$$p = p(\phi < \text{LIE}) + p(\phi > \text{LSE}) = 0.013286 = 1.3286\% = 13,286 \text{ ppm}$$

Si el proceso se centrara, las fracciones defectuosas serían:

$$p(\phi < \text{LIE}) = \text{pnorm}(0.49, 0.5, 0.003102) = 0.000633 = 0.0633\% \\ = 633 \text{ ppm}$$

$$p(\phi > \text{LSE}) = 1 - \text{pnorm}(0.51, 0.5, 0.003102) = 0.000633 = 0.0633\% \\ = 633 \text{ ppm}$$

$$p = p(\phi < \text{LIE}) + p(\phi > \text{LSE}) = 0.001265 = 0.1265\% = 1,265 \text{ ppm}$$

Lo cual, como se puede apreciar, sí mejora el proceso.

Las Gráficas de Precontrol presentan ventajas de facilidad sobre las gráficas de control de Shewhart que se verán posteriormente y por lo mismo serán analizadas a continuación.

Los gráficos de control convencionales de Shewhart determinan los límites de control a partir de la variación observada del proceso exclusivamente, sin tomar en cuenta los límites de control especificados en los documentos de diseño y/o de proceso. Cuando estas gráficas son usadas para propósitos de controlar el proceso, el marcar los límites especificados en estos diagramas, no es lo más adecuado, ya que los límites de control estadístico se calculan a partir de los promedios de los subgrupos muestreados, los cuales, lógicamente presentan menos variación que las mediciones individuales. Por ello, no pueden compararse los límites de control con los límites especificados. Por la misma razón, para analizar la aptitud de un proceso a lo largo del tiempo, se requerirá, además de una gráfica de control que mide la variabilidad de un proceso, estimar la capacidad de éste, comparándolo con las especificaciones, es decir, calcular el Cpk. Por otra parte, para graficar un diagrama de control convencional X-R, se requieren de 20 a 25 subgrupos de tamaño 4 o 5, calcular los límites de control, vaciar los datos e interpretar la gráfica.

Un Diagrama de Precontrol, también denominado Gráfico Arcoiris, es un tipo de gráfico de control usado para medir la aptitud de un proceso sin necesidad de calcular límites de control y permitiendo al mismo tiempo comparar contra las especificaciones. Su diseño y aplicación es mucho más sencillo que los diagramas de control convencionales y no se requiere interpretarlos debido a su sencillez y analogía con un semáforo. Fueron inventados

por un matemático norteamericano, Frank Satterwaite, por la década de 1950-1960. Estos diagramas, igual que los diagramas de control convencionales de Shewhart, están basados en que la distribución de la característica de interés de la población de unidades de un proceso en línea se distribuye normalmente.

Originalmente Satterwaite divide el intervalo de especificación entre cuatro, para crear dos zonas rojas por fuera de los límites de especificación, dos zonas amarillas en la zona inmediata a los límites de especificación y dos zonas verdes centrales como se muestra en la gráfica 37. En este caso, se utiliza una curva normal con media 16 y desviación estándar 2, y se supone que $LIE=LIP=10$, $D=\mu_0=16$, $LSE=LSP=22$. Se puede apreciar que para este ejemplo $C_p=C_{pk}=1.0$

Se calculan las probabilidades de que un punto caiga en alguno de los colores de la gráfica:

$$\begin{aligned}
 p(\text{caer en zona roja inferior}) &= p(\theta < LIE) \\
 p(\text{caer en zona amarilla inferior}) &= p(LIE < \theta < D - LIE/2) \\
 p(\text{caer en zona verde}) &= p(D - LIE/2 < \theta < D + LIE/2) \quad \dots (55) \\
 p(\text{caer en zona amarilla superior}) &= p(D - LSE/2 < \theta < LSE) \\
 p(\text{caer en zona roja superior}) &= p(\theta > LSE)
 \end{aligned}$$

Si se estandariza la variable aleatoria θ las probabilidades anteriores serían:

$$p(\text{caer en zona roja inferior}) = p(z < -3) = 0.00135 = 0.135\% = 1,350 \text{ ppm}$$

$$p(\text{caer en zona amarilla inferior}) = p(-3 < z < -1.5) = 0.065457 = 6.55\% = 65,457 \text{ ppm}$$

$$p(\text{caer en zona verde}) = p(-1.5 < z < 1.5) = 0.866385597 = 86.64\% = 866,386 \text{ ppm}$$

$$p(\text{caer en zona amarilla superior}) = p(1.5 < \theta < 3) = 0.065457 = 6.55\% = 65,457 \text{ ppm}$$

$$p(\text{caer en zona roja superior}) = p(z > 3.0) = 0.00135 = 0.135\% = 1,350 \text{ ppm}$$

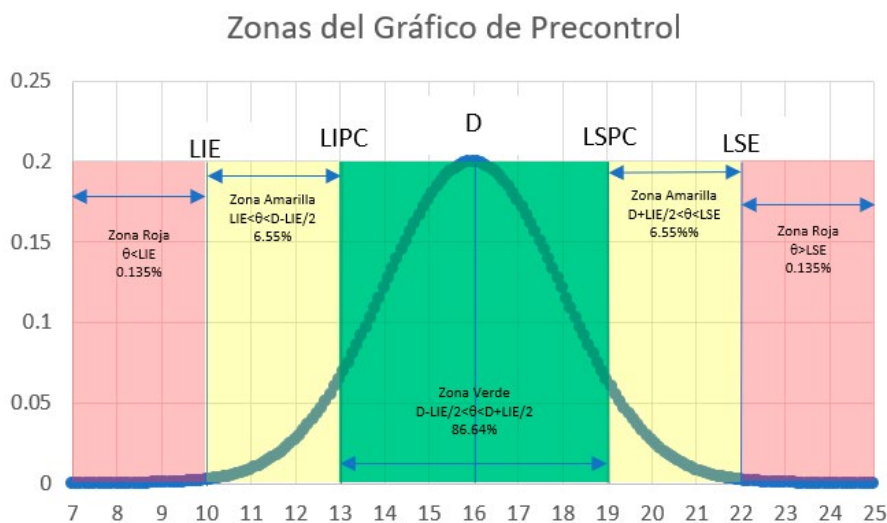
De esta forma, la probabilidad de caer en algún color en particular es:

$$p(\text{caer en zona roja}) = 0.0027 = 0.27\% = 2,700 \text{ ppm}$$

$$p(\text{caer en zona amarilla}) = 0.130914 = 13.09\% = 130,914 \text{ ppm}$$

$$p(\text{caer en zona verde}) = 0.8663385597 = 86.64\% = 866,386 \text{ ppm}$$

Figura 37. Zonas de Precontrol de Satterwaite como semáforo



Para graficar y usar un Diagrama de Precontrol se aplican los siguientes pasos:

1. Determinar el intervalo de especificación de la característica de interés del proceso que se pretende controlar y dividirlo entre cuatro. Los puntos que dividen a este intervalo en cuatro partes formarán los límites del diagrama de precontrol, como se muestra en la figura 37. Los límites de las dos porciones centrales serán las líneas de precontrol; estas dos porciones centrales estarán iluminadas en color verde. Las porciones laterales que se encuentran entre las líneas de precontrol y los límites especificados estarán iluminadas de color amarillo. Las zonas que se encuentren externamente a los límites de especificación estarán iluminadas de color rojo.

Para el ejemplo que se muestra en la figura 37, $LIE = 10$, $D = 16$, $LSE = 22$, de tal manera que los Límites de Precontrol son: $LIPC = 13$ y $LSPC = 19$.

2. Para dar inicio al proceso, cinco mediciones de la característica de interés, consecutivas, al ser marcadas en la gráfica, deben caer en zona verde. Si no ocurre esto, el proceso debe ser revisado y ajustado hasta que ocurra lo dicho anteriormente.

La probabilidad de que cinco mediciones caigan en zona verde sería:

$$p(\text{cinco_puntos_en_zona_verde}) = [p(\text{un_punto_en_zona_verde})]^5$$

$$p(\text{cinco_puntos_en_zona_verde}) = (0.866385597)^5 = 0.488153$$

3. Durante el proceso, se obtienen dos mediciones consecutivas periódicamente, si las dos mediciones al ser marcadas en la gráfica:
- a. Caen en zona verde, el proceso está trabajando satisfactoriamente.

La probabilidad de que dos mediciones caigan en zona verde sería:

$$p(\text{dos_puntos_en_zona_verde}) = [p(\text{un_punto_en_zona_verde})]^2$$

$$p(\text{dos_puntos_en_zona_verde}) = (0.866385597)^2 = 0.750624$$

- b. Una cae en zona verde y la otra en zona amarilla, alerta, el proceso puede empezar a salirse de control.

La probabilidad de esto sería:

$$p(\text{un_punto_en_zona_verde_y_otro_en_zona_amarilla}) = \\ = 2(0.866386)(0.130914) = 0.226844$$

- c. Si las dos mediciones caen en zona amarilla o una de las mediciones cae en zona roja, deténgase, el proceso se ha salido de control. En los casos en que el proceso deba detenerse, para reiniciarlo, cinco mediciones consecutivas al ser marcadas en la gráfica deben caer en zona verde. La frecuencia de muestreo entre cada grupo de dos mediciones será estimada, dividiendo el intervalo de tiempo entre dos paros o cambios de turno entre seis.

La probabilidad de esto sería:

$$p(\text{un punto en zona roja o dos en zona amarilla}) = \\ = (0.130914)^2 + 0.0027 = 0.0198385$$

- La frecuencia del muestreo de dos unidades es determinada dividiendo entre seis el período de tiempo del proceso entre dos paros del mismo. En otras palabras, si el primer paro se realiza a las 9:00 horas y el proceso es corregido y restablecido un poco después, seguido por otro paro de proceso a las 12:00 horas, el tiempo entre paros de tres horas se divide entre seis, para dar una frecuencia de muestreo cada media hora. Por otra parte, si el proceso es continuo, y el período de tiempo entre paros es de tres días, la frecuencia de muestreo sería cada 12 horas.

Ejemplo 9.1. Para ilustrar la aplicación del Diagrama de Precontrol suponga que se tiene un proceso de envasado de azúcar en sacos de 200 kg. La especificación por cumplir es que los sacos pesen entre 199.5 a 200.5 kg. El formato de diagrama de precontrol que se usará fue hecho en Excel, es un formato básico para dar la idea de lo que se quiere pero no tiene encabezado, ni datos sobre el proceso. Ya se incluyeron los límites de especificación y los límites de precontrol; se muestra en la figura 38.

Ahora, se generarán lecturas utilizando los generadores de números aleatorios de R, suponiendo una distribución normal $\text{Peso} \sim N(199.75, 0.1)$

Observe que la variación del proceso es de 0.6 y la especificada es de 1, por lo que su índice de capacidad es de $C_p=1.67$; sin embargo, su $C_{pk}=0.833$, por lo que el proceso estrictamente no cumple especificaciones.

Primero, para iniciar el proceso, se toman cinco lecturas seguidas para ver si el proceso arranca: las lecturas son: 199.808, 199.779, 199.761, 199.871 y 199.800, como se puede apreciar, las cinco lecturas generadas caen en el intervalo entre 199.75 y 200 por lo que se si ubican en el formato se puede apreciar que todas caen en zona verde; con esto, el proceso de precontrol se inicia.

Figura 38. Formato de gráfico de precontrol



Suponiendo que el proceso de envasado empieza a las 7:00 horas y termina a las 15 horas (un turno de trabajo), se tomarán dos lecturas cada hora. Suponga que a las 8:00 se toman dos lecturas: 199.782 y 199.892, ambas lecturas caen en zona verde por lo que el proceso continua.

A las 9:00 horas se toman otras dos lecturas: 199.843 y 199.713. Nótese que la primera de estas lecturas cae en zona verde, pero la segunda cae en zona amarilla, es una llamada de alerta, hay que estar pendientes de lo que suceda en el proceso. El proceso continua.

A las 10:00 horas las lecturas fueron 199.687 y 199.784, sigue la alerta porque una lectura cae en zona amarilla y otra en verde, sin embargo, no se para el proceso. A las 11:00 horas sucede lo mismo, una lectura 199.877 en zona verde y otra 199.743 en zona amarilla; a las 12:00 las dos lecturas caen en zona verde: 199.838 y 199.764.

A las 13:00 horas el proceso arroja una lectura en zona verde 199.867 y otra lectura en zona amarilla 199.742. A las 14:00 horas se para el proceso ya que ambas lecturas caen en zona amarilla: 199.726 y 199.56. Dado que falta una hora para que termine el turno se decide investigar la causa de la falla y ya no arrancar nuevamente el diagrama de precontrol sino hasta el siguiente turno.

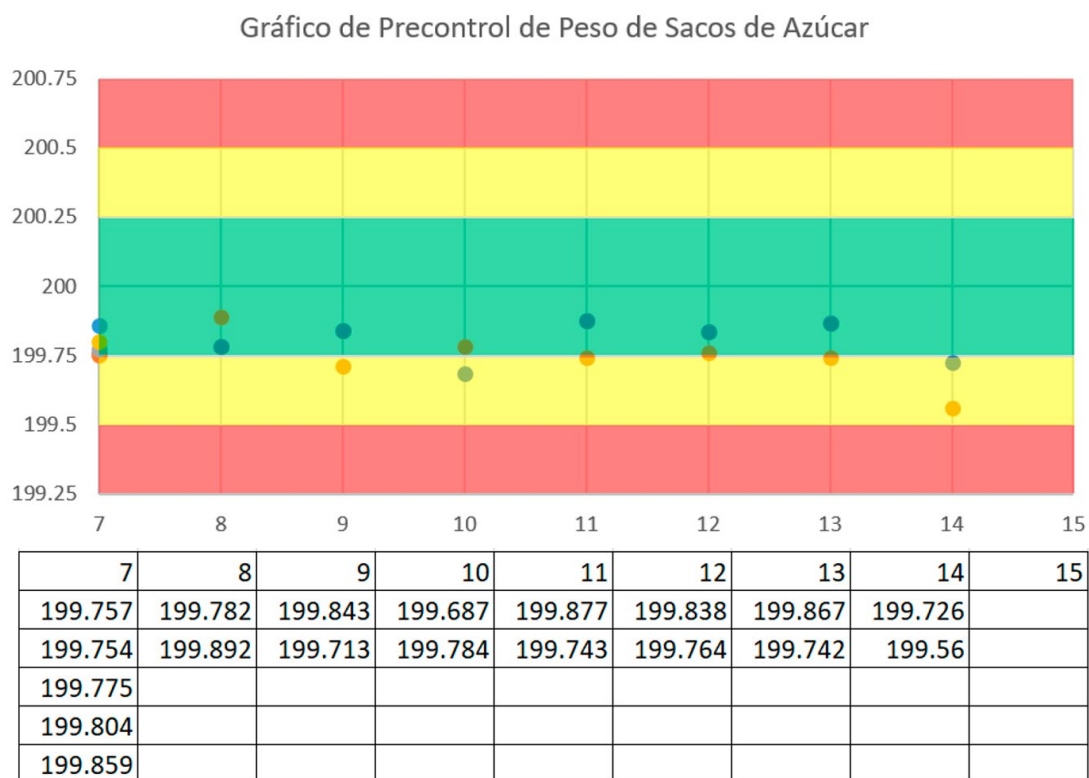
Nótese que, aunque el diagrama de precontrol indicó que se continuara con el proceso, desde el principio se hizo evidente que el promedio del peso del azúcar que se está envasando está por debajo de los 200Kg prometidos (la media de las primeras cinco lecturas fue 199.79); sin embargo, el diagrama lo hizo notar a partir de la muestra de las 9:00 horas, uno de los puntos se mantuvo en zona amarilla. Claramente se ve que la dispersión de los datos es más reducida que la variación especificada, se trata de un problema de sesgo entre la media del proceso y la media de diseño. Convendría hacer un análisis de la capacidad del proceso y ajustar la media de proceso en la media de diseño.

Al hacer un análisis de capacidad con los datos que se tienen, se detecta que la causa de la falla es que el proceso no estaba centrado; se decide ajustar la máquina a la exactitud deseada y para el siguiente turno se arrancará con un $C_{pk} = 1.67$, por lo cual no debe haber problemas a menos que el proceso cambie en su transcurso.

Dado que hubo un intervalo de paros entre las 7:00 y las 14:00 horas, para el siguiente turno las lecturas se harán cada $7/6 =$ una hora con diez minutos.

El proceso completo se muestra en la figura 39.

Figura 39. Gráfico de precontrol para un proceso de envasado de azúcar en sacos de 200 ± 0.5 kg.



Los diagramas de precontrol presentan ciertas ventajas con respecto a los diagramas de control.

En primer lugar, la regla de sujetar un diagrama de precontrol a las especificaciones de diseño hace que se cuide la capacidad de proceso desde el principio. Que no es el caso de los diagramas de control que requieren de un estudio de capacidad previo.

En segundo lugar, en los diagramas de precontrol, la regla de inicio de cinco lecturas en zona verde garantiza con cierto grado de confianza el arrancar con un proceso capaz (que no fue el caso del ejemplo abordado previamente). Para el caso de los diagramas de control no se establece así, para iniciarlos se requiere previamente estimar la capacidad de proceso y ajustarlo para arrancar con un proceso capaz.

Una tercera ventaja es la simpleza de estimar cuántas muestras se tomarán a lo largo del proceso, dividir el intervalo entre dos paros entre seis. Que no es

el caso de los diagramas de control que su frecuencia dependerá de la velocidad de proceso, de la frecuencia con la que cambia el proceso, del costo del muestreo y de la inspección, etcétera.

Una cuarta ventaja es que solo se toman muestras de tamaño dos mientras que en un diagrama de control X-R deben ser por lo menos cuatro lecturas y en el caso de un diagrama X-S deben ser por lo menos 10 lecturas. En un muestreo donde la prueba es destructiva este factor es decisivo, no cabe duda que el diagrama de precontrol es más barato.

Una quinta ventaja es que el poder de un diagrama de control se mide por los valores que alcanzan los dos errores estadísticos: la probabilidad de detener el proceso cuando este se encuentra bajo control (α) y la probabilidad de continuar un proceso que debió haberse detenido (β). Ambos errores se miden a través de la Curva Característica de Operación del Diagrama de Control. No se planteará la CCO para el caso del diagrama de precontrol, pero sí se estimarán ambos errores. El error α ya fue estimado previamente y es parar el proceso cuando no debió haberse detenido, éste está dado por:

$$\alpha = p(\text{un_punto_en_zona_roja_o_dos_en_zona_amarilla}) = \\ = (0.130914)^2 + 0.0027 = 0.0198385$$

Como se puede apreciar el error tipo I tiene una probabilidad cercana al 2%.

La probabilidad del error tipo II, es decir, continuar un proceso cuando debió detenerse es cercana al 1.5% (¿podría el amable lector intentar demostrar esta afirmación?).

En general, un diagrama de precontrol es más sencillo y barato de hacer. Sin embargo, no todo es miel sobre hojuelas, el principal problema que presentan los diagramas de precontrol es que no permiten medir el desempeño del proceso. Con un diagrama de precontrol se sabe si el proceso está cumpliendo o no; sin embargo, no permite medir si el proceso ha mejorado o ha empeorado con el tiempo, cosa que sí realizan con cierto grado de eficiencia los diagramas de control.

Un diagrama de control es como una autopista, en la cual se definen tres límites: el inferior, LIC, el medio, LMC, y el superior, LSC. Al andar sobre dicha autopista, un móvil trata de apegarse a conducirse sobre esos límites, en el momento que él se sale de esos límites, se dice que el proceso se salió de control.

Se parte de un supuesto, el comportamiento del móvil que se mueve sobre esos límites a lo largo del tiempo, no es determinístico, es aleatorio y no se puede predecir con certeza en qué punto del ancho del proceso se va a situar. El que su comportamiento sea aleatorio, no significa que sea errático, se mueve siguiendo cierto modelo de probabilidad, el cual generalmente se va a suponer que es normal.

Por lo anterior, se dice que un proceso que se mueve siguiendo una trayectoria aleatoria (no predecible, pero tampoco errática), situándose dentro de los límites de control, se encuentra bajo control.

Si en un diagrama de control se detecta que un punto se sale de control, se dice que este se encuentra fuera de control. De la misma forma, si el comportamiento de un proceso es predecible (no aleatorio) o es errático, nuevamente se afirma que se encuentra fuera de control.

Por lo anterior, existen ciertas reglas para detectar si un proceso se encuentra fuera de control:

1. Un punto fuera de los límites de control, se supone que el proceso está fuera de control.

2. Siete de ocho puntos sucesivos hacia arriba, hacia abajo o hacia la línea central, aunque se encuentren dentro de los límites de control, se consideran una ruta no aleatoria (donde el número de puntos hacia arriba, hacia abajo o hacia el centro se denomina corrida), el proceso se encuentra fuera de control.

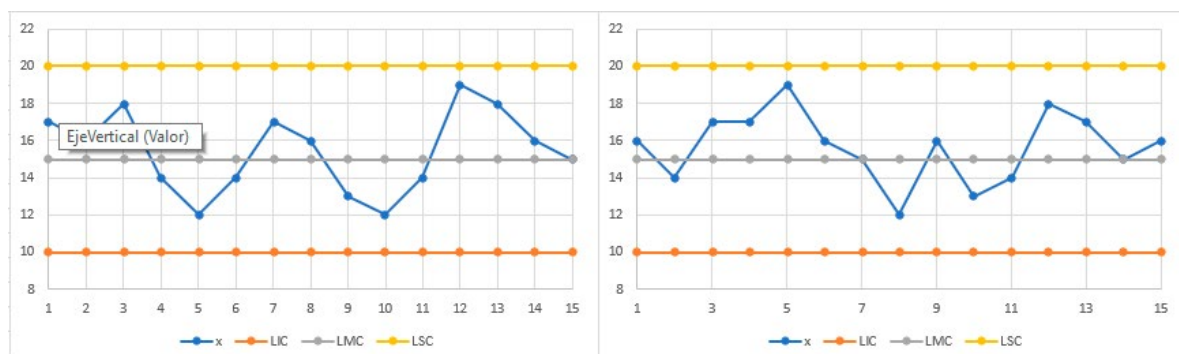
En el caso de que los puntos del diagrama empiecen a tender hacia el centro, algunas personas cuestionan diciendo que en realidad esto no es estar fuera de control; sin embargo, el problema es que no se sabe por qué empiezan a tender hacia el centro y eso es un patrón predecible, lo que hace que esté fuera de control, aunque sea bueno se pierde la aleatoriedad que se supone tiene el modelo. Un caso particular que ocasiona este tipo de comportamientos es cuando los datos se extraen de un fenómeno determinístico o cuando se inventan los datos.

3. Si se detecta que un conjunto de puntos se mueve en forma repetitiva periódicamente, se trata de un ciclo que no es aleatorio y el proceso se encuentra fuera de control. Por ejemplo, dos puntos por debajo de la línea central, dos puntos por arriba de la línea central, repitiendo dos hacia abajo, dos hacia arriba y así sucesivamente, se trata de un ciclo predecible que rompe con la aleatoriedad y por ello se encuentra fuera de control.
4. Si un conjunto de puntos se pega al límite superior y otro conjunto de puntos se pega al límite inferior periódicamente, aunque no sea el mismo número de puntos, se trata de un comportamiento errático que refleja que los datos se están extrayendo de dos poblaciones diferentes. Aplicar un diagrama de control implica hacerlo en una población en particular, no en una mezcla de varias. Por ejemplo, si se revuelven las piezas manufacturadas de dos máquinas o procesos diferentes, se va a reflejar en el comportamiento que presenten los datos en el diagrama de control. En este caso específico, se requiere estratificar perfectamente los datos de una población, de los datos de otra población. La estratificación puede ser por turno, por máquina, por proceso, por temporalidad, etcétera.

En las siguientes figuras se ilustran diversos ejemplos que permiten interpretar un diagrama de control.

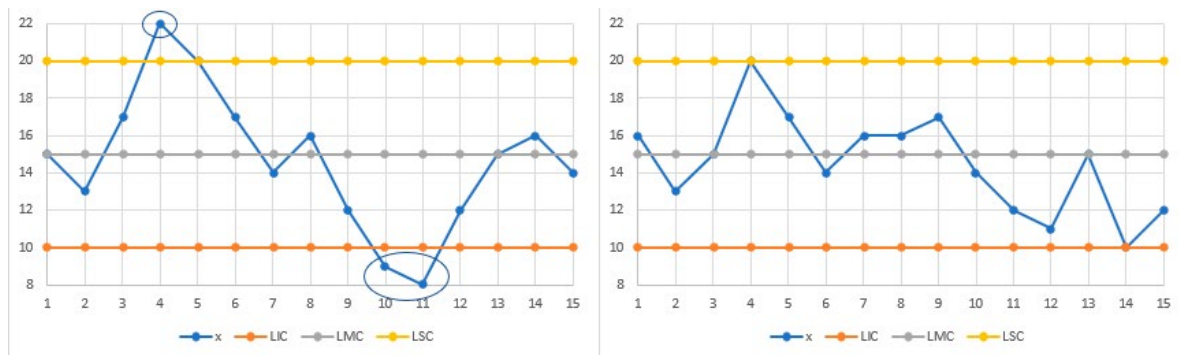
En la figura 40 se muestran dos ejemplos de diagramas que pueden considerarse bajo control. Obsérvese que todos los puntos caen dentro del diagrama, no se ve comportamiento errático y no se perciben patrones de comportamiento predecibles.

Figura 40. Ejemplos de diagramas bajo control



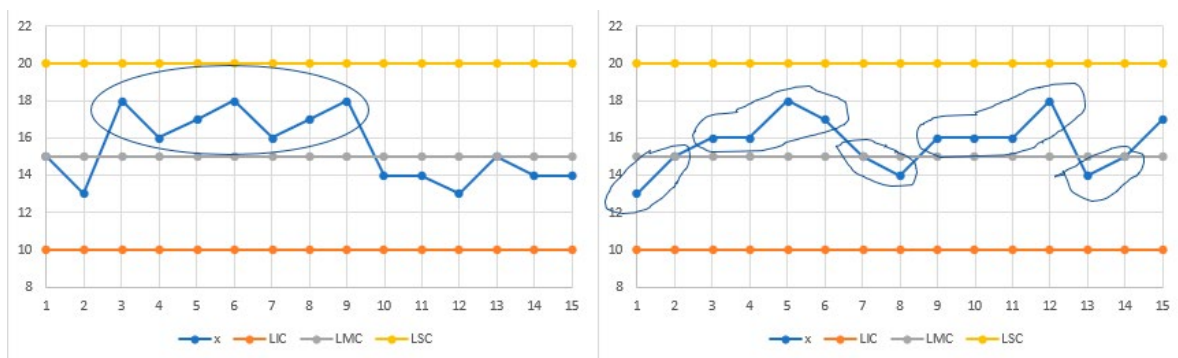
En la primera gráfica a la izquierda de la figura 41 se observa que la muestra 4 presenta un punto por arriba del límite superior; asimismo, las muestras 10 y 11 presentan puntos por debajo del límite inferior, por lo cual se encuentra fuera de control. En la segunda gráfica de la derecha de la misma figura, se observa que la muestra 4 cae sobre el límite superior y la muestra 14 cae sobre el límite inferior; sin embargo, esto no basta para afirmar que el proceso se encuentra fuera de control, no es el caso, de hecho el proceso sí está bajo control.

Figura 41. Puntos por arriba del límite superior o por abajo del límite inferior, el proceso está fuera de control. Si los puntos caen sobre los límites o dentro de ellos, se encuentra bajo control.



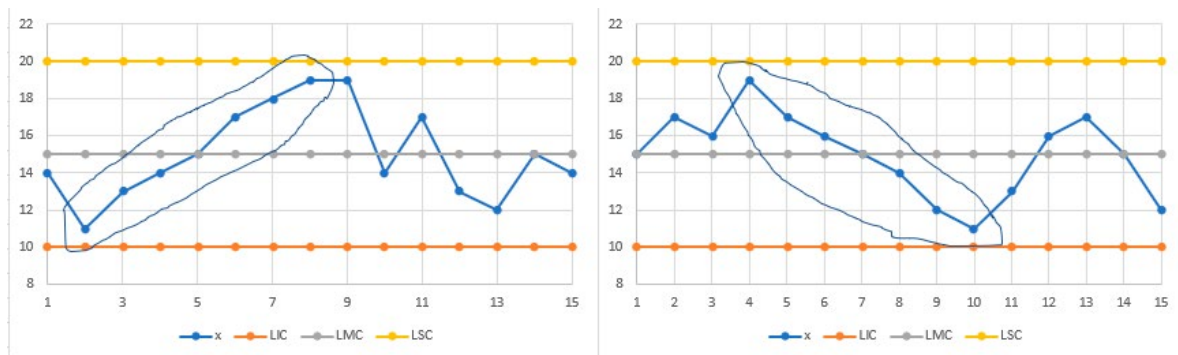
En la figura 42 se ejemplifican dos procesos fuera de control. En la primera gráfica de la izquierda se muestran siete puntos por encima del límite central de proceso, lo cual lo ubica como fuera de control. En la segunda gráfica de la derecha se percibe un ciclo: dos puntos por debajo de la línea central, cuatro por arriba de ella, dos puntos por debajo de la línea central, cuatro por arriba de ella y así sucesivamente.

Figura 42. Diagramas de procesos fuera de control

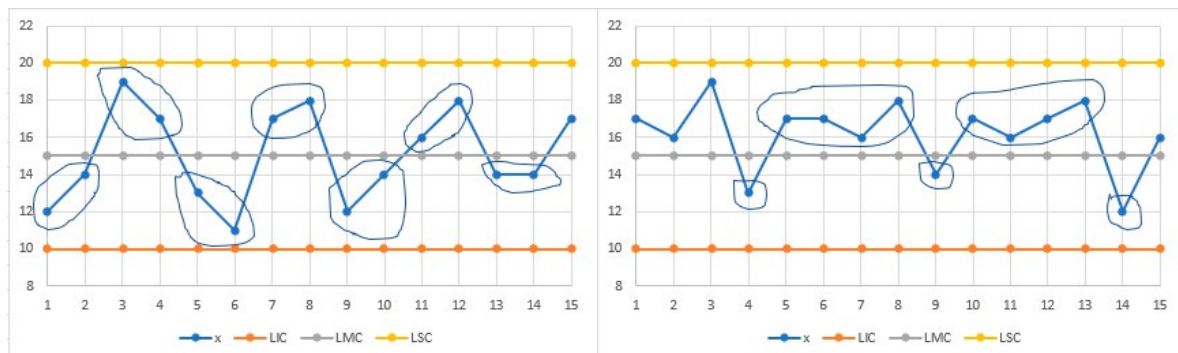


En la figura 43 se ejemplifican dos procesos fuera de control por presentar corridas. En el primer caso de la gráfica de la izquierda se perciben siete puntos sucesivos hacia arriba. En el segundo caso, se muestran siete puntos hacia abajo. En ambos casos, se dice que el proceso se encuentra fuera de control.

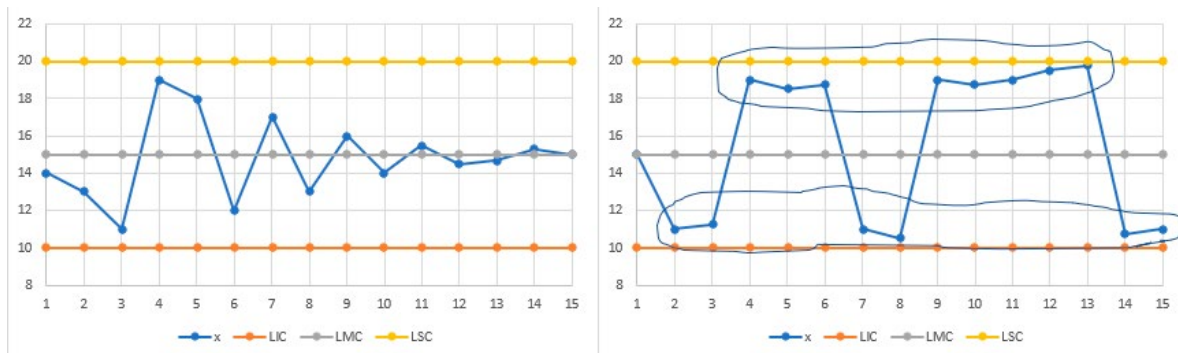
Figura 43. Ejemplos de diagramas fuera de control por presentar corridas



En la figura 44 se presentan diagramas fuera de control por presentar ciclos. En la primera gráfica de la izquierda se percibe un ciclo de cuatro puntos, dos por debajo de la línea central, dos por arriba de ella y así sucesivamente. En la gráfica de la derecha se percibe un ciclo de cinco puntos, cuatro por arriba de la línea central y uno por debajo de ella y así sucesivamente.

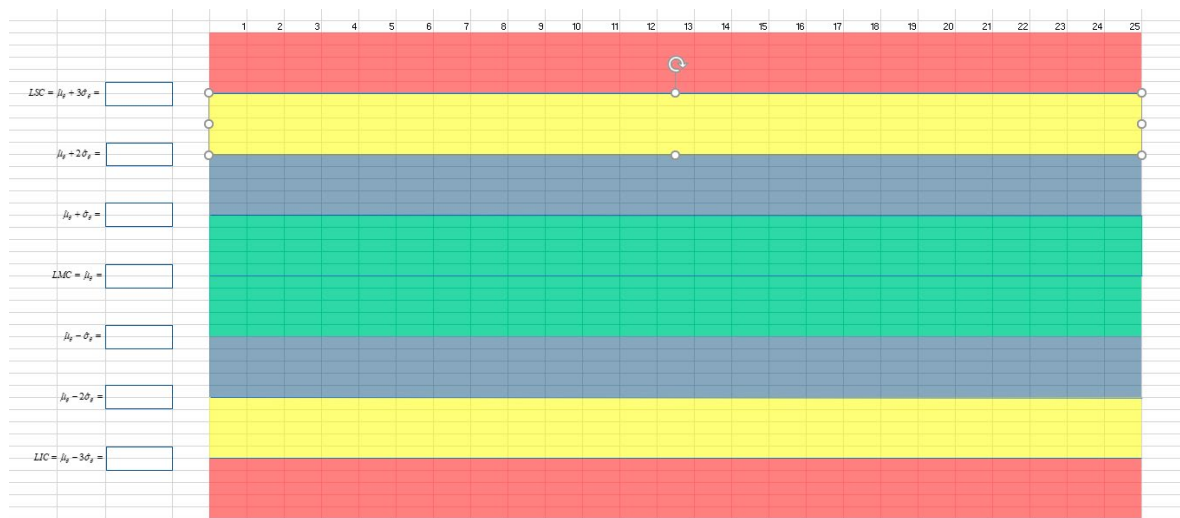
Figura 44. Diagramas fuera de control por comportamiento cíclico


En la figura 45 se muestran dos diagramas fuera de control, el primero de ellos porque los puntos tienden a la línea central del proceso, lo cual rompe su aleatoriedad. En la gráfica de la derecha se aprecia un comportamiento errático de los datos, algunos puntos se pegan al límite inferior y otro grupo de puntos se pega al límite superior de control. En este segundo caso, la razón puede ser que se están revolviendo unidades muestrales de una población con unidades muestrales de otra. Es indispensable separar las unidades muestrales tomadas de una población de las de otra. Si en el proceso existen dos líneas de producción debe separarse y controlarse el proceso de una línea de producción de la otra.

Figura 45. Ejemplos de diagramas fuera de control por tender hacia la línea central o por comportamiento errático (puntos apegados a los límites de control)


Una buena recomendación para interpretar un diagrama de control es usar un gráfico arcoíris como el que se muestra en la figura 46.

Figura 46. Gráfico Arcoiris para interpretar un Diagrama de Control



El formato mostrado en la figura 46 debe ser como una mascarilla transparente que se monta sobre un diagrama de control y que permite interpretar el comportamiento de un proceso, para efectos de decidir si este se encuentra bajo control o fuera de control.

Los criterios que permiten decidir si el proceso se encuentra fuera de control son los siguientes:

1. Si uno o más puntos caen en zona roja, el proceso está fuera de control y hay que pararlo para investigar la razón de este comportamiento.
2. Dos o más de tres puntos sucesivos en zona amarilla, el proceso está fuera de control.
3. Cuatro o más de cinco puntos sucesivos en zona azul, el proceso se encuentra fuera de control.
4. Siete o más de ocho puntos sucesivos en zona verde, el proceso se encuentra fuera de control.

Ahora se calculará la probabilidad de parar un proceso, con base en cada uno de los criterios anteriores. Se considerará inicialmente un proceso bajo control, centrado en la media de diseño; posteriormente se abordarán otros casos:

$$p(\text{un_punto_en_zona_roja}) = p(z < -3) + p(z > 3) =$$

$$p(\text{un_punto_en_zona_roja}) = 2p(z < -3) = 2(0.00135) = 0.0027$$

Esta es la probabilidad de parar un proceso dado que un punto cayó en zona roja, sin tener que parar el proceso, porque el mismo se encuentra bajo control.

$$p(\text{un_punto_en_zona_amarilla}) = 2p(2 < z < 3) = 2(0.0214) = 0.0428$$

$$p(\text{dos_puntos_en_zona_amarilla_de_tres_sucesivos})$$

$$= \binom{3}{2} (0.0428)^2 (1 - 0.428) = 0.00526$$

$$p(\text{un_punto_en_zona_azul}) = 2p(1 < z < 2) = 2(0.1359051) = 0.2718102$$

$$p(\text{cuatro_puntos_en_zona_azul_de_cinco_sucesivos})$$

$$= \binom{5}{4} (0.2718102)^4 (1 - 0.2718102) = 0.0198737$$

$$p(\text{un_punto_en_zona_verde}) = 2p(0 < z < 2) = 2(0.3413447) = 0.6826895$$

$$p(\text{siete_puntos_en_zona_verde_de_ocho_sucesivos})$$

$$= \binom{8}{7} (0.6826895)^7 (1 - 0.6826895) = 0.1754434$$

Cabe señalar que esta plantilla arcoiris es aplicable a cualquier tipo de diagrama de control, tanto por variables, como por atributos. Sin embargo, la escala tendría que adaptarse en cada caso, a las unidades de medida que se estén usando de la característica de control que se esté midiendo. En este aspecto, observe que el gráfico arcoíris está diseñado en su eje vertical con el número de desviaciones estándar de -3 a 3, por lo cual, convendría estandarizar la característica que se esté controlando, lo cual tiene muchas ventajas como se verá más adelante.

Los diagramas de control de Shewhart se clasifican en dos tipos: diagramas de control por atributos y diagramas de control por variables. Para llegar a esta clasificación hay que analizar las características de calidad que se pretenden controlar. Específicamente, para una característica de calidad como la longitud, el ancho, el espesor, el diámetro, la dureza mecánica, la resistencia dieléctrica, la densidad, la temperatura, etcétera, donde se mide su valor con algún instrumento que arroja un resultado numérico, se dice que esta característica de calidad es por variables.

En muchas ocasiones la característica de calidad que se pretende controlar no es medible numéricamente con algún instrumento, como puede ser la apariencia. En estos casos, al hacer la inspección sólo se puede decir si se acepta o se rechaza, ante lo cual se le conoce como característica de calidad por atributos.

Como se verá, los diagramas de control por atributos requieren tamaños de muestra mayores que los diagramas de control por variables, lo cual puede verse como una desventaja, sobre todo si las pruebas a las que son sometidas las unidades muestrales son destructivas. Por ejemplo, en un saco de azúcar, donde la única característica por controlar es su peso, conviene usar un diagrama de control por variables del tipo X-R o X-S. En cambio, en un tornillo, donde existen por lo menos cinco características de calidad de interés, como lo son: tipo de cabeza, largo, diámetro, tipo de rosca y resistencia al torque, tenemos por ejemplo que el tipo de cabeza puede ser cuadrada, hexagonal, gota, etcétera, si se pidió cabeza hexagonal entonces el criterio

es por atributos, ya que sólo existen dos posibles resultados: o es hexagonal (se acepta) o es diferente (se rechaza), por lo cual el tipo de cabeza es por atributos. Las otras características de calidad serían por variables, ya que son medibles con instrumentos que arrojan un resultado numérico. Tal vez se podría pensar que conviene establecer diagramas de control por variables; sin embargo, se tendría que diseñar un plan de muestreo por cada característica de calidad, lo cual lo hace muy complicado, porque son cinco características por controlar. En estos casos, donde existan muchas características de calidad a controlar, conviene aplicar un diagrama de control por atributos que agrupe todas las características a controlar.

Se le denominará productos simples, como sujetadores mecánicos, cajas de cartón, resortes, balines, etcétera, a aquellos cuyo producto no cuenta con muchas componentes. Cada uno de los productos simples puede ser clasificado como Funciona (No Defectuoso) o No Funciona (Defectuoso). En estos casos, el diagrama de control que se aplica es para controlar el número de defectuosos (diagrama np) o la fracción defectuosa (diagrama p).

En cambio, en el caso de productos complejos, como un automóvil, una computadora personal, un refrigerador, una pantalla de televisión, etcétera, existen innumerable cantidad de componentes y cada uno puede presentar diferente tipo de defectos. Cada defecto puede clasificarse de acuerdo con el daño que hagan, en defectos críticos (que impiden que el producto funcione), defectos mayores, defectos medios y defectos menores que no impiden que el producto siga funcionando. En productos complejos lo que se inspecciona es el número de defectos que presenta el producto (diagrama c) o la fracción de defectos por unidad (diagrama u).

Por notación se establecerá que p representa una fracción de artículos con cierta característica. Por ejemplo, en una baraja americana donde existen 52 cartas, la característica de interés es extraer un As o no extraerlo. Se sabe que en el conjunto de 52 cartas hay cuatro ases, por lo que $p=4/52$ es la probabilidad de seleccionar un As al extraer aleatoriamente una carta en un solo ensayo.

En un lote con N artículos, suponiendo que existen D defectuosos, la fracción defectuosa en el lote se obtiene como $p= D/N$.

Se empezará por analizar procesos donde se puede considerar que existe una cierta fracción defectuosa en un proceso continuo, en el cual se puede pensar que el número de artículos producido es infinito.

Cabe remarcar que una cosa es la fracción defectuosa en un proceso o en un lote, el cual se calcula como $p= D/N$, en donde D es el número de defectuosos totales en el lote o en el proceso y N es el tamaño del lote o en el proceso. En cambio, es diferente la fracción defectuosa en una muestra, la cual se calcula como $\hat{p}=d/n$, en donde d es el número de defectuosos en la muestra y n el tamaño de la muestra. Si la muestra elegida es representativa de la población bajo estudio, es razonable suponer que \hat{p} se aproxima a p , sin embargo, esto requiere varias consideraciones que serán tratadas a continuación.

En la Tabla 9 de la página 41 se mostró un intervalo de confianza para la fracción defectuosa en un proceso continuo en donde se puede considerar que

el tamaño de la población es infinito. Dicho intervalo de confianza está dado por:

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \dots (56)$$

En donde p representa a la fracción defectuosa del proceso en un momento del tiempo, $z_{\alpha/2}$ representa el nivel de confianza suponiendo que el comportamiento del número de artículos defectuosos se comporta normalmente, n el tamaño de muestra que se tomará cada cierto período de tiempo y \hat{p} representa un estimador puntual de la fracción defectuosa.

Al tratar de llevar a la práctica este diagrama de control, surgen ciertas preguntas básicas, ¿a qué nivel de confianza se trabajará?, ¿de qué tamaño deberá tomarse la muestra? y ¿cuál va a ser la frecuencia de muestreo?, es decir, ¿cada cuándo se tomará una muestra?

Para dar respuesta a lo anterior, se tomará en cuenta el trabajo pionero del Dr. Walter Shewhart, que propuso que se tomara como nivel de confianza 99.73%, lo que implica en la normal que $z_{\alpha/2} = 3.0$.

La distribución adecuada para analizar el número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño n , seleccionada de un lote donde existe una fracción defectuosa p , es la distribución binomial, no la normal.

La distribución binomial tiene como función de probabilidad la siguiente expresión:

$$p(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \quad \dots (57)$$

Esta expresión tiene como media np y como varianza $np(1-p)$. Si el tamaño del lote o de la población es finito, a la varianza se le multiplica por un factor de corrección dado por $(N-n)/(N-1)$.

Sin embargo, cuando el tamaño del lote se considera infinito, el tamaño de muestra se considera muy grande y $np > 5$ para $p < 0.5$, se considera que la normal es una buena aproximación de la binomial.

Por lo anterior, los tamaños de muestra en el caso de este intervalo de confianza deben ser muy grandes, sobre todo si la p es pequeña. Nótese que ocurriría en la desigualdad si $p = 0.001 \rightarrow np > 5$ implica que $n > 5,000$.

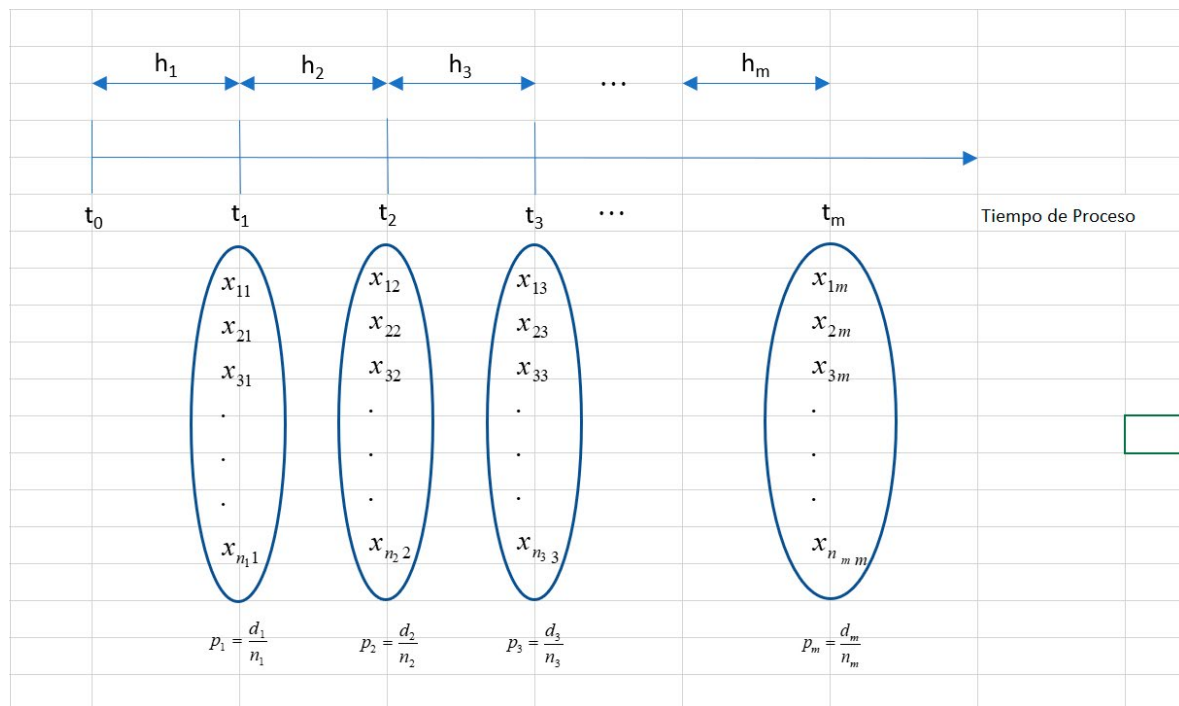
Al respecto, cabe recordar lo que ya se dijo previamente, tratándose de la media muestral se puede suponer que la distribución de probabilidad aplicable es normal; por lo que para no complicarse en la práctica, se aconseja que se persiga que los tamaños de muestra sean mayores de cien.

Finalmente, ¿cuál deberá ser la frecuencia del muestreo? Este es un asunto delicado, deben intervenir expertos conocedores del proceso, se deberán tomar en cuenta la velocidad del proceso, la velocidad con la que se hace inspección de una pieza, el costo de inspección y la frecuencia con la que cambia dicho proceso a lo largo del tiempo.

Por citar un caso, imagínese el lector que la velocidad del proceso fuera de 5,000 piezas por minuto; en una hora se fabrican 30,000 piezas. Si se propusiera tomar una muestra cada hora y el proceso cambiara entre muestras, se estarían produciendo posiblemente 30,000 piezas defectuosas antes de detectar el cambio. De allí que se requiera la presencia de un experto que indique más o menos cuándo cambia el proceso.

Un punto importante que debe analizarse es cómo determinar un estimador \hat{p} de p . Para ello, nuevamente se rescata el pensamiento del Dr. Walter Shewhart, quien propuso un esquema de muestreo como el que se muestra en la figura 47.

Figura 47. Esquema de Muestreo



El esquema de muestreo ilustrado en la figura 47 propone tomar m muestras periódicas de tamaños muestrales $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$, que, para efectos prácticos, de ser posible, conviene que todas las muestras tengan el mismo tamaño de muestra n , cada cierto espacio de tiempo $h_1, h_2, h_3, \dots, h_m$, que por facilidad, conviene se unifiquen en un intervalo constante de tiempo h . Para cada muestra tomada, se deberán realizar las pruebas que se requieran a cada unidad muestral y separarlas en dos partes, los artículos no defectuosos y los artículos defectuosos.

En cada muestra tomada se cuenta el número de defectuosos $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$ y a partir de los defectuosos calcular la fracción defectuosa de cada muestra $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$.

La estimación puntual de la fracción defectuosa en el proceso \hat{p} se podría calcular como un promedio de la siguiente forma:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} d_i}{\sum_{i=1}^{i=m} n_i} \quad \dots (58)$$

A partir de este valor se pueden calcular los límites de control del proceso:

$$\begin{aligned}
 LIC(p_i) &= \hat{p} - 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}} \\
 LMC(p_i) &= \hat{p} \\
 LSC(p_i) &= \hat{p} + 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}
 \end{aligned}
 \quad \dots (59)$$

A los diagramas de control, cuyos límites de control se calculan como se ilustra arriba, se les conoce como Diagramas de Control Tipo p. Este tipo de diagramas se aplican cuando la característica de interés por controlar es la fracción defectuosa de un lote y como se puede apreciar, es irrelevante si el tamaño de muestra es constante o no lo es.

Nótese que en el intervalo de confianza para p que se mostró, se está suponiendo que la característica de calidad es normal:

$$p_i \sim N\left(\hat{u}_p = \hat{p}, \sigma_p = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}\right) \quad \dots (60)$$

Dado que se supone que es normal, esta característica de calidad puede ser estandarizada de la siguiente forma:

$$z_i = \frac{p_i - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}} \quad \dots (61)$$

En este momento conviene mencionar por qué la necesidad de que el tamaño de muestra sea constante, aunque en muchas ocasiones no es posible estandarizar el tamaño de muestra.

Observe que si los tamaños de muestra son diferentes, la estimación puntual de la fracción defectuosa no se calcula con la media aritmética, sino con la media armónica, ya que se trata de fracciones. Si los tamaños de muestra fueran iguales no habría esa necesidad. Por otra parte, si los tamaños de muestra

fueran diferentes, nótese que los límites de control LIC y LSC serían variables de muestra a muestra. Si los tamaños de muestra fueran iguales los límites de control también serían los mismos de muestra a muestra.

Para deducir otro tipo de diagrama de control de defectuosos, conocido como Diagrama de Control por Atributos tipo np, se supondrá que el tamaño de muestra es constante en todas las muestras que se extraigan del proceso.

Suponga que en el intervalo de control del diagrama p:

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Se multiplica la doble desigualdad por n:

$$n\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \leq np \leq n\hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \quad \dots (62)$$

Nótese que en el intervalo de confianza para np que se muestra arriba, se está suponiendo que la característica de calidad es normal:

$$(np)_i \sim N(\hat{u}_p = n\hat{p}, \sigma_p = \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}) \quad \dots (63)$$

Dado que se supone que es normal, esta característica de calidad puede ser estandarizada de la siguiente forma:

$$z_i = \frac{(np)_i - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \quad \dots (64)$$

Para ilustrar esto, se resolverán varios ejercicios al respecto.

Ejemplo 12.1. Una empresa fabrica memorias USB de bajo costo para su venta en las calles de la Ciudad de México. La empresa desea conocer cómo se comporta el número de memorias USB defectuosas que fabrica y decide tomar una muestra diaria de tamaño 300, durante un mes, considerando sólo los

días hábiles y obteniéndose los siguientes artículos defectuosos en cada una: 6, 6, 6, 5, 0, 0, 6, 14, 4, 0, 1, 8, 2, 4, 7, 1, 3, 1, 4, 0, 4, 15, 4, 1.

a. ¿Qué diagrama de control de proceso aplicaría?

Nótese que se trata de artículos defectuosos, que no se menciona cuántas memorias USB fabrica diariamente, pudiendo suponer que el tamaño de producción N es tan grande que se puede considerar infinito, además, el tamaño de muestra es constante $n=300$.

En este caso, el diagrama de control más adecuado es el diagrama np .

b. Calcular los límites de control de proceso del diagrama seleccionado.

Se estimará la fracción defectuosa \hat{p}

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} d_i}{\sum_{i=1}^{i=m} n_i} = \frac{(6+6+6+6+\dots+1)}{24 * 300} = \frac{102}{7200} = 0.0141667$$

Los límites de control están dados por la siguiente expresión:

$$n\hat{p} - 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \leq np \leq n\hat{p} + 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$$LIC(np) = 300(0.0141667) - 3 * \text{raiz}(300 * (0.0141667) * (1 - 0.0141667)) = -1.89 \Rightarrow 0$$

Cabe remarcar que se trata de un número de artículos defectuosos y no tiene sentido un valor negativo, por lo cual, siempre que salga negativo el límite inferior de un diagrama np o p , se fijará en cero.

$$LMC(np) = 300 * (0.0141667) = 4.25$$

$$LSC(np) = 300(0.0141667) + 3 * \text{raiz}(300 * (0.0141667) * (1 - 0.0141667)) = 10.39$$

c. ¿Cómo se grafica el Diagrama de Control np ?

Para graficar el Diagrama de Control por Atributos del Número de Defectuosos en cada muestra de tamaño 300 de memorias USB, se realizan los siguientes pasos:

- i. Con los datos proporcionados se elabora la tabla 21 que se muestra a continuación.
- ii. En la Tabla 21, se iluminan los datos junto con los encabezados, dando un clic y arrastrando el cursor desde la primera celda del lado izquierdo de la tabla, hasta la última celda del lado derecho de la tabla.

Tabla 21. Datos del ejemplo de memorias USB

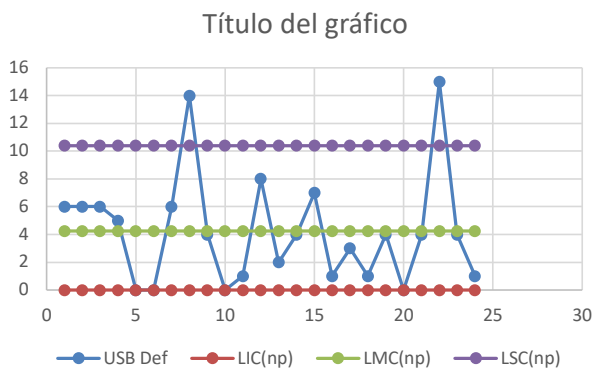
| Muestra | USB Def | LIC(np) | LMC(np) | LSC(np) |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 6 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 2 | 6 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 3 | 6 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 4 | 5 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 5 | 0 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 6 | 0 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 7 | 6 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 8 | 14 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 9 | 4 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 10 | 0 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 11 | 1 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 12 | 8 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 13 | 2 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 14 | 4 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 15 | 7 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 16 | 1 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 17 | 3 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 18 | 1 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 19 | 4 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 20 | 0 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 21 | 4 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 22 | 15 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 23 | 4 | 0 | 4.25 | 10.39 |
| 24 | 1 | 0 | 4.25 | 10.39 |

Suma= 102

iii. Se da un clic en el menú denominado Insertar, y luego en el submenú que se denomina Insertar gráfico de dispersión; en la ventana que aparece se elige la opción

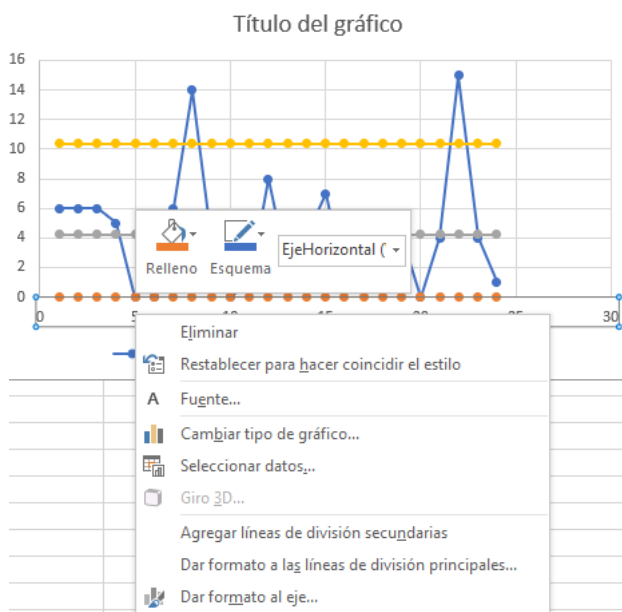
iv. Aparece la imagen de la figura 48, la cual debe mejorarse.

Figura 48



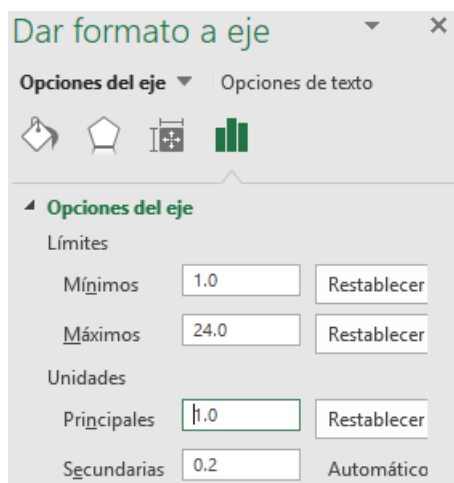
v. Dar un clic con el botón derecho del ratón dentro de la imagen y aparece la ventana de la figura 49.

Figura 49



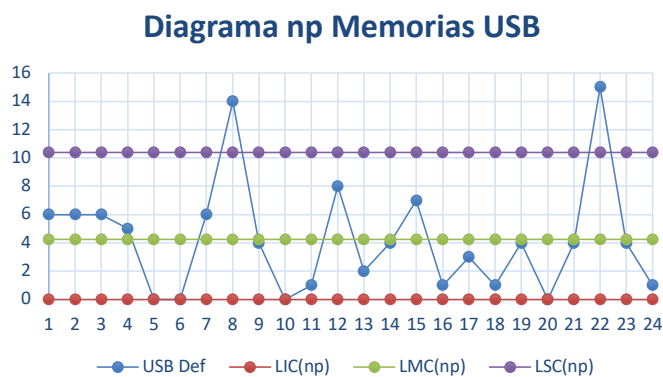
vi. Se elige Dar formato al eje y aparece la pantalla de la figura 50.

Figura 50



vii. El Diagrama de Control queda como se muestra en la figura 51.

Figura 51. Diagrama de control tipo np usando Excel.

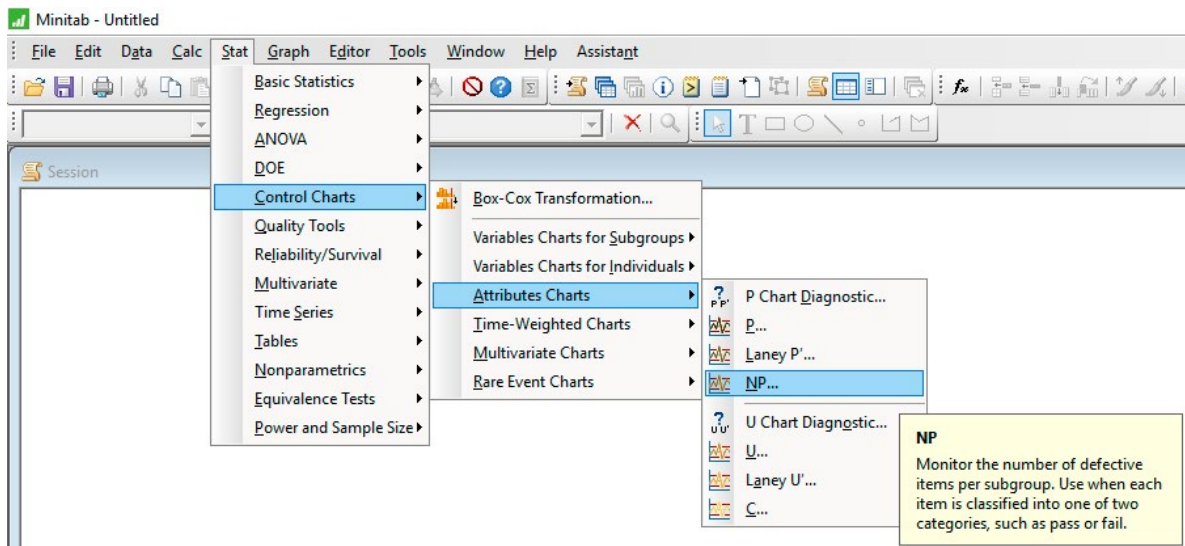


Este diagrama de control claramente refleja que existen dos puntos donde el número de artículos defectuosos en la muestra rebasa el límite superior de control, por lo cual se afirma que tal como está, se encuentra fuera de control.

Este diagrama de control np también puede graficarse usando el software Minitab. Lo primero es proporcionar los datos en su hoja de cálculo. En la columna C1 se coloca el número que identifica a cada muestra y en la columna

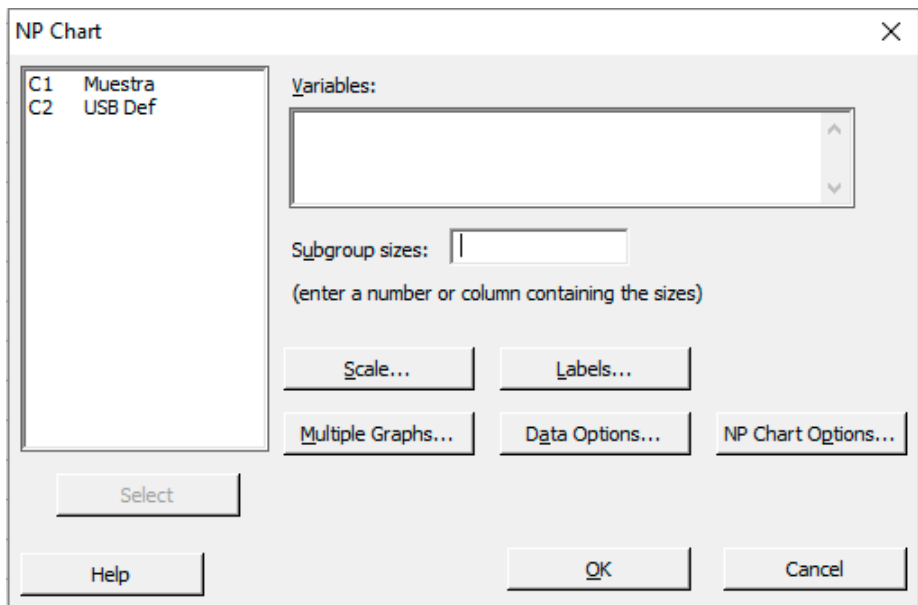
C2 se coloca el número de memorias USB defectuosas en cada muestra. Posteriormente, en el menú superior de Minitab se elige la opción “Stat”, luego “Control Charts”, después “Attributes Charts” y finalmente NP, como se muestra en la figura 52.

Figura 52



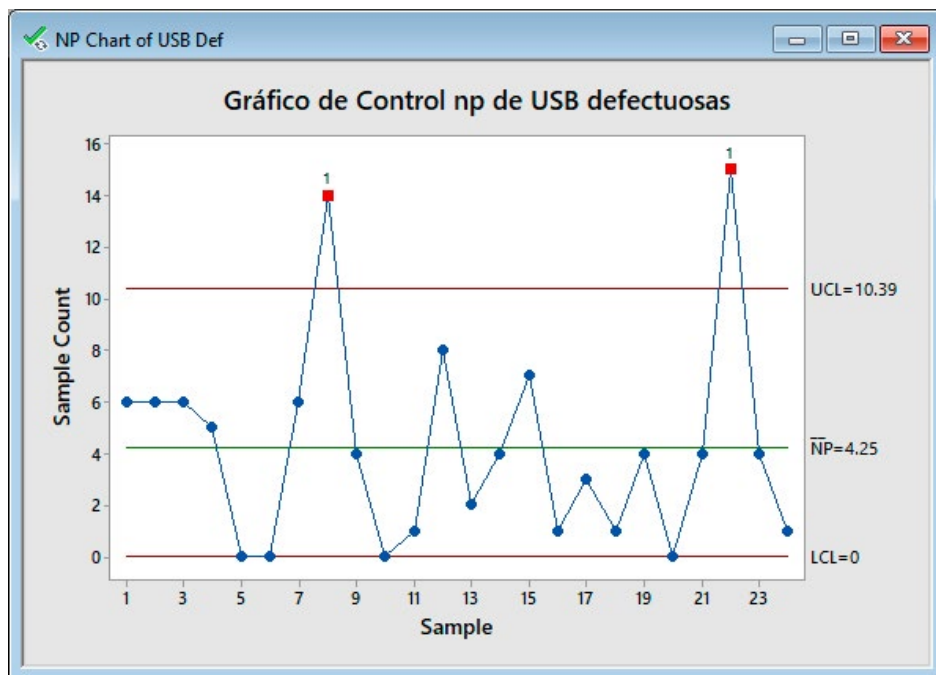
Aparece la pantalla de la figura 53, como se muestra a continuación.

Figura 53



En esta pantalla, se ilumina C2 USB Def dando un click sobre ella, y con el botón “Select” se selecciona, apareciendo en el menú que dice “Variables”. En el menú que dice “Subgroup sizes” se tecléa 300 y en el botón que dice “Labels” se colocan los títulos del gráfico. Después de indicar OK, aparece el gráfico de control np que se muestra en la figura 54.

Figura 54. Gráfico np usando Minitab



También puede trazarse el diagrama de control np usando el software R. Para ello, se usa el código que aparece en la figura 55.

Figura 55

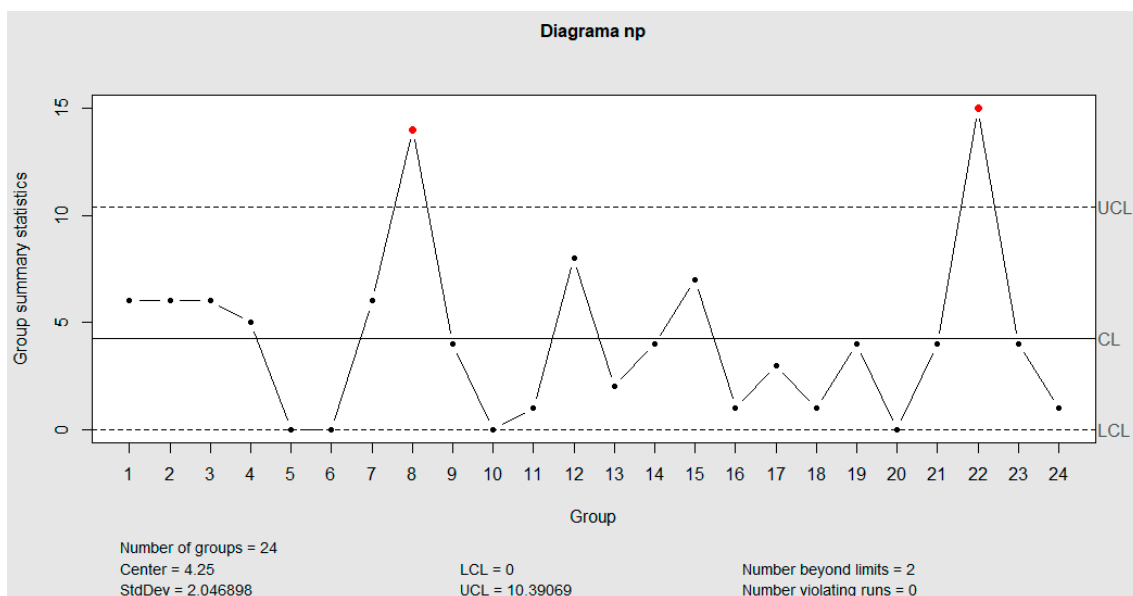
```

D:/Sem 2018-2/Calidad 2018-2 - RStudio
File Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help
+ Go to file/function Addins
Untitled1* x
Source on Save Run
1 library(qcc)
2 def<- c(6, 6, 6, 5, 0, 0, 6, 14, 4, 0, 1, 8, 2, 4, 7, 1, 3, 1, 4, 0, 4, 15, 4, 1)
3 qcc(def, type="np", sizes=300, title="Diagrama np")
4
    
```

Obteniéndose la respuesta que aparece a continuación y la gráfica que aparece en la figura 56.

```
List of 11
 $ call      : language qcc(data = def, type = "np", sizes = 300, title = "Diagrama np")
 $ type      : chr "np"
 $ data.name : chr "def"
 $ data      : num [1:24, 1] 6 6 6 5 0 0 6 14 4 0 ...
 .. attr(*, "dimnames")=List of 2
 $ statistics: Named num [1:24] 6 6 6 5 0 0 6 14 4 0 ...
 .. attr(*, "names")= chr [1:24] "1" "2" "3" "4" ...
 $ sizes     : num [1:24] 300 300 300 300 300 300 300 300 300 300 ...
 $ center    : num 4.25
 $ std.dev   : num 2.05
 $ nsigmas   : num 3
 $ limits    : num [1, 1:2] 0 10.4
 .. attr(*, "dimnames")=List of 2
 $ violations:List of 2
 - attr(*, "class")= chr "qcc"
```

Figura 56. Diagrama de control tipo np usando R



d. ¿Cómo se obtienen los límites de control revisados?

Suponga que al analizar las muestras 8 y 22 de la tabla 21 y su diagrama de la figura 51, el analista determina que existen causas atribuibles que justifican que el proceso se haya salido de control. Si es así, se podría pensar en eliminarlas y volver a calcular los límites de control estadístico de proceso.

En la tabla 22 se muestra qué ocurre al eliminar las muestras 8 y 22. Observe que la estimación de la fracción defectuosa se modifica de 0.0141667 a 0.01106061, lo cual modifica los límites de control:

Tabla 22. Memorias USB defectuosas eliminando las muestras 8 y 22

| Muestra | USB Def | LIC(np) | LMC(np) | LSC(np) |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 6 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 2 | 6 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 3 | 6 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 4 | 5 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 5 | 0 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 6 | 0 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 7 | 6 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 9 | 4 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 10 | 0 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 11 | 1 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 12 | 8 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 13 | 2 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 14 | 4 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 15 | 7 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 16 | 1 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 17 | 3 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 18 | 1 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 19 | 4 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 20 | 0 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 21 | 4 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 23 | 4 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| 24 | 1 | 0 | 3.32 | 8.75 |
| Suma= | 73 | | | |

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{i=22} d_i}{22 * 300} = \frac{73}{6600} = 0.01106061$$

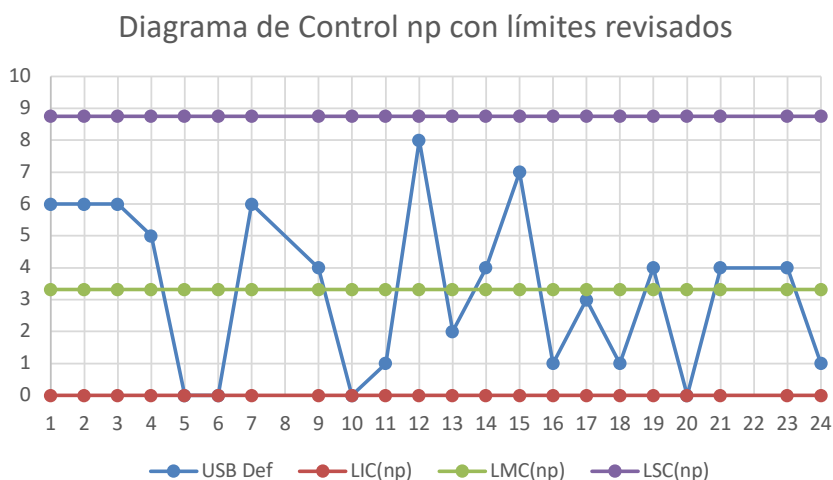
$$\text{LimInf}(np) = -2.116275509 = 0$$

$$\text{LimMed}(np) = 3.318181818$$

$$\text{LimInf}(np) = 8.752639146$$

En la figura 57 se muestra el diagrama de control estadístico de proceso. A los nuevos límites de control obtenidos se les conoce como límites de control revisados.

Figura 57. Diagrama de Control np con límites revisados



Los límites de control para el diagrama np que pueden ser usados a futuro podrían ser $0 \leq np \leq 8$

- e. Con los límites de control estadístico recién diseñados, suponga que en el siguiente mes de producción se tomaron 20 muestras, obteniéndose los siguientes artículos defectuosos por cada 300 artículos muestreados diariamente: 2, 3, 5, 5, 4, 3, 4, 0, 1, 1, 5, 9, 4, 1, 6, 5, 3, 6, 9, 2, lo cual se observa en la figura 58. ¿Considera Usted que el proceso se encuentra bajo control?, ¿en qué momento debe detenerse?

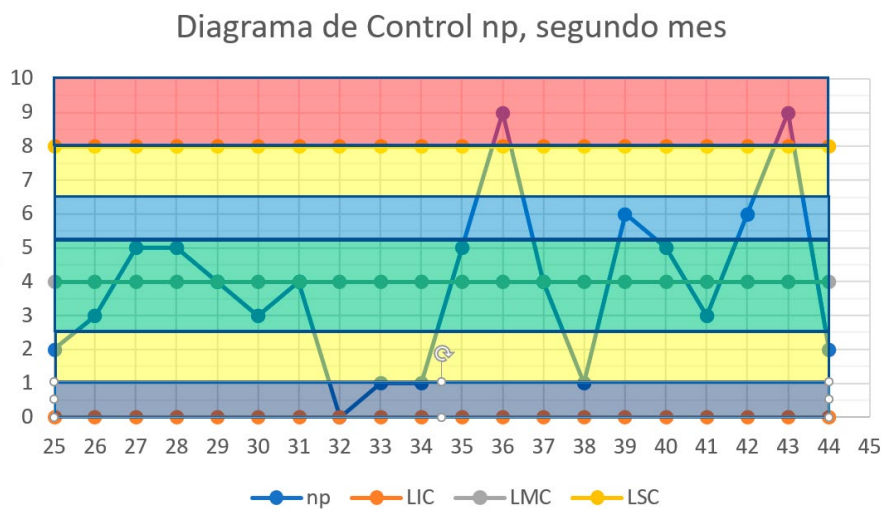
Cabe señalar que en este inciso en particular se resalta que es más eficiente usar el software R debido a que traza ambos diagramas en una sola figura, el anterior y el más reciente. Primero se hará el análisis con Excel.

Con los límites de control de la tabla 23, se traza el diagrama de control estadístico de proceso de los nuevos puntos muestreados, que se ilustra en la figura 59.

Tabla 23. Memorias USB defectuosas. Segundo mes

| Muestra | np | LIC | LMC | LSC |
|---------|----|-----|-----|-----|
| 25 | 2 | 0 | 4 | 8 |
| 26 | 3 | 0 | 4 | 8 |
| 27 | 5 | 0 | 4 | 8 |
| 28 | 5 | 0 | 4 | 8 |
| 29 | 4 | 0 | 4 | 8 |
| 30 | 3 | 0 | 4 | 8 |
| 31 | 4 | 0 | 4 | 8 |
| 32 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| 33 | 1 | 0 | 4 | 8 |
| 34 | 1 | 0 | 4 | 8 |
| 35 | 5 | 0 | 4 | 8 |
| 36 | 9 | 0 | 4 | 8 |
| 37 | 4 | 0 | 4 | 8 |
| 38 | 1 | 0 | 4 | 8 |
| 39 | 6 | 0 | 4 | 8 |
| 40 | 5 | 0 | 4 | 8 |
| 41 | 3 | 0 | 4 | 8 |
| 42 | 6 | 0 | 4 | 8 |
| 43 | 9 | 0 | 4 | 8 |
| 44 | 2 | 0 | 4 | 8 |

Figura 58. Diagrama de control de memorias USB defectuosas en su segundo mes



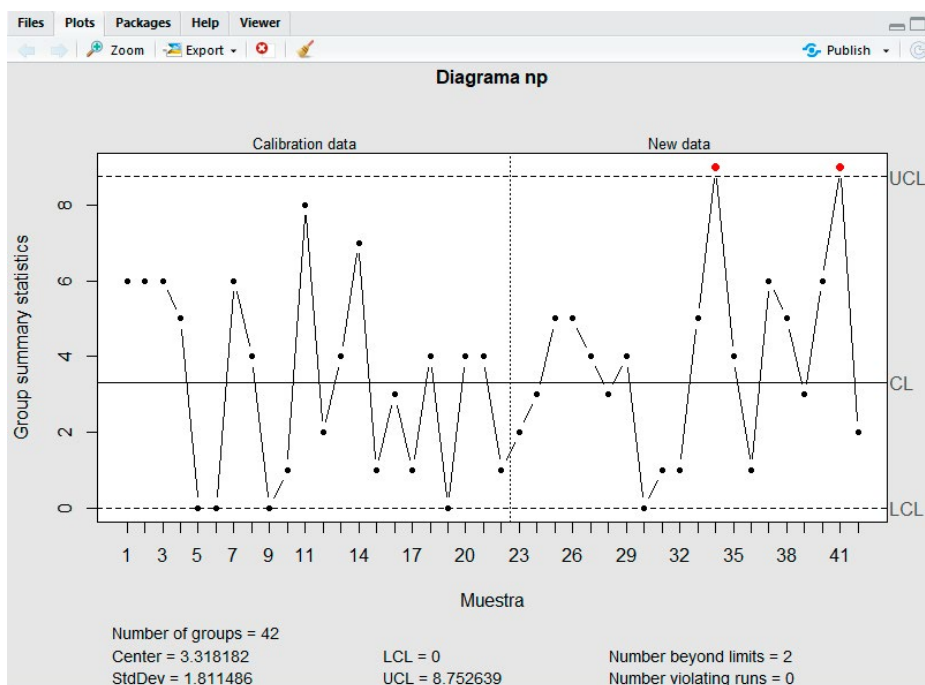
Como se puede apreciar en la figura 58, el proceso debió pararse en la muestra 36, ya que un punto cayó en zona roja. Se detiene el proceso para investigar por qué se salió de control. También debe decidirse si se deben recalculan los límites. Note que si el límite superior hubiera estado en $LSC=9$, el proceso hubiera estado bajo control.

Ahora, se grafica con el software R, usando las siguientes instrucciones:

```
>library(qcc)
>def<-c(6,6,6,5,0,0,6,4,0,1,8,2,4,7,1,3,1,4,0,4,4,1,2,3,5,5,4,3,4,0,1,1,5,9,4,
1,6,5,3,6,9,2)
>qcc(def[1:22],type="np",sizes=300,newdata=def[23:42],newsizes=300,title="Diagrama np",xlab="Muestra",nsigmas = 3, plot = TRUE)
```

El diagrama np que se obtiene se muestra en la figura 59. Nótese que, el diagrama contiene todas las muestras, tanto las 22 iniciales (se eliminaron las que se salían de control) para la calibración de los límites de control, como las nuevas 20 muestras del proceso posteriores; en estas 20 nuevas muestras, dos puntos se salen de los límites de control, por lo que se debió haber detenido en el primero que se sale de control.

Figura 59



- f. Calcule la capacidad de proceso suponiendo que la especificación establece un máximo de 8 artículos defectuosos.

Como se puede apreciar, solo existe un límite de especificación superior LSE= 8, por lo cual la capacidad de proceso se estima con Cpu:

La media de proceso es $\mu_{np} = n\hat{p} = 3.12$ y su desviación estándar es $\sigma_{np} = \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} = 1.8114858$, por lo que el Cpu está dado por:

$$Cpu = \frac{LSE - \mu_{np}}{\sigma_{np}} = \frac{8 - 3.12}{3 * 1.81} = 0.898 < 1.33$$

El proceso no es capaz de cumplir la especificación. Conviene reducir la desviación estándar del proceso antes de continuar aplicando el diagrama de control.

- g. Con referencia al inciso (e) de este problema, suponga que, en un cierto momento, la fracción defectuosa cambia de $p = 0.013333$ a $p' = 0.03$, estime la probabilidad de que el proceso no detecte el cambio en la primera muestra que se tome después de esto.

Debe remarcarse que al cambiar la fracción defectuosa, cambia la media del proceso $np' = 300(0.03) = 9$ y también la desviación estándar de proceso $\sigma_{np} = \sqrt{np'(1-p')} = 2.954657$

El diagrama de control np no va a detectar que el proceso cambió, en la siguiente muestra que se tome, si el punto cae entre cero y ocho, por lo cual, la probabilidad de que no detecte el cambio es:

$$p(0 \leq x \leq 8) = \sum_{x=0}^{x=8} \binom{300}{x} (0.03)^x (1-0.03)^{(300-x)} = 0.453642$$

La probabilidad de que sí detecte el cambio está dada por el complemento de la anterior probabilidad:

Probabilidad de detectar el cambio = $1 - 0.453642 = 0.546358 = 54.64\%$

- h.** Con referencia al inciso (g) de este problema, suponga que, en un cierto momento, la fracción defectuosa cambia de $p = 0.013333$ a $p' = 0.03$, estime la probabilidad de que el proceso no detecte el cambio en la primera muestra, tampoco en la segunda y que lo detecte hasta la tercera muestra después del cambio.

Para visualizar una solución del problema que se plantea, vea la figura 60 siguiente:

Figura 60



Probabilidad de detectar el cambio hasta la tercera muestra = (probabilidad de no detectarlo en la primera) * (probabilidad de no detectarlo en la segunda) * (probabilidad de detectarlo en la tercera) =

$$\text{Probabilidad de detectarlo hasta la tercera muestra} = (0.045364)^2 * (0.954636) = 0.001965$$

- i.** ¿Cuál sería la probabilidad de detectarlo cuando mucho a la tercera muestra?

Probabilidad de detectarlo cuando mucho a la tercera muestra = probabilidad de detectarlo a la primera + probabilidad de detectarlo a la segunda muestra + probabilidad de detectarlo a la tercera muestra =

$$0.954636 + (0.045364)(0.954636) + (0.045364)^2(0.954636) = 0.999907$$

Como puede apreciarse, dado que se prueba periódicamente a través de muestras, a la larga el diagrama va a encontrar que el proceso cambió. Es importante que se tome en cuenta que un diagrama de control a la larga detecta cambios aunque sean pequeños. En el tema 14 se verán nuevos diagramas de control, algunos de ellos específicamente para mejorar la efectividad de la detección ante cambios pequeños.

Ejemplo 12.2. Un fabricante de componentes de audio para computadora tiene un proceso productivo al que le recopila datos tomados de la prueba final a que se somete el producto en el mes de abril, los cuales se muestran a continuación:

Tabla 24. Datos de componentes de audio inspeccionados en el mes de abril

| Subgrupo | Cantidad inspeccionada | Artículos defectuosos |
|----------|------------------------|-----------------------|
| 1 | 2,450 | 42 |
| 2 | 1,997 | 39 |
| 5 | 2,168 | 52 |
| 6 | 1,941 | 47 |
| 7 | 1,962 | 34 |
| 8 | 2,244 | 29 |
| 9 | 1,238 | 53 |
| 12 | 2,289 | 45 |
| 13 | 1,464 | 26 |
| 14 | 2,061 | 47 |
| 15 | 1,667 | 34 |
| 16 | 2,350 | 31 |
| 19 | 2,354 | 38 |
| 20 | 1,509 | 28 |
| 21 | 2,190 | 30 |
| 22 | 2,678 | 113 |
| 23 | 2,252 | 58 |
| 26 | 1,641 | 34 |
| 27 | 1,782 | 19 |
| 28 | 1,993 | 30 |
| 29 | 2,382 | 17 |
| 30 | 2,132 | 46 |

a. ¿Qué tipo de diagrama de control aplicaría para controlar el proceso?

Nótese que lo que se mide es el número de artículos defectuosos en muestras diarias de tamaño variable. En este caso conviene aplicar un diagrama tipo p.

b. Calcular los límites de control para el diagrama de control elegido.

En Excel se completa la tabla 25.

Tabla 25. Cálculo de Límites de Control

| Subgrupo | Cantidad inspeccionada | Artículos defectuosos | p_i | LIC (p) | LMC (p) | LSC (p) |
|----------|------------------------|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2,450 | 42 | 0.017143 | 0.011464 | 0.019936 | 0.028408 |
| 2 | 1,997 | 39 | 0.019529 | 0.010552 | 0.019936 | 0.029319 |
| 5 | 2,168 | 52 | 0.023985 | 0.010930 | 0.019936 | 0.028942 |
| 6 | 1,941 | 47 | 0.024214 | 0.010418 | 0.019936 | 0.029454 |
| 7 | 1,962 | 34 | 0.017329 | 0.010469 | 0.019936 | 0.029403 |
| 8 | 2,244 | 29 | 0.012923 | 0.011083 | 0.019936 | 0.028788 |
| 9 | 1,238 | 53 | 0.042811 | 0.008018 | 0.019936 | 0.031854 |
| 12 | 2,289 | 45 | 0.019659 | 0.011171 | 0.019936 | 0.028700 |
| 13 | 1,464 | 26 | 0.017760 | 0.008976 | 0.019936 | 0.030895 |
| 14 | 2,061 | 47 | 0.022804 | 0.010699 | 0.019936 | 0.029172 |
| 15 | 1,667 | 34 | 0.020396 | 0.009665 | 0.019936 | 0.030206 |
| 16 | 2,350 | 31 | 0.013191 | 0.011285 | 0.019936 | 0.028586 |
| 19 | 2,354 | 38 | 0.016143 | 0.011293 | 0.019936 | 0.028579 |
| 20 | 1,509 | 28 | 0.018555 | 0.009141 | 0.019936 | 0.030731 |
| 21 | 2,190 | 30 | 0.013699 | 0.010975 | 0.019936 | 0.028896 |
| 22 | 2,678 | 113 | 0.042196 | 0.011832 | 0.019936 | 0.028039 |
| 23 | 2,252 | 58 | 0.025755 | 0.011099 | 0.019936 | 0.028772 |
| 26 | 1,641 | 34 | 0.020719 | 0.009584 | 0.019936 | 0.030287 |
| 27 | 1,782 | 19 | 0.010662 | 0.010002 | 0.019936 | 0.029869 |
| 28 | 1,993 | 30 | 0.015053 | 0.010543 | 0.019936 | 0.029329 |
| 29 | 2,382 | 17 | 0.007137 | 0.011344 | 0.019936 | 0.028528 |
| 30 | 2,132 | 46 | 0.021576 | 0.010854 | 0.019936 | 0.029017 |

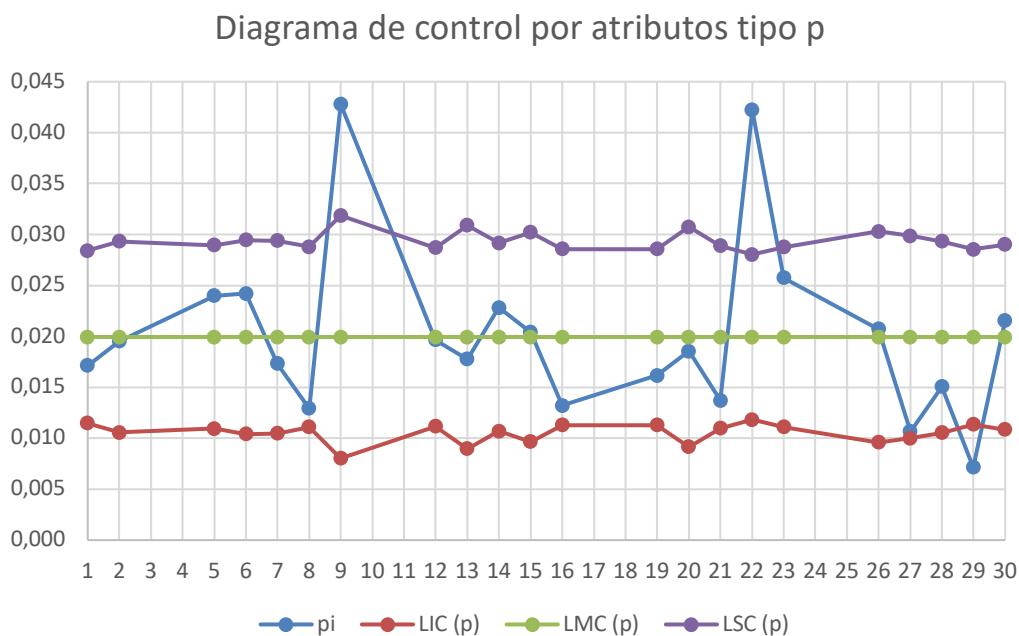
Suma= 44,744 892
 $p=$ 0.019935634

c. Trace el diagrama de control de proceso

En la figura 61 se ilustra el diagrama de control estadístico de proceso tipo “p”, en donde se aprecia que sus límites de control son variables.

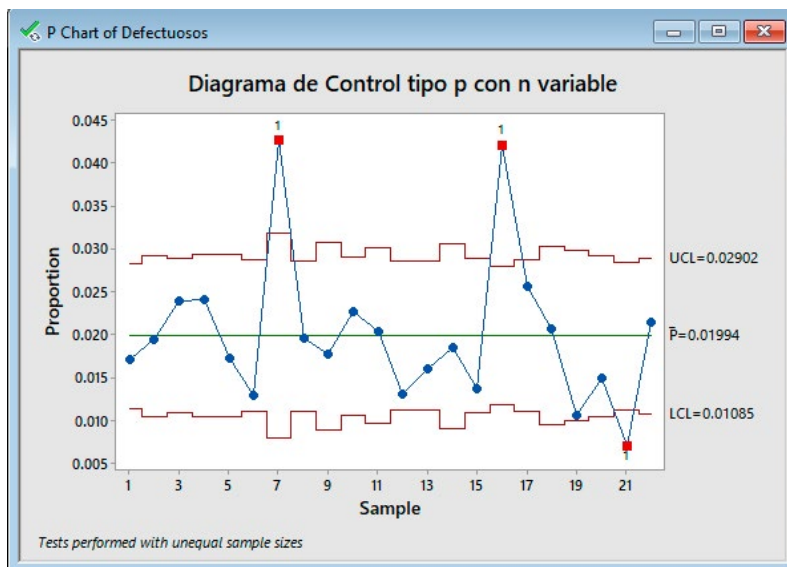
Interpretar un diagrama de control estadístico con límites constantes es complicado, por lo que tratar de interpretar un diagrama de control con límites variables resulta ser aún más difícil. En este caso en particular no existe tanto problema ya que claramente se percibe que el proceso se sale de control en las muestras 8, 17 y 29, debido a que los puntos caen fuera de los límites de control.

Figura 61. Diagrama de control de fracción defectuosa con tamaño de muestra variable



En Minitab, basta capturar las primeras tres columnas de la tabla 25, obteniéndose la gráfica de la figura 62.

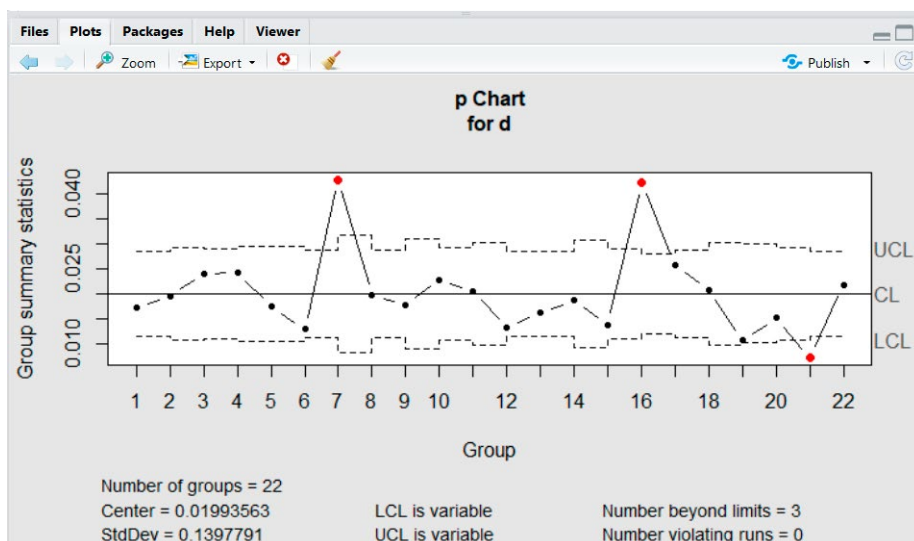
Figura 62



En R, basta introducir las siguientes instrucciones, para obtener la gráfica que se muestra en la figura 63.

```
>library(qcc)
>n<- c(2450,1997,2168,1941,1962,2244,1238,2289,1464,2061,1667,2350,2354,15
09,2190,2678,2252,1641,1782,1993,2382,2132)
>d<- c(42,39,52,47,34,29,53,45,26,47,34,31,38,28,30,113,58,34,19,30,17,46)
>data.frame(n,d)
>qcc(d,type="p",sizes=n)
```

Figura 63



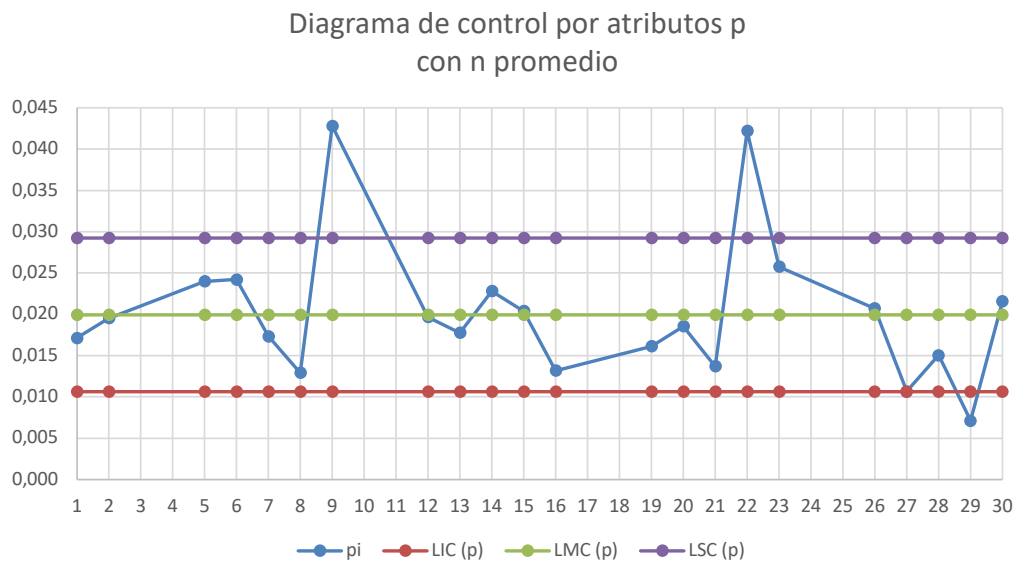
Sea cual sea el software que se utilice, lo que se requiere hacer es ver la manera de que los límites de control sean constantes.

Existen dos formas para ello, la primera es tomar como valor de n el promedio de cada una de las n_i de cada muestra, tal como se observa en la tabla 26.

Tabla 26. Cálculo de Límites Constantes del Diagrama p con n promedio

| Subgrupo | Cantidad inspeccionada | Artículos defectuosos | p_i | LIC (p) | LMC (p) | LSC (p) |
|-----------|------------------------|-----------------------|--------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 2,450 | 42 | 0.0171 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 2 | 1,997 | 39 | 0.0195 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 5 | 2,168 | 52 | 0.0240 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 6 | 1,941 | 47 | 0.0242 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 7 | 1,962 | 34 | 0.0173 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 8 | 2,244 | 29 | 0.0129 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 9 | 1,238 | 53 | 0.0428 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 12 | 2,289 | 45 | 0.0197 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 13 | 1,464 | 26 | 0.0178 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 14 | 2,061 | 47 | 0.0228 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 15 | 1,667 | 34 | 0.0204 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 16 | 2,350 | 31 | 0.0132 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 19 | 2,354 | 38 | 0.0161 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 20 | 1,509 | 28 | 0.0186 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 21 | 2,190 | 30 | 0.0137 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 22 | 2,678 | 113 | 0.0422 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 23 | 2,252 | 58 | 0.0258 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 26 | 1,641 | 34 | 0.0207 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 27 | 1,782 | 19 | 0.0107 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 28 | 1,993 | 30 | 0.0151 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 29 | 2,382 | 17 | 0.0071 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| 30 | 2,132 | 46 | 0.0216 | 0.0106 | 0.0199 | 0.0292 |
| | 44,744 | 892 | | | | |
| Promedio= | 2,034 | 41 | | | | |
| | $p^{\wedge} =$ | 0.0199 | | | | |

El diagrama de control en Excel se muestra en la figura 64 a continuación.

Figura 64.


La otra forma de obligar a que los límites de control sean constantes es estandarizar la variable de control, como se muestra a continuación.

Dado que se supone que la característica de calidad es normal, puede ser estandarizada de la siguiente forma:

$$z_i = \frac{p_i - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_i}}}$$

Se recalcula la tabla 25 con la fórmula anterior, tal como se muestra en la tabla 27.

En la figura 65 se observa en Excel el diagrama de control estandarizado con la plantilla arcoiris para su interpretación.

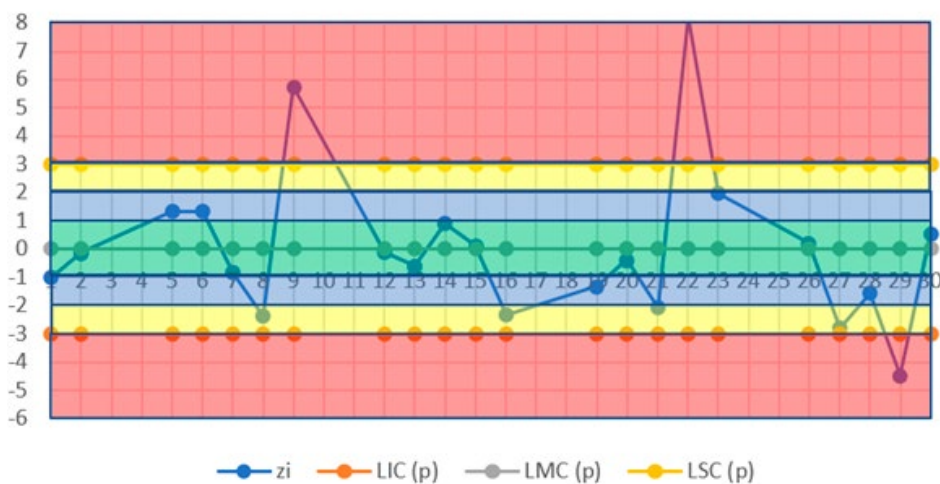
Nótese que el proceso se encuentra fuera de control en las muestras 9, 22 y 29.

Tabla 27. Tabla del diagrama p estandarizado

| Subgrupo | Cantidad inspeccionada | Artículos defectuosos | p_i | z_i | LIC (p) | LMC (p) | LSC (p) |
|----------|------------------------|-----------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 2,450 | 42 | 0.0171 | -0.9889 | -3 | 0 | 3 |
| 2 | 1,997 | 39 | 0.0195 | -0.1299 | -3 | 0 | 3 |
| 5 | 2,168 | 52 | 0.0240 | -0.3489 | -3 | 0 | 3 |
| 6 | 1,941 | 47 | 0.0242 | -0.3485 | -3 | 0 | 3 |
| 7 | 1,962 | 34 | 0.0173 | -0.8259 | -3 | 0 | 3 |
| 8 | 2,244 | 29 | 0.0129 | -0.3764 | -3 | 0 | 3 |
| 9 | 1,238 | 53 | 0.0428 | -0.7581 | -3 | 0 | 3 |
| 12 | 2,289 | 45 | 0.0197 | -0.0946 | -3 | 0 | 3 |
| 13 | 1,464 | 26 | 0.0178 | -0.5956 | -3 | 0 | 3 |
| 14 | 2,061 | 47 | 0.0228 | -0.9317 | -3 | 0 | 3 |
| 15 | 1,667 | 34 | 0.0204 | -0.1344 | -3 | 0 | 3 |
| 16 | 2,350 | 31 | 0.0132 | -0.3389 | -3 | 0 | 3 |
| 19 | 2,354 | 38 | 0.0161 | -0.3165 | -3 | 0 | 3 |
| 20 | 1,509 | 28 | 0.0186 | -0.3835 | -3 | 0 | 3 |
| 21 | 2,190 | 30 | 0.0137 | -0.0881 | -3 | 0 | 3 |
| 22 | 2,678 | 113 | 0.0422 | -0.2411 | -3 | 0 | 3 |
| 23 | 2,252 | 58 | 0.0258 | -0.9756 | -3 | 0 | 3 |
| 26 | 1,641 | 34 | 0.0207 | -0.2270 | -3 | 0 | 3 |
| 27 | 1,782 | 19 | 0.0107 | -0.8006 | -3 | 0 | 3 |
| 28 | 1,993 | 30 | 0.0151 | -0.5595 | -3 | 0 | 3 |
| 29 | 2,382 | 17 | 0.0071 | -0.4688 | -3 | 0 | 3 |
| 30 | 2,132 | 46 | 0.0216 | -0.5418 | -3 | 0 | 3 |

Figura 65

Diagrama de Control p estandarizado



Ahora se abordará un proceso con un número de artículos producidos finito, en el cual, en el diagrama de control se agrega un factor de corrección. Esto sucede ya que en los diagramas anteriores se parte del supuesto de que la característica que se controla tiene distribución de probabilidad binomial. Pero la distribución binomial parte del supuesto de que p es constante de ensayo a ensayo y N tiende a infinito. Si el tamaño del lote es finito, entonces la distribución no es binomial, sino hipergeométrica. Recuérdese que para una distribución hipergeométrica la media de proceso es $\mu_{np} = n\hat{p}$ y la desviación estándar es $\hat{\sigma}_{np} = \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$ En estos casos el diagrama np tiene como límites de control los siguientes:

$$n\hat{p} - 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \leq np \leq n\hat{p} + 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \quad \dots (65)$$

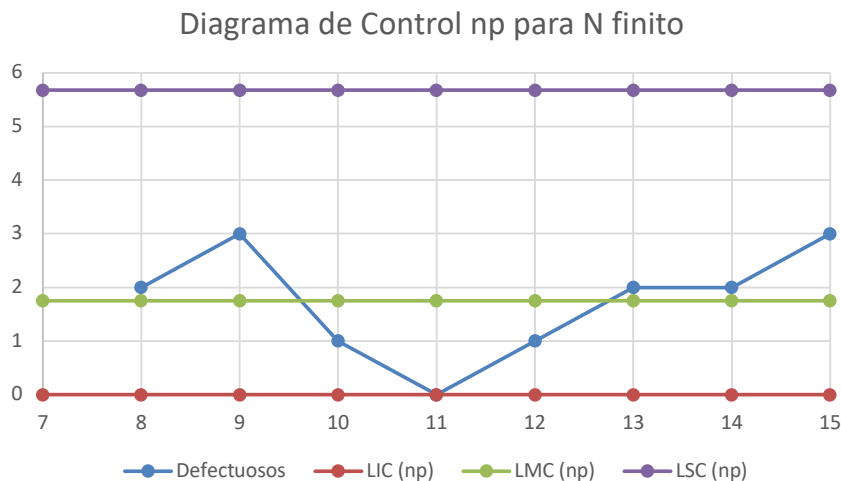
Ejemplo 12.3. Un proceso productivo fabrica diariamente $N= 8000$ artículos en un turno de 8 horas. Se toma una muestra de tamaño $n= 100$ cada hora y se cuentan los artículos defectuosos en la misma, dando el siguiente listado de defectuosos cada hora: 2, 3, 1, 0, 1, 2, 2, 3 en un día de trabajo. Aunque son pocos datos para concluir, ¿considera Usted que el proceso se encuentra bajo control?

Tabla 28

| Hora | Defectuosos | LIC (np) | LMC (np) | LSC (np) |
|------|-------------|----------|----------|------------|
| 7 | | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 8 | 2 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 9 | 3 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 10 | 1 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 11 | 0 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 12 | 1 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 13 | 2 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 14 | 2 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |
| 15 | 3 | 0 | 1.75 | 5.67907352 |

Suma= 14
 \hat{p} = 0.0175
 np = 1.75

En la Figura 66 se muestra el Diagrama de Control por Atributos np .

Figura 66


Aunque son pocas muestras para dar mayor seguridad, de lo que se percibe en el diagrama, el proceso se encuentra bajo control.

12.1 Curva característica de operación para un diagrama tipo “p” o “np”

Tal como se ha establecido, un diagrama de control detecta un cambio del proceso a través de sus límites de control; si un punto cae dentro de los límites de control, el diagrama no detiene el proceso aunque este haya cambiado, es decir, acepta que el proceso está bajo control cuando de hecho no lo está. En el caso de los diagramas de control tipo np y p, ambos cambian al variar la fracción defectuosa. Para determinar la probabilidad de no detener el proceso se calcula $p(\text{LIC} \leq np \leq \text{LSC})$ suponiendo que $np \sim N\left(n\hat{p}, \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}\right)$.

Si se grafica la curva que resulta $\beta = p(\text{LIC} \leq np \leq \text{LSC})$ contra la fracción defectuosa p, se obtiene lo que se denomina como la Curva Característica de Operación (CCO) del Diagrama de Control Estadístico np.

Se mostrará a continuación un ejemplo de cómo se determina la CCO de un Diagrama de Control por Atributos np.

Ejemplo 12.4. Obtener la CCO del Diagrama de Control np, para un tamaño de muestra $n=300$, dado por los siguientes límites $0 \leq np \leq 8$.

Para obtener la CCO se requiere calcular la probabilidad de aceptar que el proceso se encuentra bajo control, cuando de hecho no se encuentra bajo control:

$$\beta = p(0 \leq np \leq 8 | p_cambia) = \sum_{x=0}^{x=8} \binom{300}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad \dots (66)$$

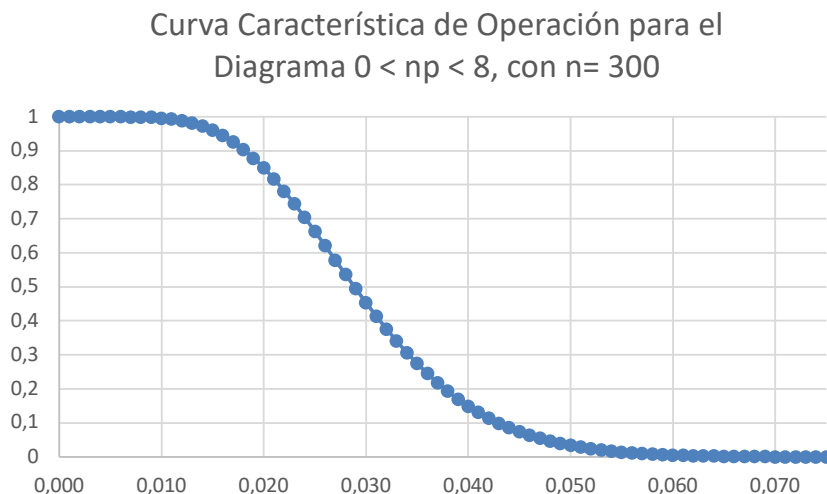
Se hace variar p , se calcula β y se grafica p contra β , con lo cual se obtiene la tabla 29

Tabla 29

| p | β |
|-------|------------|
| 0.000 | 1 |
| 0.005 | 0.9999745 |
| 0.010 | 0.99639729 |
| 0.015 | 0.96096276 |
| 0.020 | 0.8493329 |
| 0.025 | 0.66284963 |
| 0.030 | 0.453642 |
| 0.035 | 0.27491473 |
| 0.040 | 0.14970915 |
| 0.045 | 0.07432532 |

Con esta tabla se obtiene la CCO solicitada, la cual se muestra en la figura 67.

Figura 67



Tal como ya se mencionó, en artículos complejos, con muchas componentes, por ejemplo, en un automóvil, no se contabilizan las unidades defectuosas, porque cada uno de ellos es ensamblado de un número muy grande de componentes y cada una de estas puede tener a su vez una gran cantidad de defectos, de tal manera que se puede considerar que una sola unidad puede presentar entre cero y un número infinito de defectos; en este caso es muy difícil clasificar a un automóvil como defectuoso, más bien se cuenta el número de defectos por unidad. Por notación, se establecerá que c representa el número promedio de defectos por unidad en un proceso.

Sea x el número de defectos obtenidos en una unidad inspeccionada. La probabilidad de x está dada por un modelo de Poisson:

$$p(x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (67)$$

La media de esta distribución es

$$\mu_x = E\{x\} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-c} x \frac{c^x}{x!} = c \quad \dots (68)$$

Su varianza:

$$\sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = c \quad \dots (69)$$

La distribución de Poisson se aproxima a la normal cuando $c > 5$, por lo que el intervalo de confianza al $100(1-\alpha)\%$ es:

$$c - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{c} \leq x \leq c + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{c} \quad \dots (70)$$

En donde se toma como $z_{\alpha/2} = 3$ para $100(1-\alpha)\% = 99.73\%$ de nivel de confianza

El valor poblacional c no se conoce, por lo que debe ser estimado a partir de recolectar muestras periódicas. En cada muestra i , de tamaño n_i , se cuenta el número de defectos c_i que existen en la muestra. Para calcular un estimador puntual de c se aplica la siguiente expresión:

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i}{m} \quad \dots (71)$$

Se empezará por analizar procesos donde se puede considerar que existe un cierto número de defectos en un proceso continuo, en el cual se puede pensar que el número de artículos producido es infinito. El intervalo de control estaría dado por la siguiente expresión:

$$\hat{c} - 3\sqrt{\hat{c}} \leq x \leq \hat{c} + 3\sqrt{\hat{c}} \quad \dots (72)$$

A la gráfica de este intervalo de control se le denomina Diagrama de Control por Atributos tipo c , y es aplicable cuando el tamaño de muestra n que se toma periódicamente es constante.

La doble desigualdad anterior puede ser dividida entre n :

$$\frac{\hat{c}}{n} - 3\sqrt{\frac{\hat{c}}{n^2}} \leq x \leq \frac{\hat{c}}{n} + 3\sqrt{\frac{\hat{c}}{n^2}}$$

Si se hace $\frac{\hat{c}}{n} = \hat{u}$, el intervalo de confianza sería:

$$\hat{u} - 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n}} \leq x \leq \hat{u} + 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n}} \quad \dots (73)$$

A la gráfica de este intervalo de control se le denomina Diagrama de Control por Atributos tipo u . A la variable u se le conoce como fracción de defectos por unidad.

Cabe señalar que este diagrama de control acepta tamaños de muestra constantes o tamaños de muestra variables, con la siguiente expresión:

$$\hat{u} - 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i}} \leq x \leq \hat{u} + 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i}} \quad \dots (74)$$

Si la población es finita de tamaño N:

$$\hat{u} - 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i} \left(\frac{N - n_i}{N - 1} \right)} \leq x \leq \hat{u} + 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i} \left(\frac{N - n_i}{N - 1} \right)} \quad \dots (75)$$

Nótese que se está considerando que u se comporta como una variable aleatoria normal:

$$u_i \sim N \left(\hat{u}, \sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i}} \right) \quad \dots (76)$$

La cual puede ser estandarizada:

$$z_i = \frac{u_i - \hat{u}}{\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i}}} \quad \text{o} \quad z_i = \frac{u_i - \hat{u}}{\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i} \left(\frac{N - n_i}{N - 1} \right)}} \quad \dots (77)$$

Se resolverán a continuación algunos ejemplos utilizando este tipo de diagramas.

Ejemplo 13.1. Los siguientes son el número de roturas en 24 tramos sucesivos de alambre conductor de 3,000 metros de longitud cada uno:

Tabla 30

| Tramo | Roturas | Tramo | Roturas |
|-------|---------|-------|---------|
| 1 | 1 | 13 | 1 |
| 2 | 1 | 14 | 6 |
| 3 | 3 | 15 | 4 |
| 4 | 7 | 16 | 5 |
| 5 | 8 | 17 | 1 |
| 6 | 1 | 18 | 8 |
| 7 | 2 | 19 | 7 |
| 8 | 6 | 20 | 9 |
| 9 | 1 | 21 | 2 |
| 10 | 1 | 22 | 3 |
| 11 | 5 | 23 | 6 |
| 12 | 0 | 24 | 8 |

- a. Si se pretende controlar el proceso de manufactura de alambre a partir del número de roturas por cada 3,000 metros de cable, ¿qué tipo de diagrama de control estadístico utilizaría?

Como se puede apreciar, en el caso de manufactura continua de productos como tela, varilla, cable, alambre, etcétera, no se puede hablar de “producto defectuoso”, sino de número de defectos por tramo producido; en estos casos se habla de un Diagrama de Control por Atributos, en donde se cuentan defectos; además, el tamaño de muestra es constante, $n=3000$, por lo que el diagrama de control más adecuado es tipo c.

- b. Calcule los límites de control del proceso del diagrama elegido en el inciso (a).

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i}{m} = \frac{96}{24} = 4$$

$$LIC(c) = \hat{c} - 3\sqrt{\hat{c}} = 4 - 3(2) = -2 \Rightarrow 0$$

$$LMC(c) = \hat{c} = 4$$

$$LSC(c) = \hat{c} + 3\sqrt{\hat{c}} = 4 + 3(2) = 10$$

Nótese que, aunque en el cálculo del límite inferior de control se obtuvo -2, el resultado se coloca en cero, dado que no puede haber un número de defectos negativos.

- c. ¿Se encuentra el proceso bajo control estadístico?

Tabla 31

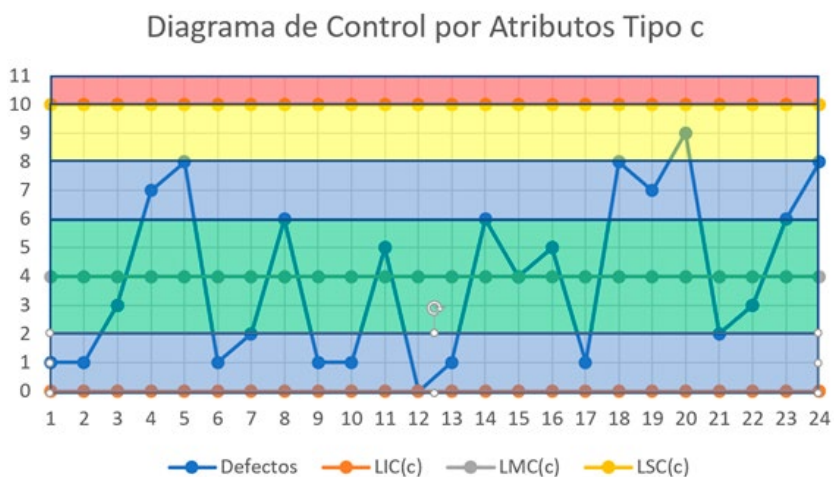
| Muestra | Defectos | LIC(c) | LMC(c) | LSC(c) |
|---------|----------|--------|--------|--------|
| 1 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 2 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 3 | 3 | 0 | 4 | 10 |
| 4 | 7 | 0 | 4 | 10 |
| 5 | 8 | 0 | 4 | 10 |
| 6 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 7 | 2 | 0 | 4 | 10 |
| 8 | 6 | 0 | 4 | 10 |
| 9 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 10 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 11 | 5 | 0 | 4 | 10 |
| 12 | 0 | 0 | 4 | 10 |
| 13 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 14 | 6 | 0 | 4 | 10 |
| 15 | 4 | 0 | 4 | 10 |
| 16 | 5 | 0 | 4 | 10 |
| 17 | 1 | 0 | 4 | 10 |
| 18 | 8 | 0 | 4 | 10 |
| 19 | 7 | 0 | 4 | 10 |
| 20 | 9 | 0 | 4 | 10 |
| 21 | 2 | 0 | 4 | 10 |
| 22 | 3 | 0 | 4 | 10 |
| 23 | 6 | 0 | 4 | 10 |
| 24 | 8 | 0 | 4 | 10 |

Suma= 96

Promedio= 4

Con los datos de la tabla 31, se traza el diagrama tipo c, el cual se muestra en la figura 68.

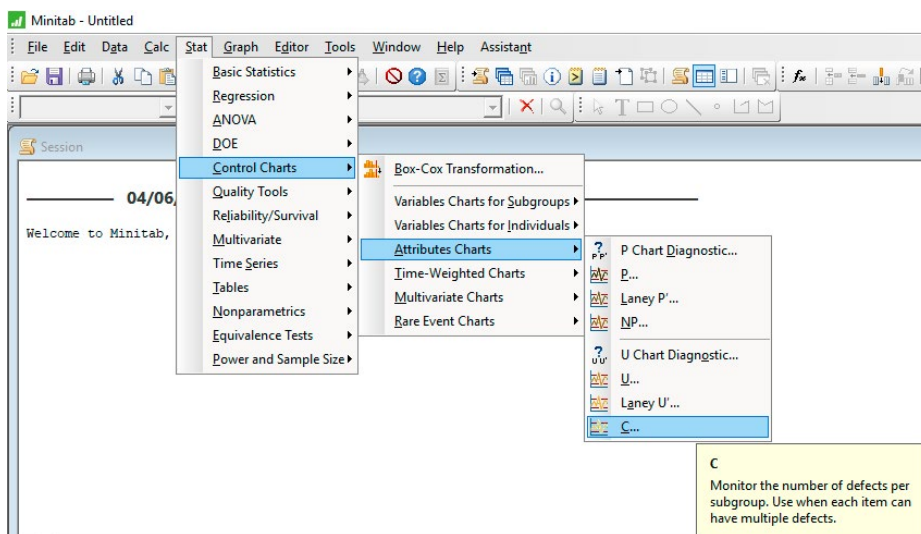
Figura 68



Como se puede apreciar en la figura 68, no existen puntos por fuera de los límites de control y no se aprecia ningún patrón o modelo no aleatorio; se observa que el proceso se encuentra bajo control. Sólo para confirmar se agregó la plantilla arcoíris para verificar.

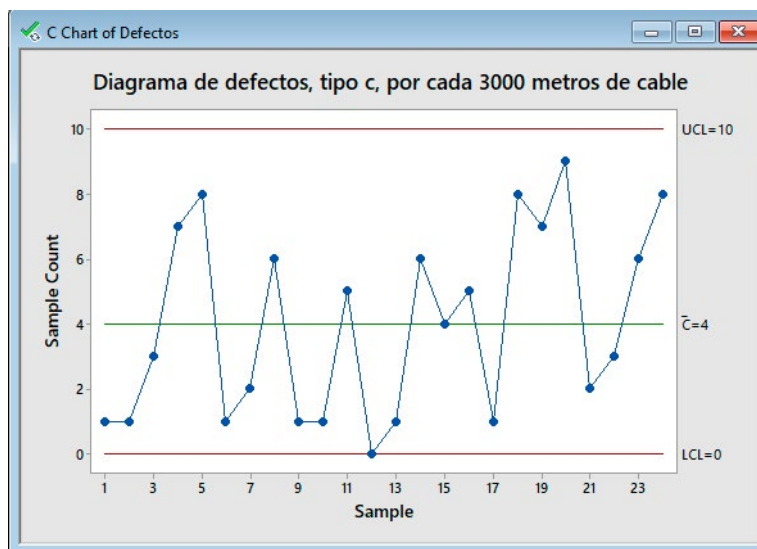
En Minitab se teclea la segunda columna de defectos de la tabla 31 en su pantalla principal y luego se elige en el menú “Stat”, luego “Control Charts”, posteriormente “Attributes Charts” y finalmente “c”, como se muestra en la figura 69.

Figura 69



Se obtiene la gráfica de la figura 70.

Figura 70

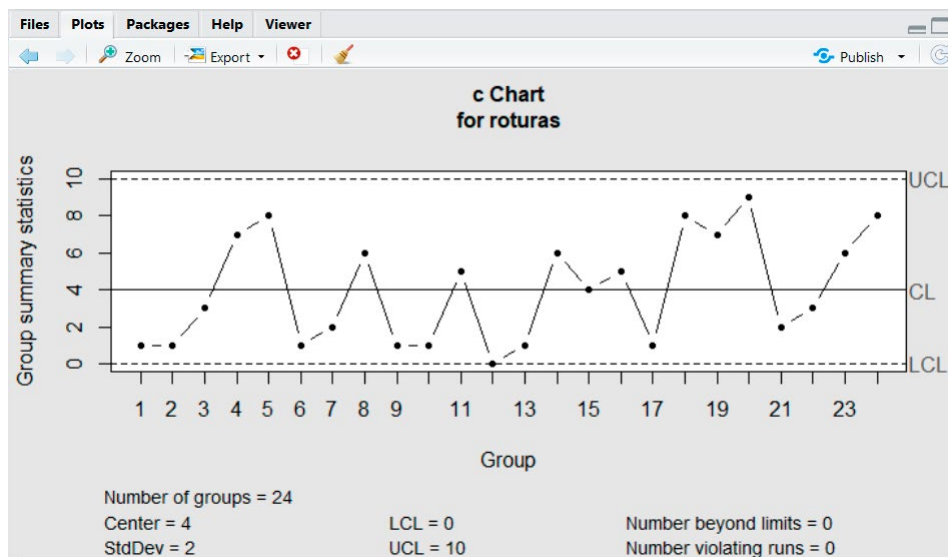


En el software R bastaría con capturar las siguientes instrucciones:

```
> library(qcc)
> roturas<- c(1,1,3,7,8,1,2,6,1,1,5,0,1,6,4,5,1,8,7,9,2,3,6,8)
> qcc(roturas, type="c", sizes=3000)
```

Obteniéndose la gráfica de la figura 71.

Figura 71



- d. Si el máximo número de roturas por cada 3000 metros de cable es 10, ¿Cuál es la capacidad de proceso?

$$C_{pu} = \frac{LSE - \hat{c}}{3\sqrt{\hat{c}}} = \frac{10}{6} = 2.6667 > 1.33$$

Como se puede apreciar, el proceso es capaz de cumplir especificaciones.

Ejemplo 13.2. Un proceso administrativo “produce” oficios, a los cuales se les cuenta el número de defectos de ortografía, tipografía, de redacción, manchas, borrones, rayaduras, etcétera. Suponga que se contabilizaron el número de errores cometidos diariamente durante 20 días, obteniéndose los resultados que se muestran en la tabla de la Tabla 32.

Tabla 32

| Día | No. Oficios | No. Errores |
|-----|-------------|-------------|
| 1 | 17 | 13 |
| 2 | 20 | 12 |
| 3 | 20 | 14 |
| 4 | 10 | 12 |
| 5 | 19 | 15 |
| 6 | 18 | 12 |
| 7 | 15 | 11 |
| 8 | 20 | 12 |
| 9 | 14 | 10 |
| 10 | 16 | 15 |

| Día | No. Oficios | No. Errores |
|-----|-------------|-------------|
| 11 | 19 | 12 |
| 12 | 21 | 14 |
| 13 | 20 | 11 |
| 14 | 19 | 13 |
| 15 | 19 | 16 |
| 16 | 19 | 10 |
| 17 | 12 | 11 |
| 18 | 17 | 12 |
| 19 | 17 | 13 |
| 20 | 18 | 12 |

- a. Si se desea controlar el proceso, ¿qué tipo de diagrama de control utilizaría? Fundamente su respuesta.

Dado que lo que se está contabilizando es el número de defectos por unidad y debido a que los tamaños de muestra diarios son variables, se aconseja usar un diagrama de control por atributos tipo u.

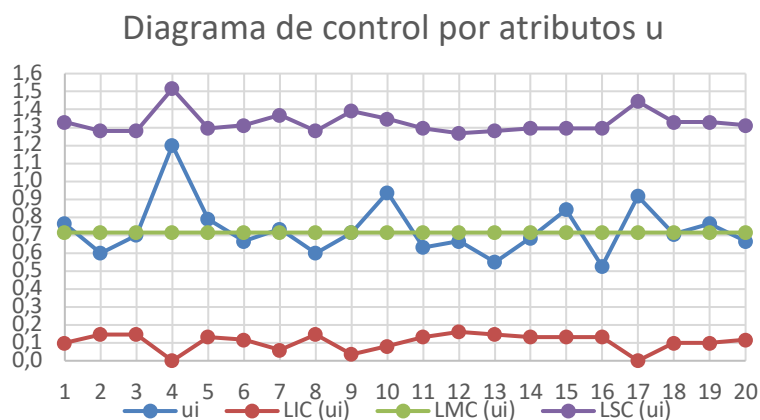
Para poder interpretar el diagrama se debe graficar. En Excel el diagrama tipo u original requiere preparar una tabla como la siguiente:

Tabla 33. Datos para el trazo del diagrama tipo u con límites variables

| Día | No. Oficios | No. Errores | u_i | LIC (u_i) | LMC (u_i) | LSC (u_i) |
|-----|-------------|-------------|----------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 17 | 13 | 0.764706 | 0.09935 | 0.714286 | 1.32923 |
| 2 | 20 | 12 | 0.600000 | 0.14734 | 0.714286 | 1.28123 |
| 3 | 20 | 14 | 0.700000 | 0.14734 | 0.714286 | 1.28123 |
| 4 | 10 | 12 | 1.200000 | 0 | 0.714286 | 1.51607 |
| 5 | 19 | 15 | 0.789474 | 0.13261 | 0.714286 | 1.29596 |
| 6 | 18 | 12 | 0.666667 | 0.11667 | 0.714286 | 1.3119 |
| 7 | 15 | 11 | 0.733333 | 0.05963 | 0.714286 | 1.36894 |
| 8 | 20 | 12 | 0.600000 | 0.14734 | 0.714286 | 1.28123 |
| 9 | 14 | 10 | 0.714286 | 0.03665 | 0.714286 | 1.39192 |
| 10 | 16 | 15 | 0.937500 | 0.08042 | 0.714286 | 1.34815 |
| 11 | 19 | 12 | 0.631579 | 0.13261 | 0.714286 | 1.29596 |
| 12 | 21 | 14 | 0.666667 | 0.161 | 0.714286 | 1.26757 |
| 13 | 20 | 11 | 0.550000 | 0.14734 | 0.714286 | 1.28123 |
| 14 | 19 | 13 | 0.684211 | 0.13261 | 0.714286 | 1.29596 |
| 15 | 19 | 16 | 0.842105 | 0.13261 | 0.714286 | 1.29596 |
| 16 | 19 | 10 | 0.526316 | 0.13261 | 0.714286 | 1.29596 |
| 17 | 12 | 11 | 0.916667 | 0 | 0.714286 | 1.44621 |
| 18 | 17 | 12 | 0.705882 | 0.09935 | 0.714286 | 1.32923 |
| 19 | 17 | 13 | 0.764706 | 0.09935 | 0.714286 | 1.32923 |
| 20 | 18 | 12 | 0.666667 | 0.11667 | 0.714286 | 1.3119 |

Suma= 350 250
 \bar{u} = 0.714286

El diagrama original se muestra en la Figura 72. Nótese que los límites de control son variables.

Figura 72. Diagrama de control tipo u con límites variables


Este diagrama también puede graficarse con Minitab, los datos del número de oficios y del número de errores se capturan en la pantalla principal de Minitab ingresando al menú “Stat”, luego al submenú “Control Charts”, posteriormente al submenú “Attributes Chart” y finalmente al submenú “U”, como se muestra en la figura 73. Aparece lo que se muestra en la figura 74, en la cual se ilumina C2 No. Errores y se oprime “Select”; en la casilla donde dice “Subgroup sizes”, se ilumina C1 No. Oficios; en “Labels” en la casilla de “Tittle” se captura diagrama de control tipo u, se oprime Ok y aparece la gráfica de la figura 75.

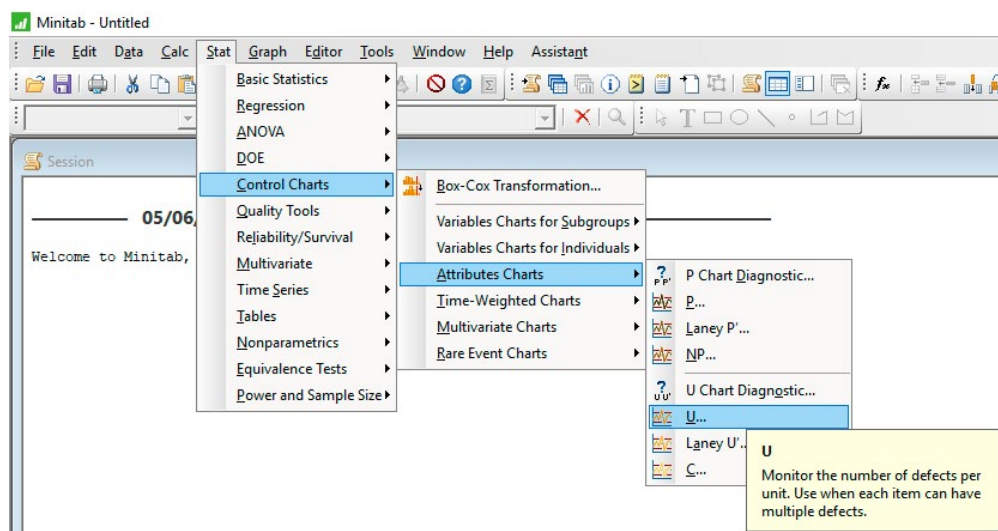
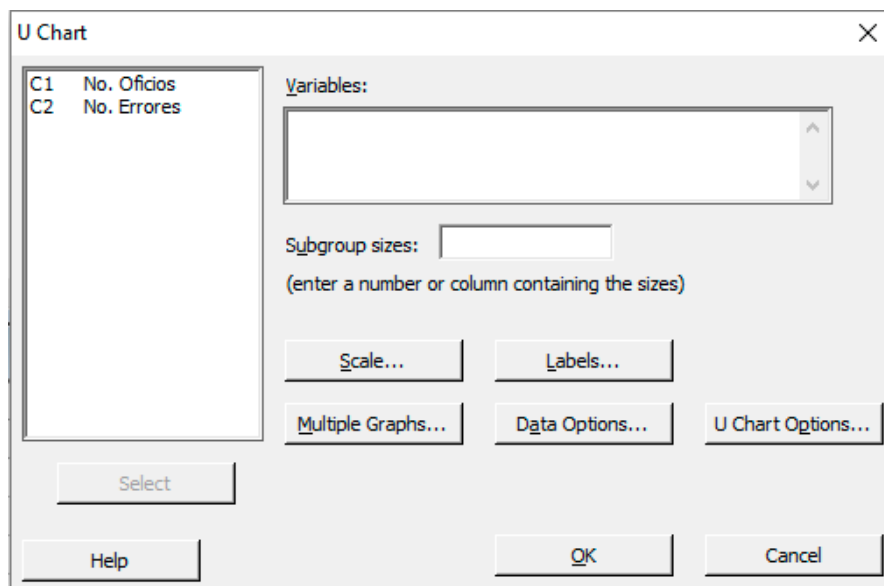
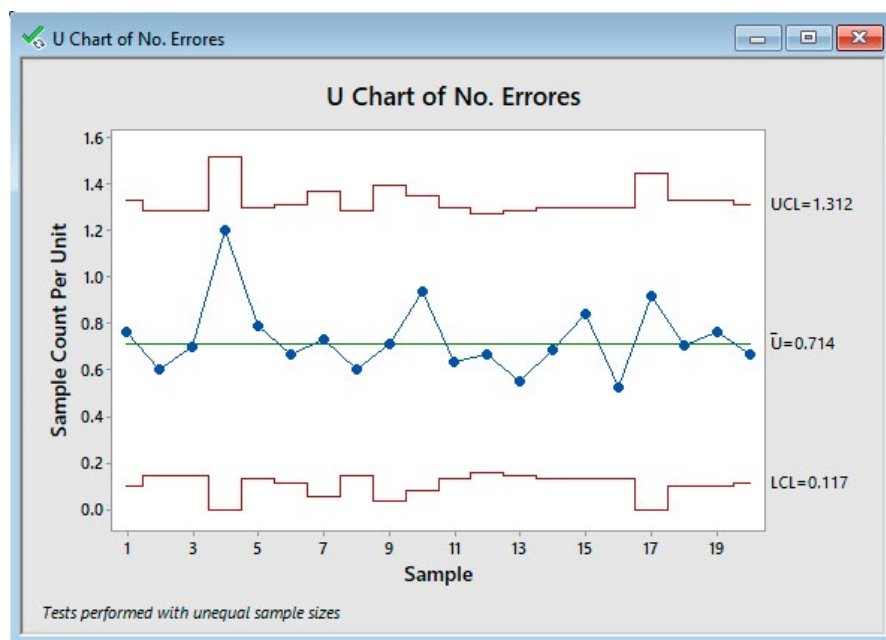
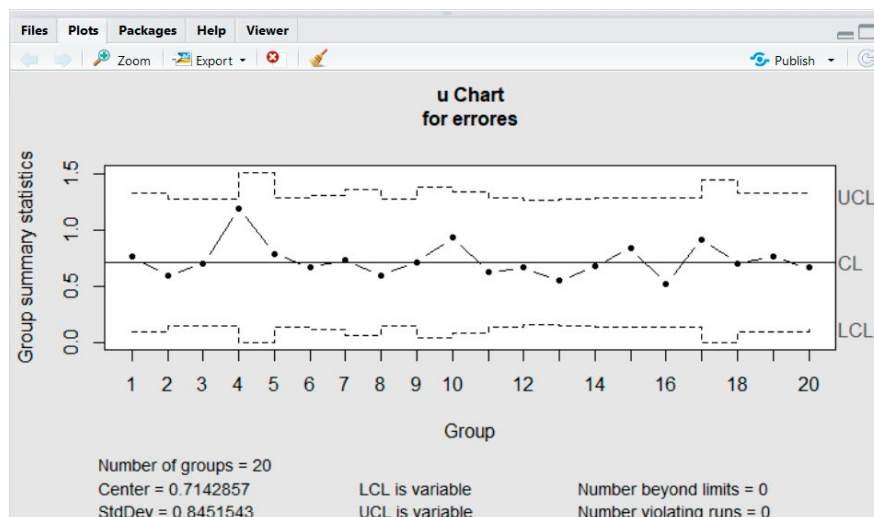
Figura 73

Figura 74


Figura 75


También puede usarse el software R, con las siguientes instrucciones:

```
>library(qcc)
>oficios<- c(17,20,20,10,19,18,15,20,14,16,19,21,20,19,19,19,12,17,17,18)
>errores<- c(13,12,14,12,15,12,11,12,10,15,12,14,11,13,16,10,11,12,13,12)
>data.frame(oficios,errores)
>qcc(errores,type="u",sizes=oficios)
```

Con las cuales se obtiene la gráfica de la figura 76.

Figura 76


b. Calcule límites de control constantes, para el diagrama propuesto por usted.

Interpretar un diagrama de control con límites variables es complicado. Una manera de obligar a que los límites de control sean constantes es tomar como valor de n al promedio de todas las n_i . En la tabla 34 se toma como n el promedio mencionado, y en la Figura 77 se muestra el diagrama u que se obtiene.

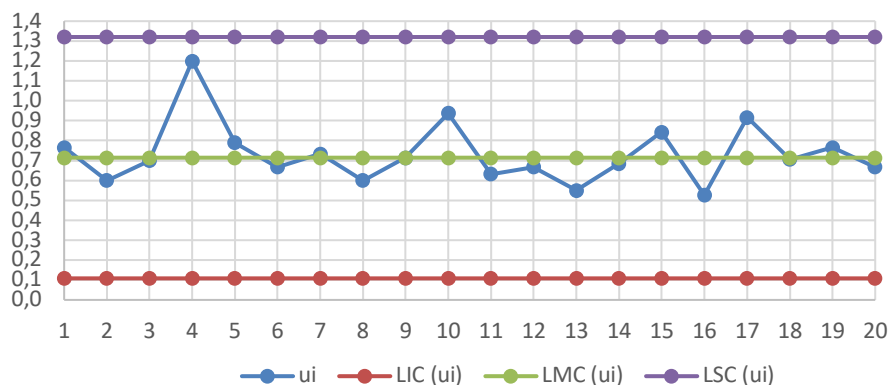
Tabla 34. Datos para graficar el Diagrama tipo u con n promedio

| Día | No. Oficios | No. Errores | u_i | LIC (u_i) | LMC (u_i) | LSC (u_i) |
|-----|-------------|-------------|----------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 17 | 13 | 0.764706 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 2 | 20 | 12 | 0.600000 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 3 | 20 | 14 | 0.700000 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 4 | 10 | 12 | 1.200000 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 5 | 19 | 15 | 0.789474 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 6 | 18 | 12 | 0.666667 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 7 | 15 | 11 | 0.733333 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 8 | 20 | 12 | 0.600000 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 9 | 14 | 10 | 0.714286 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 10 | 16 | 15 | 0.937500 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 11 | 19 | 12 | 0.631579 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 12 | 21 | 14 | 0.666667 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 13 | 20 | 11 | 0.550000 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 14 | 19 | 13 | 0.684211 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 15 | 19 | 16 | 0.842105 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 16 | 19 | 10 | 0.526316 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 17 | 12 | 11 | 0.916667 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 18 | 17 | 12 | 0.705882 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 19 | 17 | 13 | 0.764706 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |
| 20 | 18 | 12 | 0.666667 | 0.10819 | 0.714286 | 1.32038 |

Suma= 350 250
 n prom= 17.5
 \bar{u} = 0.714286

Figura 77

Diagrama de Control por Atributos Tipo u con n promedio



Otra forma de obligar a que el diagrama tenga límites de control constantes, es estandarizar a la variable aleatoria u_i . Recuerde que se está considerando que u_i se comporta como una variable aleatoria normal:

$$u_i \sim N\left(\hat{u}, \sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i}}\right)$$

La cual puede ser estandarizada como

$$z_i = \frac{u_i - \hat{u}}{\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i}}} \quad \text{o} \quad z_i = \frac{u_i - \hat{u}}{\sqrt{\frac{\hat{u}}{n_i} \left(\frac{N - n_i}{N - 1}\right)}}$$

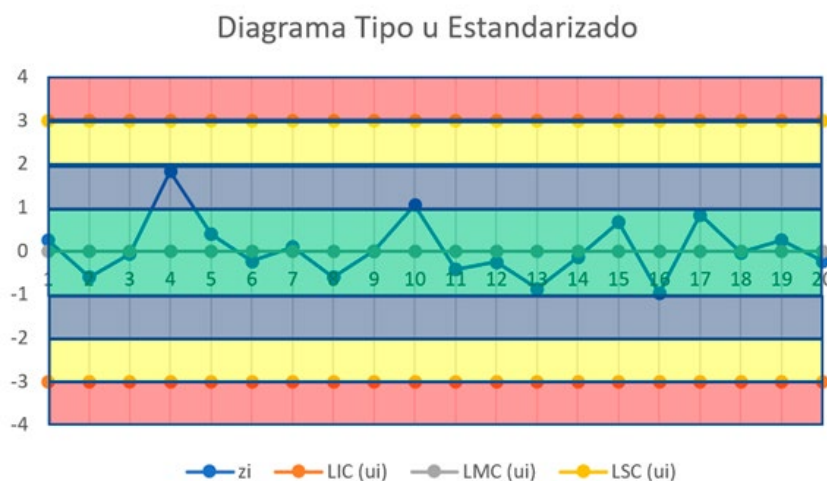
En la Tabla 35 se muestran los datos estandarizados de u_i

Tabla 35. Datos u estandarizados

| Día | No. Oficios | No. Errores | u_i | z_i | LIC (u_i) | LMC (u_i) | LSC (u_i) |
|-----|-------------|-------------|----------|-----------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 17 | 13 | 0.764706 | 0.245976 | -3 | 0 | 3 |
| 2 | 20 | 12 | 0.600000 | -0.604743 | -3 | 0 | 3 |
| 3 | 20 | 14 | 0.700000 | -0.075593 | -3 | 0 | 3 |
| 4 | 10 | 12 | 1.200000 | 1.817376 | -3 | 0 | 3 |
| 5 | 19 | 15 | 0.789474 | 0.387783 | -3 | 0 | 3 |
| 6 | 18 | 12 | 0.666667 | -0.239046 | -3 | 0 | 3 |
| 7 | 15 | 11 | 0.733333 | 0.087287 | -3 | 0 | 3 |
| 8 | 20 | 12 | 0.600000 | -0.604743 | -3 | 0 | 3 |
| 9 | 14 | 10 | 0.714286 | 0.000000 | -3 | 0 | 3 |
| 10 | 16 | 15 | 0.937500 | 1.056443 | -3 | 0 | 3 |
| 11 | 19 | 12 | 0.631579 | -0.426562 | -3 | 0 | 3 |
| 12 | 21 | 14 | 0.666667 | -0.258199 | -3 | 0 | 3 |
| 13 | 20 | 11 | 0.550000 | -0.869318 | -3 | 0 | 3 |
| 14 | 19 | 13 | 0.684211 | -0.155113 | -3 | 0 | 3 |
| 15 | 19 | 16 | 0.842105 | 0.659232 | -3 | 0 | 3 |
| 16 | 19 | 10 | 0.526316 | -0.969458 | -3 | 0 | 3 |
| 17 | 12 | 11 | 0.916667 | 0.829515 | -3 | 0 | 3 |
| 18 | 17 | 12 | 0.705882 | -0.040996 | -3 | 0 | 3 |
| 19 | 17 | 13 | 0.764706 | 0.245976 | -3 | 0 | 3 |
| 20 | 18 | 12 | 0.666667 | -0.239046 | -3 | 0 | 3 |

Suma= 350 250
 u^{\wedge} = 0.714286

En la figura 78 se muestra el diagrama de control por atributos tipo u estandarizado. La enorme ventaja de un diagrama de control estandarizado es que sus límites siempre están entre -3 y 3 y aplicarle la plantilla arcoíris es muy fácil.

Figura 78


Nótese que en las figuras 77 y 78 ningún punto cae fuera de los límites de control y aparentemente no hay patrones o modelos no aleatorios. Pero observando la gráfica de la figura 78 se percibe que todos los puntos de la muestra 11 a la muestra 20 (9 puntos) caen en zona verde, por lo que se puede afirmar que el proceso no se está comportando aleatoriamente y habría que investigar la causa de ello, para poder afirmar que se encuentra bajo control.

Otra ventaja del diagrama de control estandarizado es que se pueden graficar varios diagramas con los mismos límites de control de -3 a 3 .

13.1 Curva característica de operación para diagramas tipo “c” y “u”.

La Curva Característica de Operación, CCO, para un Diagrama de Control por Atributos tipo c donde $a \leq c \leq b$, estaría dada a través de la distribución de probabilidad de Poisson:

$$\beta = p(a \leq c \leq b) = \sum_{x=a}^{x=b} e^{-c} \frac{c^x}{x!} \quad \dots (78)$$

Ejemplo 13.3. Para el ejemplo del cable conductor visto anteriormente, en carretes de tamaño $n= 3000$ metros de longitud y para el cual se obtuvo el diagrama de control dado por los límites $0 \leq c \leq 10$, se obtendrá su CCO a continuación.

Tabla 36

| c | β |
|----|----------|
| 0 | 1.000000 |
| 1 | 1.000000 |
| 2 | 0.999992 |
| 3 | 0.999708 |
| 4 | 0.997160 |
| 5 | 0.986305 |
| 6 | 0.957379 |
| 7 | 0.901479 |
| 8 | 0.815886 |
| 9 | 0.705988 |
| 10 | 0.583040 |
| 11 | 0.459889 |
| 12 | 0.347229 |

La CCO para el diagrama tipo c está mostrada en la Figura 79.

Con productos complejos como automóviles, computadoras o electrodomésticos grandes, pueden ocurrir muchos tipos diferentes de no conformidades o defectos. No todos estos tipos de defectos son igualmente importantes. Una unidad de producto que tenga un defecto muy grave probablemente se clasifique como no conforme a los requisitos, pero una unidad que tenga varios defectos menores podría no ser necesariamente no conforme. En tales situaciones, se necesita un método para clasificar las no conformidades o defectos de acuerdo con la gravedad y ponderar los diversos tipos de defectos de una manera razonable. Los sistemas de demérito para datos de atributos pueden ser valiosos en estas situaciones. Un posible esquema de demérito se define de la siguiente manera.

Defectos de clase A: Crítico. La unidad no es apta para el servicio o fallará en el servicio, de tal manera que no pueda corregirse fácilmente en el campo o causará lesiones personales o daños a la propiedad.

Defectos de clase B: Graves. Es posible que la unidad sufra una falla operativa de Clase A, o que cause problemas operativos algo menos graves, o que tenga una vida útil reducida o un mayor costo de mantenimiento.

Defectos de clase C: Moderadamente Graves. Es posible que la unidad falle durante el servicio o cause problemas que sean menos serios que la falla operativa, o que posiblemente tengan una vida útil reducida o mayores costos de mantenimiento, o que presenten un defecto importante en el acabado, la apariencia o la calidad del trabajo.

Defectos de clase D: Defectos Menores. La unidad no fallará en el servicio, pero tiene defectos menores en el acabado, la apariencia o la calidad del trabajo.

Sean c_{Ai} , c_{Bi} , c_{Ci} y c_{Di} el número de defectos Clase A, Clase B, Clase C y Clase D, respectivamente, en la i -ésima unidad de inspección. Se supondrá que cada clase de defecto es independiente, y la ocurrencia de defectos en cada clase está bien modelada por una distribución de Poisson. Se define el número de deméritos en la unidad de inspección como:

$$d_i = 100c_{Ai} + 50c_{Bi} + 10c_{Ci} + c_{Di} \quad \dots (79)$$

En donde 100, 50, 10 y 1 representan los pesos de demérito de la Clase A, Clase B, Clase C y Clase D respectivamente; estos pesos específicos pueden ser modificados razonablemente en forma apropiada para un problema determinado. Si el procedimiento es por muestreo simple con n unidades en la muestra, entonces, la cantidad de deméritos por unidad es

$$u_i = d_i/n \quad \dots (80)$$

Los límites de control de deméritos por unidad estarían dados por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} LIC &= \bar{u} - 3\hat{\sigma}_u \\ LMC &= \bar{u} \\ LSC &= \bar{u} + 3\hat{\sigma}_u \end{aligned} \quad \dots (81)$$

En dónde:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 100\bar{u}_A + 50\bar{u}_B + 10\bar{u}_C + \bar{u}_D \\ \hat{\sigma}_u &= \left[\frac{(100)^2 \bar{u}_A + (50)^2 \bar{u}_B + (10)^2 \bar{u}_C + \bar{u}_D}{n} \right] \end{aligned} \quad \dots (82)$$

Muchas variaciones de esta idea son posibles. Por ejemplo, se pueden clasificar las no conformidades como defectos funcionales o defectos de aspecto si se prefiere un sistema de dos clases. También es una práctica bastante común mantener gráficos de control separados en cada clase de defectos en lugar de combinarlos en un solo gráfico.

Ejemplo 14.1. Los datos de la Tabla 37 corresponden con la cantidad de errores de información encontrados en el Sistema de Cómputo del Registro Único del Personal Académico de la UNAM, RUPA.

Tabla 37. Errores de captura en el RUPA

| Día | Errores en el registro de | | | |
|-----|---------------------------|--------|--------|-------|
| | RFC ó CURP | Nombre | Correo | Otros |
| 1 | 8 | 7 | 1 | 28 |
| 2 | 11 | 1 | 11 | 11 |
| 3 | 1 | 1 | 8 | 7 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 5 |
| 5 | 3 | 2 | 13 | 11 |
| 6 | 6 | 3 | 3 | 4 |
| 7 | 8 | 8 | 2 | 6 |
| 8 | 4 | 10 | 2 | 10 |
| 9 | 1 | 6 | 1 | 5 |
| 10 | 15 | 1 | 3 | 10 |
| 11 | 1 | 7 | 13 | 6 |
| 12 | 6 | 7 | 9 | 4 |
| 13 | 7 | 6 | 3 | 4 |
| 14 | 2 | 9 | 3 | 15 |
| 15 | 6 | 14 | 7 | 9 |
| 16 | 2 | 9 | 4 | 3 |
| 17 | 11 | 1 | 1 | 5 |
| 18 | 5 | 5 | 19 | 4 |
| 19 | 6 | 15 | 5 | 12 |
| 20 | 2 | 7 | 9 | 10 |
| 21 | 7 | 5 | 6 | 24 |
| 22 | 4 | 3 | 8 | 3 |
| 23 | 4 | 1 | 4 | 25 |
| 24 | 15 | 2 | 7 | 27 |
| 25 | 2 | 15 | 3 | 13 |

Elabore un diagrama de deméritos por unidad.

Los errores de RFC o CURP se consideran fatales, por lo cual tienen un peso de 100. Los errores en el nombre son corregibles por lo cual tienen un peso de 50. Los errores en el Correo limitan temporalmente la comunicación pero el RUPA funciona por lo que tienen un peso de 10. El resto de los campos si presentan algún tipo de error, son corregibles por lo que tienen un peso de uno.

Primero, para trazar el diagrama de control en Excel, se necesita conformar la tabla 38.

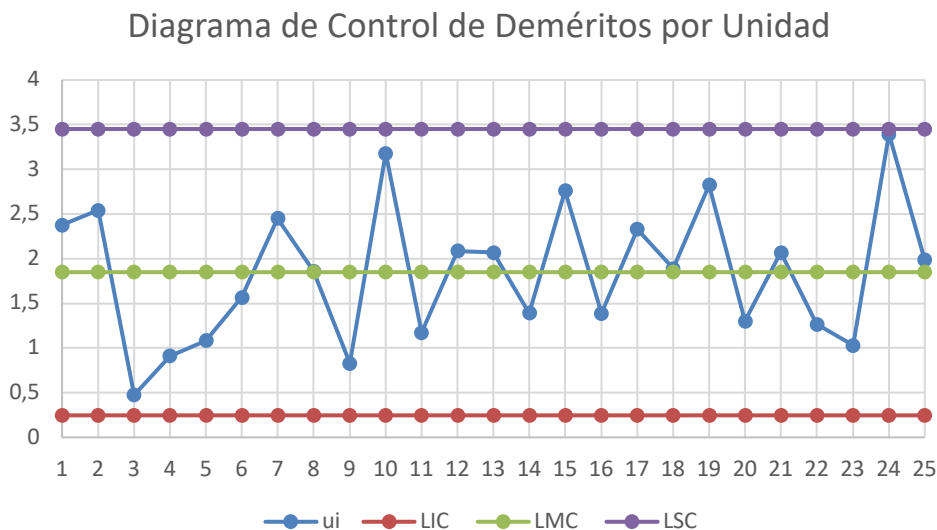
Tabla 38. Datos para el trazado del gráfico de deméritos

| Día | Errores en el registro de | | | | d | u | LIC | LMC | LSC |
|-----------|---------------------------|--------|--------|-------|--------|---------|--------|--------|--------|
| | RFC ó CURP | Nombre | Correo | Otros | | | | | |
| 1 | 8 | 7 | 1 | 28 | 1188 | 2.376 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 2 | 11 | 1 | 11 | 11 | 1271 | 2.542 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 3 | 1 | 1 | 8 | 7 | 237 | 0.474 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 5 | 455 | 0.91 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 5 | 3 | 2 | 13 | 11 | 541 | 1.082 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 6 | 6 | 3 | 3 | 4 | 784 | 1.568 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 7 | 8 | 8 | 2 | 6 | 1226 | 2.452 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 8 | 4 | 10 | 2 | 10 | 930 | 1.86 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 9 | 1 | 6 | 1 | 5 | 415 | 0.83 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 10 | 15 | 1 | 3 | 10 | 1590 | 3.18 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 11 | 1 | 7 | 13 | 6 | 586 | 1.172 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 12 | 6 | 7 | 9 | 4 | 1044 | 2.088 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 13 | 7 | 6 | 3 | 4 | 1034 | 2.068 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 14 | 2 | 9 | 3 | 15 | 695 | 1.39 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 15 | 6 | 14 | 7 | 9 | 1379 | 2.758 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 16 | 2 | 9 | 4 | 3 | 693 | 1.386 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 17 | 11 | 1 | 1 | 5 | 1165 | 2.33 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 18 | 5 | 5 | 19 | 4 | 944 | 1.888 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 19 | 6 | 15 | 5 | 12 | 1412 | 2.824 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 20 | 2 | 7 | 9 | 10 | 650 | 1.3 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 21 | 7 | 5 | 6 | 24 | 1034 | 2.068 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 22 | 4 | 3 | 8 | 3 | 633 | 1.266 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 23 | 4 | 1 | 4 | 25 | 515 | 1.03 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 24 | 15 | 2 | 7 | 27 | 1697 | 3.394 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| 25 | 2 | 15 | 3 | 13 | 993 | 1.986 | 0.2466 | 1.8489 | 3.4511 |
| Promedio= | 5.6 | 5.88 | 6 | 10.44 | 924.44 | 1.84888 | | | |

Para el cálculo de d_i se usó la ecuación 79. Para el cálculo de u_i se empleó la ecuación 80. Para obtener los límites de control, primero, se estimaron el promedio de u , $u_{prom} = 1.84888$ y la desviación estándar de u , $\sigma_{u_{prom}} = 0.53408$ al aplicar las fórmulas 82, con ellas se conformó la tabla 38.

Con la tabla 38 se traza el diagrama de deméritos por unidad que se muestra en la figura 80.

Figura 80

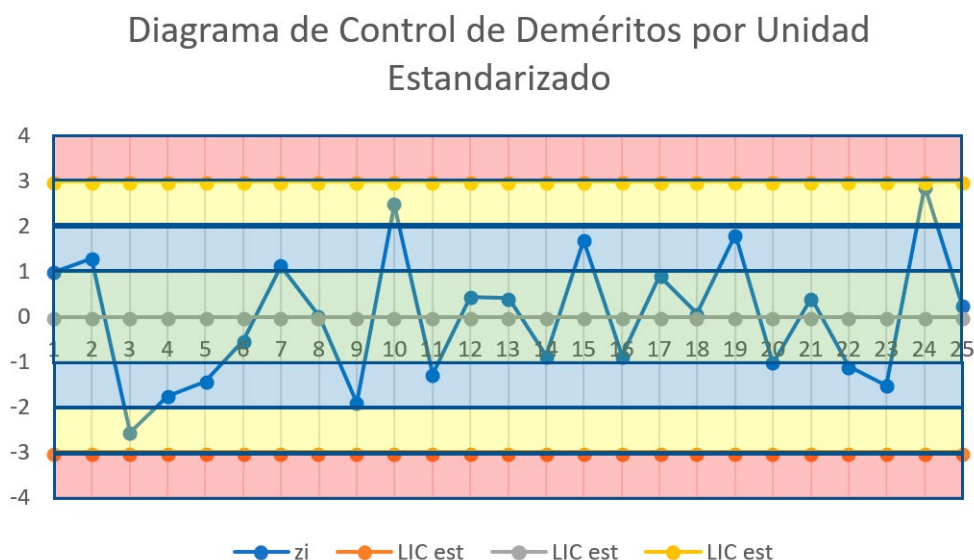


Este diagrama de control de deméritos por unidad puede ser estandarizado con la siguiente expresión:

$$z_i = \frac{(u_i - \bar{u})}{\hat{\sigma}_i} \quad \dots (83)$$

El diagrama de control de deméritos por unidad estandarizado se muestra en la figura 81 con la plantilla arcoíris para su interpretación.

Figura 81



Como se puede apreciar en la figura 81 el proceso se encuentra bajo control.

Los diagramas de control por variables en general presentan la ventaja de que los tamaños de muestras periódicas son mucho más pequeños que los tamaños de muestra aplicables a los diagramas de control por atributos. Otra ventaja es que al tener que medir una o más características de calidad con instrumentos se cuenta con mayor información de esa característica de calidad.

La desventaja que presentan los diagramas de control por variables es que se tiene que diseñar y aplicar un diagrama de control por cada característica de calidad a controlar, lo cual puede llegar a ser muy complicado en procesos multivariantes o multifactoriales. Otra desventaja importante es que se parte del supuesto de que la característica de calidad a controlar presenta distribución normal, o muy parecida a ella, lo cual no necesariamente es cierto.

Para cada característica de calidad que se requiera controlar, se diseñan dos tipos de diagramas de control. Uno de ellos trata de controlar la tendencia central de los datos y el otro la dispersión de estos datos, lo cual trae un mayor grado de dificultad al tener que trazar dos diagramas de control, ya que a la hora de interpretarlos se deben interpretar simultáneamente.

15.1 Fundamentación probabilística de los diagramas de control estadístico por variables " \bar{X} -r" y " \bar{X} -s"

Previamente se afirmó, por el Teorema de Aditividad de la Distribución Normal, que si la distribución de probabilidad de los datos poblacionales θ es normal, entonces su media aritmética muestral $\bar{\theta}$ también es normal:

$$\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta) \Rightarrow \bar{\theta} \sim N\left(\mu_\theta, \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}}\right)$$

De otra forma, si n tiende a infinito, entonces, por el Teorema del Límite Central, su media aritmética muestral también es normal:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\theta} \sim N\left(\mu_\theta, \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}}\right)$$

Por una de las dos razones mencionadas anteriormente, se puede afirmar que la media muestral tiene distribución normal, y al tener comportamiento normal, se puede definir un intervalo de confianza, al $100\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\%$ de nivel de confianza, para la media poblacional, dada por la siguiente expresión:

$$\bar{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}} \leq \mu_\theta \leq \bar{\theta} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}} \quad \dots (84)$$

Si en la anterior expresión se despeja la media muestral $\bar{\theta}$, se obtiene un intervalo de confianza para la misma:

$$\mu_\theta - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \bar{\theta} \leq \mu_\theta + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}} \quad \dots (85)$$

Los Límites de Control para la Media Muestral serían los siguientes:

$$\begin{aligned} LIC_{\bar{\theta}} &= \mu_\theta - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}} \\ LMC_{\bar{\theta}} &= \mu_\theta \\ LSC_{\bar{\theta}} &= \mu_\theta + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad \dots (86)$$

Nótese que los límites de control de la media muestral dependen de los valores poblacionales μ_θ y σ_θ , lo cual puede parecer un absurdo, ya que el propósito de muestrear es para estimar los valores poblacionales, y si ya se conocen, no tendría ningún caso el muestreo.

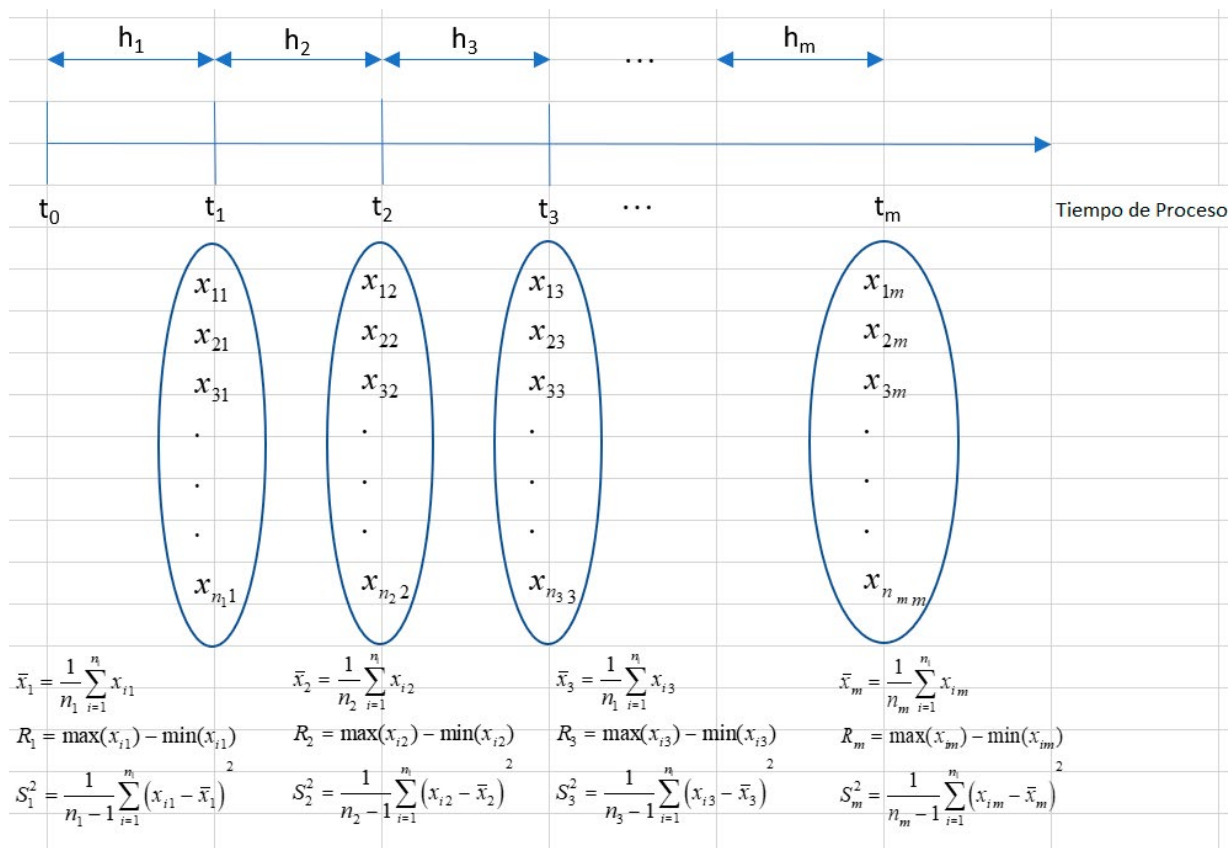
Ya se mencionó que se tomará como nivel de confianza 99.73%, lo que implica en la normal que $z_{\alpha/2} = 3.0$.

¿Cómo se pueden estimar los valores poblacionales μ_θ y σ_θ ?

Para empezar, se puede elegir el plan de muestreo periódico mostrado en la figura 82. El esquema de muestreo propone tomar m muestras periódicas de tamaños muestrales $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$, que, para efectos prácticos, de ser posible, conviene que todas las muestras tengan el mismo tamaño de muestra n , cada cierto espacio de tiempo $h_1, h_2, h_3, \dots, h_m$, que conviene se unifiquen, por facilidad, en un intervalo constante de tiempo h . Para cada muestra tomada, se requiere medir la característica de calidad y registrar los resultados x_{ij} de las mediciones.

Para cada muestra tomada se calculan la media muestral, el rango y su varianza.

Figura 82. Esquema de plan de muestreo periódico para estimar los parámetros poblacionales μ_θ y σ_θ



Ya fue demostrado previamente que la media de las medias de todas las muestras que se pueden formar en una población de tamaño N es la propia media poblacional. En el esquema anterior, no se tienen todas las posibles muestras de todos los elementos de la población y estas pueden ser demasiadas. Por inducción matemática se puede demostrar que el número de muestras que se pueden formar en una población de tamaño N se expresa por la siguiente serie:

$$\binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \binom{N}{3} + \dots + \binom{N}{N} = 2^N - 1 \quad \dots (87)$$

De la expresión anterior se puede ver cómo crece el número de muestras que se pueden tomar. Imagine el lector una población de tamaño cuatro, con los siguientes elementos: $\{a, b, c, d\}$:

Muestras de tamaño uno, son cuatro: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

Muestras de tamaño dos, son seis: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

Muestras de tamaño tres, son cuatro: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

Muestras de tamaño cuatro, es una: $\{a, b, c, d\}$

En total, se pueden formar $2^4 - 1 = 15$ muestras diferentes.

Ahora, una población de tamaño 10: $2^{10} - 1 = 1,023$ muestras diferentes. Imagínese un lote con 100 artículos: $2^{100} - 1 = 1.26765E+30$ muestras diferentes.

Sería prácticamente imposible tomar todas las muestras posibles de una población. En realidad, lo que propuso Walter Shewhart fue tomar un número limitado de muestras m , de tamaño n cada una, las cuales fueran representativas del proceso bajo estudio. Si este conjunto de muestras realmente es representativo de la población, entonces se puede aproximar la media poblacional a partir de la media muestral de las m muestras disponibles tomadas:

$$\mu_x = \hat{\mu}_{\hat{x}} \approx \bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} \bar{x}_i \quad \dots (88)$$

También se puede estimar la media de los rangos:

$$\mu_R = \hat{\mu}_{\bar{R}} \approx \bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} R_i \quad \dots (89)$$

Y la media de las desviaciones estándar:

$$\mu_\sigma = \hat{\mu}_{S_{n-1}} \approx \bar{S}_{n-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} S_{(n-1)_i} \quad \dots (90)$$

Ahora se buscará un estimador de la desviación estándar. Existen dos formas de llegar a deducir un estimador de la desviación estándar, según el estimador de dispersión o de sesgo que se utilice.

Antes de ello, se debe aclarar qué tipo de desviación estándar se pretende estimar.

La desviación estándar poblacional se puede descomponer en dos desviaciones estándar: la desviación estándar interna dentro de cada grupo o muestra (subgrupo racional) y la desviación estándar entre los diversos grupos muestreados (entre muestras):

La desviación estándar que se necesita estimar es la desviación estándar interna dentro de cada subgrupo racional.

Para deducir un estimador de la desviación estándar interna a cada subgrupo racional, se utilizan dos conceptos diferentes que han sido ampliamente estudiados en la literatura sobre el tema: Rango Relativo y Desviación Estándar Relativa.

El primer concepto conocido como Rango Relativo, se define como:

$$w = \frac{R}{\sigma} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sigma} \quad \dots (91)$$

La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria fue documentada por E. S. Pearson en su célebre artículo “The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population”, en 1942.

L. H. C. Tippett, en su artículo “On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population”, de 1925, proporciona la media de w , a la cual se le denominó d_2 , y la desviación estándar de w , a la cual se le denominó d_3 .

Nótese qué ocurre si se plantea obtener la media de w a través de la esperanza matemática:

$$E\{w\} = E\left\{\frac{R}{\sigma}\right\} = \frac{E\{R\}}{\sigma}$$

$$d_2 = \frac{\mu_R}{\sigma} \quad \dots (92)$$

$$\sigma = \frac{\mu_R}{d_2}$$

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\hat{\mu}_R}{d_2}$$

De lo cual, un estimador de la desviación estándar de los subgrupos racionales está dada como:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad \dots (93)$$

Por otra parte, vea qué ocurre si se plantea calcular la desviación estándar de w , a través de la definición de varianza poblacional:

$$\sigma_w^2 = \text{var}\{w\} = \text{var}\left\{\frac{R}{\sigma}\right\} = \frac{\text{var}\{R\}}{\sigma^2}$$

$$d_3^2 = \frac{\sigma_R^2}{\sigma^2}$$

$$\sigma_R^2 = d_3^2 \sigma^2$$

$$\sigma_R = d_3 \sigma$$

Sustituyendo la expresión 93, se obtiene un estimador de la desviación estándar de R:

$$\sigma_R \approx \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad \dots (94)$$

El segundo concepto conocido como Desviación Estándar Relativa, se define como:

$$c_4 = \frac{S_{(n-1)}}{\sigma} \quad \dots (95)$$

Esta variable aleatoria también ha sido ampliamente estudiada, su media está definida como:

$$\mu_{c_4} = \sqrt{\frac{2}{n-1} \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}} \quad \dots (96)$$

Su varianza es:

$$\sigma_{c_4}^2 = \sigma_{S_{(n-1)}}^2 (1 - c_4^2) \quad \dots (97)$$

Nótese qué ocurre si se plantea obtener la media de c_4 , a través de la esperanza matemática:

$$E\{c_4\} = E\left\{\frac{S_{(n-1)}}{\sigma}\right\} = \frac{E\{S_{(n-1)}\}}{\sigma}$$

$$c_4 = \frac{\mu_{S_{(n-1)}}}{\sigma}$$

De lo cual, un estimador de la desviación estándar interna de los subgrupos racionales está dada como:

$$\hat{\sigma}_2 \approx \frac{\bar{S}_{(n-1)}}{c_4} \quad \dots (98)$$

Por otra parte, vea qué ocurre si se plantea calcular la desviación estándar de c_4 , a través de la definición de varianza poblacional:

$$\text{var}\{c_4\} = \text{var}\left\{\frac{S_{(n-1)}}{\sigma}\right\} = \frac{\text{var}\{S_{(n-1)}\}}{\sigma^2}$$

$$\sigma_{S_{(n-1)}}^2 = \sigma^2 \sigma_{c_4}^2$$

La desviación estándar de $S_{(n-1)}$ está dada por la expresión:

$$\sigma_{S_{(n-1)}} = \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} \bar{S}_{(n-1)} \quad \dots (99)$$

Si se sustituyen las expresiones 88, 89 y 93 en la expresión 85, se obtiene el intervalo de control para la media:

$$\bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \leq \bar{x} \leq \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \quad \dots (100)$$

Para simplificar se define $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$ quedando de la siguiente forma:

$$\bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \leq \bar{x} \leq \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} \quad \dots (101)$$

Nótese que $\bar{x} \sim N\left(\mu_{\bar{x}} \approx \bar{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}\right)$ por lo que la media muestral puede ser estandarizada con la siguiente expresión:

$$z_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}}{\frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}} \quad \dots (102)$$

De la misma forma, se puede definir un intervalo de control para el rango, a partir de las expresiones 89 y 94, y se puede suponer que $R \sim N\left(\mu_R \approx \bar{R}, \sigma_R = \frac{d_3}{d_2} \bar{R}\right)$

$$\mu_R - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_R \leq R \leq \mu_R + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_R$$

$$\bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \leq R \leq \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R}$$

$$\left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} \leq R \leq \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R}$$

En donde se hace $D_3 = \left(1 - 3\frac{d_3}{d_2}\right)$ y $D_4 = \left(1 + 3\frac{d_3}{d_2}\right)$ quedando como:

$$D_3\bar{R} \leq R \leq D_4\bar{R} \quad \dots (103)$$

Nuevamente, dado que se supone que R es normal, se puede estandarizar con la siguiente expresión:

$$z_i = \frac{R_i - \bar{R}}{\frac{d_3}{d_2} \bar{R}} \quad \dots (104)$$

El Diagrama de Control por Variables x-R está compuesto por un diagrama de control para la media y un diagrama de control para el rango, quedando definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} &\leq R \leq \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} \\ D_3\bar{R} &\leq R \leq D_4\bar{R} \end{aligned} \quad \dots (105)$$

Si se sustituyen las expresiones 90, 88 y 99 en la expresión 85, se obtiene el intervalo de control para la media:

$$\bar{\bar{x}} - \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\bar{S} \leq \bar{x} \leq \bar{\bar{x}} + \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\bar{S} \quad \dots (106)$$

En donde se define $A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$, por lo que el diagrama de control para la media quedaría como:

$$\bar{\bar{x}} - A_3\bar{S} \leq \bar{x} \leq \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S} \quad \dots (107)$$

Nótese que $\bar{x} \sim N\left(\mu_{\bar{x}} \approx \bar{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}\right)$, por lo que la media muestral puede ser estandarizada con la siguiente expresión:

$$z_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}}{\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}} \quad \dots (108)$$

Tabla 39. Factores para construir diagramas de control x-R

| n | d_2 | d_3 | A_2 | D_3 | D_4 |
|----|-------|-------|--------|---------|---------|
| 2 | 1.128 | 0.853 | 1.8806 | 0 | 3.26862 |
| 3 | 1.693 | 0.888 | 1.0231 | 0 | 2.57354 |
| 4 | 2.059 | 0.88 | 0.7285 | 0 | 2.28218 |
| 5 | 2.326 | 0.864 | 0.5768 | 0 | 2.11436 |
| 6 | 2.534 | 0.848 | 0.4833 | 0 | 2.00395 |
| 7 | 2.704 | 0.833 | 0.4193 | 0.07581 | 1.92419 |
| 8 | 2.847 | 0.82 | 0.3726 | 0.13593 | 1.86407 |
| 9 | 2.97 | 0.808 | 0.3367 | 0.18384 | 1.81616 |
| 10 | 3.078 | 0.797 | 0.3082 | 0.22320 | 1.77680 |
| 11 | 3.173 | 0.787 | 0.2851 | 0.25591 | 1.74409 |
| 12 | 3.258 | 0.778 | 0.2658 | 0.28361 | 1.71639 |
| 13 | 3.336 | 0.77 | 0.2494 | 0.30755 | 1.69245 |
| 14 | 3.407 | 0.763 | 0.2353 | 0.32815 | 1.67185 |
| 15 | 3.472 | 0.756 | 0.2231 | 0.34677 | 1.65323 |
| 16 | 3.532 | 0.75 | 0.2123 | 0.36297 | 1.63703 |
| 17 | 3.588 | 0.744 | 0.2028 | 0.37793 | 1.62207 |
| 18 | 3.64 | 0.739 | 0.1943 | 0.39093 | 1.60907 |
| 19 | 3.689 | 0.734 | 0.1866 | 0.40309 | 1.59691 |
| 20 | 3.735 | 0.729 | 0.1796 | 0.41446 | 1.58554 |
| 21 | 3.778 | 0.724 | 0.1733 | 0.42509 | 1.57491 |
| 22 | 3.819 | 0.72 | 0.1675 | 0.43441 | 1.56559 |
| 23 | 3.858 | 0.716 | 0.1621 | 0.44323 | 1.55677 |
| 24 | 3.895 | 0.712 | 0.1572 | 0.45160 | 1.54840 |
| 25 | 3.931 | 0.708 | 0.1526 | 0.45968 | 1.54032 |

De la misma forma, se puede definir un intervalo de control para la desviación estándar de la muestra, a partir de las expresiones 90, 98 y 99, se puede

suponer que $S_{(n-1)} \sim N\left(\mu_{S(n-1)} \approx \bar{S}, \sigma_{S(n-1)} = \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} S_{(n-1)}\right)$

$$\begin{aligned} \mu_{S_{(n-1)}} - \frac{z_{\alpha}}{2} \sigma_{S_{(n-1)}} &\leq S_{(n-1)} \leq \mu_{S_{(n-1)}} + \frac{z_{\alpha}}{2} \sigma_{S_{(n-1)}} \\ \bar{S}_{(n-1)} - 3 \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} \bar{S}_{(n-1)} &\leq RS_{(n-1)} \leq \bar{S}_{(n-1)} + 3 \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} \bar{S}_{(n-1)} \\ \left(1 - 3 \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4}\right) \bar{S}_{(n-1)} &\leq S_{(n-1)} \leq \left(1 + 3 \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4}\right) \bar{S}_{(n-1)} \end{aligned}$$

En donde se hace $B_3 = \left(1 - 3 \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4}\right)$ y $B_4 = \left(1 + 3 \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4}\right)$ y quedando como:

$$B_3 S_{n-1}^2 \leq S \leq B_4 S_{n-1}^2 \quad \dots (109)$$

Nuevamente, dado que se supone que $S_{(n-1)}$ es normal, se puede estandarizar con la siguiente expresión:

$$z_i = \frac{S_i - \bar{S}}{\frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} \bar{S}} \quad \dots (110)$$

El Diagrama de Control por Variables x-S está compuesto por un diagrama de control para la media y un diagrama de control para la desviación estándar, quedando definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{S} &\leq S \leq \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{S} \\ B_3 \bar{S} &\leq S \leq B_4 \bar{S} \end{aligned} \quad \dots (111)$$

Tabla 40. Factores para construir diagramas de control x-S

| n | c_4 | A_3 | B_3 | B_4 |
|----|--------|--------|---------|---------|
| 2 | 0.7979 | 2.6586 | 0.00000 | 3.26641 |
| 3 | 0.8862 | 1.9545 | 0.00000 | 2.56839 |
| 4 | 0.9213 | 1.6281 | 0.00000 | 2.26621 |
| 5 | 0.94 | 1.4273 | 0.00000 | 2.08885 |
| 6 | 0.9515 | 1.2872 | 0.03001 | 1.96999 |
| 7 | 0.9594 | 1.1819 | 0.11805 | 1.88195 |
| 8 | 0.965 | 1.0991 | 0.18472 | 1.81528 |
| 9 | 0.9693 | 1.0317 | 0.23899 | 1.76101 |
| 10 | 0.9727 | 0.9753 | 0.28426 | 1.71574 |
| 11 | 0.9754 | 0.9273 | 0.32199 | 1.67801 |
| 12 | 0.9776 | 0.8859 | 0.35412 | 1.64588 |
| 13 | 0.9794 | 0.8496 | 0.38147 | 1.61853 |
| 14 | 0.981 | 0.8173 | 0.40670 | 1.59330 |
| 15 | 0.9823 | 0.7886 | 0.42793 | 1.57207 |
| 16 | 0.9835 | 0.7626 | 0.44817 | 1.55183 |
| 17 | 0.9845 | 0.7391 | 0.46556 | 1.53444 |
| 18 | 0.9854 | 0.7176 | 0.48167 | 1.51833 |
| 19 | 0.9862 | 0.6979 | 0.49637 | 1.50363 |
| 20 | 0.9869 | 0.6797 | 0.50958 | 1.49042 |
| 21 | 0.9876 | 0.6629 | 0.52311 | 1.47689 |
| 22 | 0.9882 | 0.6472 | 0.53501 | 1.46499 |
| 23 | 0.9887 | 0.6327 | 0.54514 | 1.45486 |
| 24 | 0.9892 | 0.6191 | 0.55548 | 1.44452 |
| 25 | 0.9896 | 0.6063 | 0.56393 | 1.43607 |

Se procederá a mostrar ejemplos de cómo se diseñan, aplican e interpretan estos diagramas de control estadístico por variables.

Ejemplo 15.1. Se diseña una nueva línea de producción de manera que llene cada lata que pasa por ella con 12 onzas de un líquido. Sin importar el cuidado que se tenga, ocurre cierta variabilidad de la variable aleatoria x , el volumen de bebida en cada lata. El proceso se considera fuera de control si la media

de llenado parece diferir considerablemente del llenado promedio obtenido cuando el proceso funciona en forma correcta o si la variabilidad del llenado aparentemente difiere mucho de la obtenida en un sistema con funcionamiento correcto. Después de la calibración de la maquinaria y la capacitación del personal de la línea de producción, se obtienen cinco observaciones por hora de x , el volumen de bebida con que se llena cada lata, durante 24 horas. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 41

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 12.046 | 12.006 | 12.139 | 12.112 | 12.139 |
| 2 | 12.091 | 12.118 | 11.85 | 11.931 | 11.863 |
| 3 | 11.952 | 11.862 | 11.899 | 11.999 | 12.139 |
| 4 | 11.821 | 11.989 | 11.866 | 12.104 | 12.028 |
| 5 | 11.674 | 11.881 | 11.886 | 11.921 | 11.886 |
| 6 | 12.02 | 12.016 | 12.227 | 12.004 | 11.887 |
| 7 | 12.077 | 12.038 | 11.949 | 12.029 | 12.103 |
| 8 | 11.867 | 11.971 | 12.016 | 11.866 | 11.124 |
| 9 | 12.063 | 12.038 | 11.858 | 11.985 | 11.969 |
| 10 | 12.043 | 12.059 | 12.086 | 12.024 | 11.915 |
| 11 | 12.014 | 11.747 | 11.965 | 11.953 | 11.944 |
| 12 | 11.949 | 11.894 | 11.951 | 12.076 | 12.023 |
| 13 | 12.168 | 11.985 | 12.06 | 11.91 | 11.884 |
| 14 | 11.974 | 11.964 | 12.183 | 12.054 | 11.794 |
| 15 | 11.799 | 12.118 | 11.886 | 12.036 | 11.977 |
| 16 | 12.021 | 11.993 | 12.061 | 11.969 | 11.814 |
| 17 | 12.008 | 11.834 | 11.966 | 11.948 | 12.299 |
| 18 | 12.128 | 11.986 | 11.911 | 12.019 | 11.98 |
| 19 | 11.946 | 11.806 | 12.049 | 11.976 | 12.053 |
| 20 | 11.956 | 12.066 | 11.911 | 11.937 | 12.04 |
| 21 | 12.246 | 11.947 | 11.937 | 12.128 | 12.005 |
| 22 | 11.947 | 12 | 11.984 | 11.838 | 12.038 |
| 23 | 11.994 | 12.136 | 11.908 | 12.001 | 11.909 |
| 24 | 12.124 | 11.862 | 11.904 | 12.073 | 12.072 |

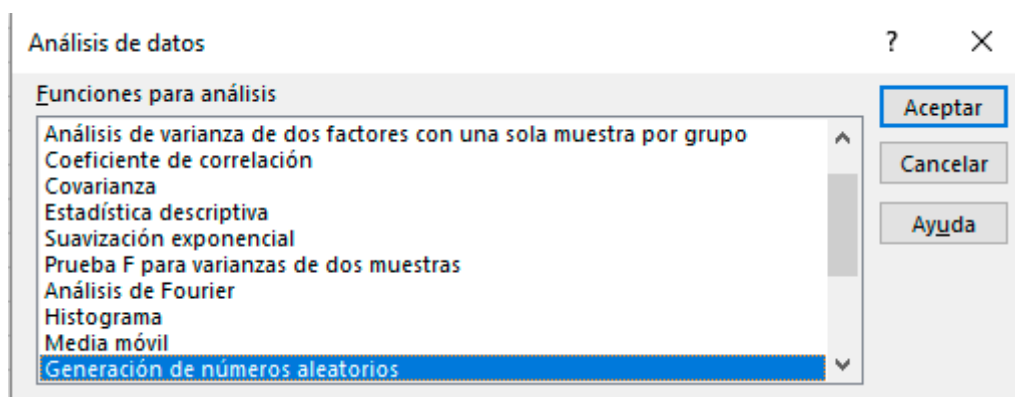
- a. Determine si los datos del volumen de llenado de latas presentan distribución normal.

Para resolver este problema se tiene que emplear uno de los métodos de ajuste vistos en el capítulo 7 de este libro, como puede ser comparar el histograma observado con el histograma esperado, si la distribución fuera normal (este método sería el más ineficiente, porque la comparación se hace a “ojo de pájaro”, pero con él podría ilustrarse cómo hacerlo). Otra posibilidad sería usar el método del papel probabilístico normal que hasta antes de la aparición de las computadoras era de los más socorridos. Un tercer método sería utilizar algunas de las pruebas paramétricas y no paramétricas establecidas en el capítulo 8.

Se empezará por elaborar una estadística descriptiva del total de datos observados, utilizando Excel:

1. Se colocan todos los datos en una sola columna de una hoja de Excel.
2. Se selecciona el menú Datos y luego el submenú Análisis de datos.
3. Aparece la siguiente pantalla:

Figura 83



4. Se selecciona Estadística Descriptiva y aparece la pantalla mostrada en la figura 84, en la cual se indica la referencia de los datos y se da un clic en Resumen de Estadísticas, obteniéndose los resultados que aparecen en la Tabla 41:

Figura 84

Tabla 42

| Parámetro Estadístico | Resultado |
|---------------------------|--------------|
| Media | 11.97895 |
| Error estándar | 0.01190608 |
| Mediana | 11.985 |
| Moda | 12.038 |
| Desviación estándar | 0.130424572 |
| Varianza de la muestra | 0.017010569 |
| Curtosis | 14.71170286 |
| Coefficiente de asimetría | -2.261433036 |
| Rango | 1.175 |
| Mínimo | 11.124 |
| Máximo | 12.299 |
| Suma | 1437.474 |
| Cuenta | 120 |

Observe en los resultados anteriores que el rango es 1.175 y va del mínimo valor de la muestra que es 11.124 hasta el máximo valor de la muestra que es 12.299. Por facilidad se tomarán 10 subintervalos o clases con la misma amplitud cada uno de ellos, por lo que la amplitud de cada clase sería $D=R/m=1.175/10=0.1175$, que se redondea a 0.118.

Se conforma una tabla con los siguientes encabezados: Límite Inferior del Subintervalo, Límite Superior del Subintervalo, Marca de Clase, Frecuencia Absoluta Observada, Frecuencia Absoluta Esperada, como se muestra a continuación:

Tabla 43

| Clase | Lim Inf Int | Lim Sup Int | Marca Clase | Frec Abs Obs | Frec Abs Esp |
|-------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1 | 11.12 | 11.238 | 11.179 | | |
| 2 | 11.238 | 11.356 | 11.297 | | |
| 3 | 11.356 | 11.474 | 11.415 | | |
| 4 | 11.474 | 11.592 | 11.533 | | |
| 5 | 11.592 | 11.71 | 11.651 | | |
| 6 | 11.71 | 11.828 | 11.769 | | |
| 7 | 11.828 | 11.946 | 11.887 | | |
| 8 | 11.946 | 12.064 | 12.005 | | |
| 9 | 12.064 | 12.182 | 12.123 | | |
| 10 | 12.182 | 12.3 | 12.241 | | |

Por facilidad la marca de clase se colocó en el punto medio de los límites de clase. Para obtener la Frecuencia Absoluta Observada, se sitúa en la casilla de la clase 1, exactamente abajo del encabezado Frec Abs Obs, y se teclea la siguiente instrucción:

`FRECUENCIA(A1:A120,E3)-FRECUENCIA(A1:A120,D3)`

En donde \$A\$1:\$A\$120 es la referencia fija o anclada donde se encuentran los datos, E3 es la celda donde se encuentra el límite superior de la Clase 1 y D3 es la celda donde se encuentra el límite inferior de la clase 1; se arrastra el cursor hasta el final de la columna Frec Abs Obs.

Para obtener la Frecuencia Absoluta Esperada, se sitúa el cursor en la casilla de la clase 1, exactamente abajo del encabezado Frec Abs Esp, y se teclea la siguiente instrucción:

$=120*(\text{DISTR.NORM.N}(E3,\text{PROMEDIO}(\$A\$1:\$A\$120),\text{DESVEST}(\$A\$1:\$A\$120),1)-\text{DISTR.NORM.N}(D3,\text{PROMEDIO}(\$A\$1:\$A\$120),\text{DESVEST}(\$A\$1:\$A\$120),1))$

Esta instrucción calcula la frecuencia esperada de que la variable caiga entre el límite inferior y el límite superior de la clase 1; el multiplicar el resultado por 120 es para calcular la frecuencia esperada absoluta.

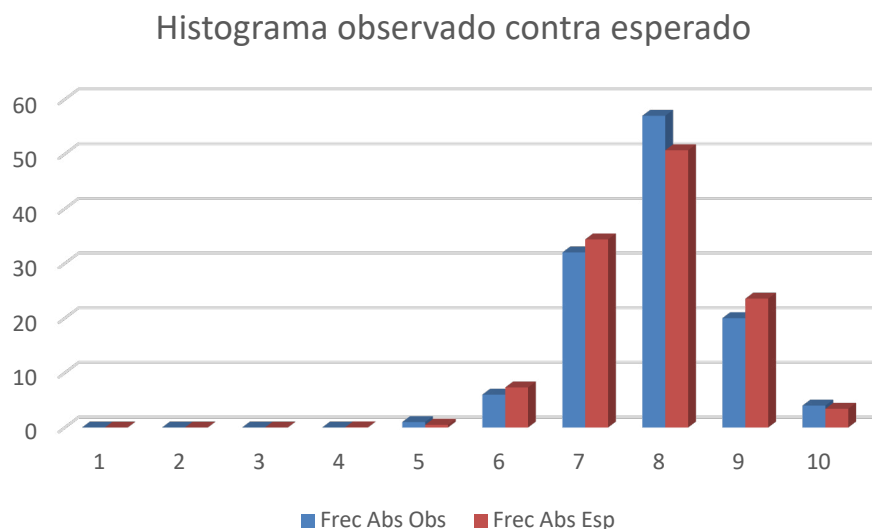
La tabla de frecuencias queda de la siguiente forma:

Tabla 44. Frecuencias observadas contra esperadas

| Clase | Lim Inf Int | Lim Sup Int | Marca Clase | Frec Abs Obs | Frec Abs Esp |
|-------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1 | 11.12 | 11.238 | 11.179 | 1 | 8.00454E-07 |
| 2 | 11.238 | 11.356 | 11.297 | 0 | 0.000106314 |
| 3 | 11.356 | 11.474 | 11.415 | 0 | 0.006380641 |
| 4 | 11.474 | 11.592 | 11.533 | 0 | 0.174033496 |
| 5 | 11.592 | 11.71 | 11.651 | 1 | 2.171306453 |
| 6 | 11.71 | 11.828 | 11.769 | 6 | 12.47534936 |
| 7 | 11.828 | 11.946 | 11.887 | 31 | 33.20577284 |
| 8 | 11.946 | 12.064 | 12.005 | 57 | 41.10689084 |
| 9 | 12.064 | 12.182 | 12.123 | 20 | 23.68962981 |
| 10 | 12.182 | 12.3 | 12.241 | 4 | 6.340560998 |

La gráfica del histograma observado contra el esperado se observa en la figura 85.

Figura 85



En la tabla 44 y en el histograma observado de la figura 85, se resalta que el primer subintervalo contiene un solo valor y luego le siguen tres subintervalos con cero valores; al respecto, debe cuestionarse la validez de ese primer valor, que difiere mucho del resto de los 119 valores. Valdría la pena investigar qué ocurrió, porque es un solo dato, el más pequeño, que vale 11.128 y se encuentra en la quinta lectura de la muestra 8 de la tabla inicial de la figura 122. Al respecto, ese dato dado que es el más pequeño sí puede afectar los resultados debido a que la media y la varianza se afectan con los valores extremos; si al investigar se detecta que pudo tratarse de una lectura errónea, podría pensarse en eliminar el dato, pero eso dejaría a la muestra 8 con solo cuatro lecturas y provocaría que los límites de control no fueran constantes. Otra decisión que podría tomarse, sería reemplazar la lectura errónea por la media de las otras cuatro lecturas de esa muestra.

Se aplicará la segunda decisión, lo que afectará a la tabla de frecuencias y habrá que recalcularla.

$$x_{8,5} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{j=n-1} x_{8,j}$$

$$x_{8,5} = \frac{1}{4}(11.867 + 11.971 + 12.016 + 11.866)$$

$$x_{8,5} = 11.930$$

La tabla original queda como se muestra en la tabla 44.

Tabla 45

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 12.046 | 12.006 | 12.139 | 12.112 | 12.139 |
| 2 | 12.091 | 12.118 | 11.85 | 11.931 | 11.863 |
| 3 | 11.952 | 11.862 | 11.899 | 11.999 | 12.139 |
| 4 | 11.821 | 11.989 | 11.866 | 12.104 | 12.028 |
| 5 | 11.674 | 11.881 | 11.886 | 11.921 | 11.886 |
| 6 | 12.02 | 12.016 | 12.227 | 12.004 | 11.887 |
| 7 | 12.077 | 12.038 | 11.949 | 12.029 | 12.103 |
| 8 | 11.867 | 11.971 | 12.016 | 11.866 | 11.930 |
| 9 | 12.063 | 12.038 | 11.858 | 11.985 | 11.969 |
| 10 | 12.043 | 12.059 | 12.086 | 12.024 | 11.915 |
| 11 | 12.014 | 11.747 | 11.965 | 11.953 | 11.944 |
| 12 | 11.949 | 11.894 | 11.951 | 12.076 | 12.023 |
| 13 | 12.168 | 11.985 | 12.06 | 11.91 | 11.884 |
| 14 | 11.974 | 11.964 | 12.183 | 12.054 | 11.794 |
| 15 | 11.799 | 12.118 | 11.886 | 12.036 | 11.977 |
| 16 | 12.021 | 11.993 | 12.061 | 11.969 | 11.814 |
| 17 | 12.008 | 11.834 | 11.966 | 11.948 | 12.299 |
| 18 | 12.128 | 11.986 | 11.911 | 12.019 | 11.98 |
| 19 | 11.946 | 11.806 | 12.049 | 11.976 | 12.053 |
| 20 | 11.956 | 12.066 | 11.911 | 11.937 | 12.04 |
| 21 | 12.246 | 11.947 | 11.937 | 12.128 | 12.005 |
| 22 | 11.947 | 12 | 11.984 | 11.838 | 12.038 |
| 23 | 11.994 | 12.136 | 11.908 | 12.001 | 11.909 |
| 24 | 12.124 | 11.862 | 11.904 | 12.073 | 12.072 |

En donde se reemplazó la lectura de 11.124 por el promedio de las otras cuatro lecturas de la muestra 8, que da 11.930.

Se vuelven a realizar los cálculos; nótese que 11.124 ya no existirá y entonces otro valor será el mínimo y cambiará el rango, por lo cual es necesario volver a hacer la estadística descriptiva. En la tabla 46 se puede apreciar qué tanto cambiaron los resultados.

Tabla 46

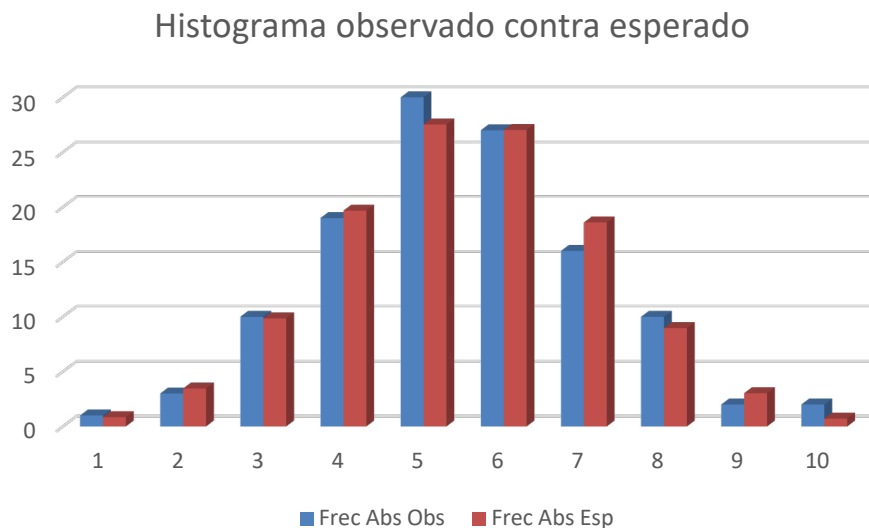
| Parámetro Estadístico | Datos Originales | un Dato modificado |
|---------------------------|------------------|--------------------|
| Media | 11.97895 | 11.98566667 |
| Error estándar | 0.01190608 | 0.00950564 |
| Mediana | 11.985 | 11.985 |
| Moda | 12.038 | 12.038 |
| Desviación estándar | 0.130424572 | 0.104129068 |
| Varianza de la muestra | 0.017010569 | 0.010842863 |
| Curtosis | 14.71170286 | 0.492589037 |
| Coefficiente de asimetría | -2.261433036 | 0.088304956 |
| Rango | 1.175 | 0.625 |
| Mínimo | 11.124 | 11.674 |
| Máximo | 12.299 | 12.299 |
| Suma | 1437.474 | 1438.28 |
| Cuenta | 120 | 120 |

Nótese que el rango casi se redujo a la mitad, de allí la importancia de validar todas las lecturas que se hagan en un proceso. La tabla de frecuencias actualizada se muestra en la tabla 46.

Tabla 46

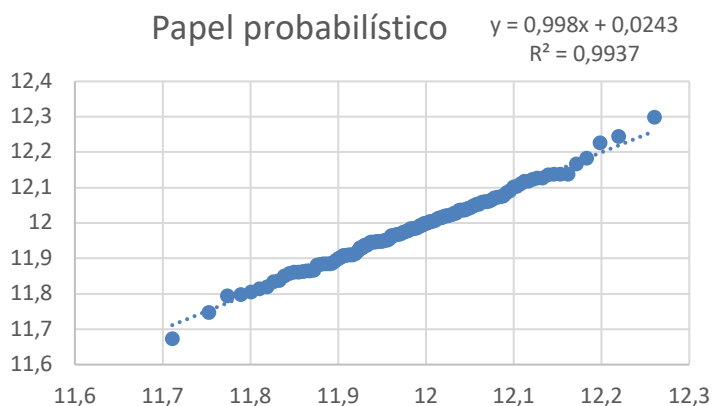
| Clase | Lim Inf Int | Lim Sup Int | Marca Clase | Frec Abs Obs | Frec Abs Esp |
|-------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1 | 11.674 | 11.737 | 11.706 | 1 | 0.9 |
| 2 | 11.737 | 11.8 | 11.769 | 3 | 3.5 |
| 3 | 11.8 | 11.863 | 11.832 | 10 | 9.9 |
| 4 | 11.863 | 11.926 | 11.895 | 19 | 19.7 |
| 5 | 11.926 | 11.989 | 11.958 | 30 | 27.5 |
| 6 | 11.989 | 12.052 | 12.021 | 27 | 27.0 |
| 7 | 12.052 | 12.115 | 12.084 | 16 | 18.6 |
| 8 | 12.115 | 12.178 | 12.147 | 10 | 9.0 |
| 9 | 12.178 | 12.241 | 12.210 | 2 | 3.0 |
| 10 | 12.241 | 12.304 | 12.273 | 2 | 0.7 |

Los histogramas de estos datos se muestran en la figura 132.

Figura 86


Nótese que en la comparación visual de ambos histogramas se puede concluir que los datos sí presentan distribución normal.

Ahora se aplicará el método del papel probabilístico. La gráfica se muestra en la figura 87.

Figura 87. Gráfico de papel probabilístico entre valores observados y valores esperados de una distribución normal


Nuevamente, el gráfico refleja que los datos sí presentan una distribución normal, ya que su coeficiente de determinación es 0.9937.

Ahora se aplicará el método de la prueba de bondad de ajuste ji-cuadrada. Para ello se aprovechará la tabla de frecuencias mostrada en la Tabla 47.

Tabla 47

| Clase | Lim Inf Int | Lim Sup Int | Marca Clase | O _i | E _i | (E _i -O _i) ² /E _i |
|-------|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|--|
| 1 | 11.674 | 11.863 | 11.769 | 14 | 14.2 | 0.001841 |
| 2 | 11.863 | 11.926 | 11.895 | 19 | 19.7 | 0.022903 |
| 3 | 11.926 | 11.989 | 11.958 | 30 | 27.5 | 0.220893 |
| 4 | 11.989 | 12.052 | 12.021 | 27 | 27.0 | 1.7E-05 |
| 5 | 12.052 | 12.115 | 12.084 | 16 | 18.6 | 0.361674 |
| 6 | 12.115 | 12.178 | 12.147 | 14 | 12.7 | 0.12901 |

$$\chi_0^2 = 0.736337$$

$$\chi_{\alpha, m-p-1}^2 = \chi_{0.05, 3}^2 = 7.814728$$

Como se puede apreciar con la prueba de bondad de ajuste ji cuadrada, $\chi_0^2 < \chi_{\alpha, m-p-1}^2$, por lo cual, no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula que establece que la distribución de los datos es normal.

Por último, se aplicará la prueba D de Kolmogorov-Smirnov. Con la tabla de frecuencias acumuladas observadas y frecuencias acumuladas normales:

Tabla 48

| Clase | Lim Inf Int | Lim Sup Int | F obs | F norm | diferencia |
|-------|-------------|-------------|--------|--------|------------|
| 1 | 11.674 | 11.737 | 0.0083 | 0.0085 | 0.0001 |
| 2 | 11.737 | 11.8 | 0.0333 | 0.0373 | 0.0040 |
| 3 | 11.8 | 11.863 | 0.1167 | 0.1194 | 0.0027 |
| 4 | 11.863 | 11.926 | 0.2750 | 0.2833 | 0.0083 |
| 5 | 11.926 | 11.989 | 0.5250 | 0.5128 | 0.0122 |
| 6 | 11.989 | 12.052 | 0.7500 | 0.7379 | 0.0121 |
| 7 | 12.052 | 12.115 | 0.8833 | 0.8929 | 0.0096 |
| 8 | 12.115 | 12.178 | 0.9667 | 0.9676 | 0.0010 |
| 9 | 12.178 | 12.241 | 0.9833 | 0.9929 | 0.0096 |
| 10 | 12.241 | 12.304 | 1.0000 | 0.9989 | 0.0011 |

Como se puede observar en la tabla 48, la máxima diferencia es $D_o = 0.0122$. De la tabla 48, se puede leer el valor de $D_{0.05, 120} = 0.1242$, y como se puede observar $D_o < D_{0.05, 120}$, por lo que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis inicial de que los datos presentan distribución normal.

Tabla 49. Valores críticos de D para la prueba de Kolmogorov Smirnov de una muestra

| Tamaño de Muestra n | Nivel de significancia para $D = \text{Max} F_o(x) - S_n(x) $ | | | | |
|---------------------|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.01 |
| 1 | 0.900 | 0.925 | 0.950 | 0.975 | 0.995 |
| 2 | 0.684 | 0.726 | 0.776 | 0.842 | 0.929 |
| 3 | 0.565 | 0.597 | 0.642 | 0.708 | 0.828 |
| 4 | 0.494 | 0.525 | 0.564 | 0.624 | 0.733 |
| 5 | 0.446 | 0.474 | 0.510 | 0.565 | 0.669 |
| 6 | 0.410 | 0.436 | 0.470 | 0.521 | 0.618 |
| 7 | 0.381 | 0.405 | 0.438 | 0.486 | 0.577 |
| 8 | 0.358 | 0.381 | 0.411 | 0.457 | 0.543 |
| 9 | 0.339 | 0.360 | 0.388 | 0.432 | 0.514 |
| 10 | 0.322 | 0.342 | 0.368 | 0.410 | 0.490 |
| 11 | 0.307 | 0.326 | 0.352 | 0.391 | 0.468 |
| 12 | 0.295 | 0.313 | 0.338 | 0.375 | 0.450 |
| 13 | 0.284 | 0.302 | 0.325 | 0.361 | 0.433 |
| 14 | 0.274 | 0.292 | 0.314 | 0.349 | 0.418 |
| 15 | 0.266 | 0.283 | 0.304 | 0.338 | 0.404 |
| 16 | 0.258 | 0.274 | 0.295 | 0.328 | 0.392 |
| 17 | 0.250 | 0.266 | 0.286 | 0.318 | 0.381 |
| 18 | 0.244 | 0.259 | 0.278 | 0.309 | 0.371 |
| 19 | 0.237 | 0.252 | 0.272 | 0.301 | 0.363 |
| 20 | 0.231 | 0.246 | 0.264 | 0.294 | 0.356 |
| 25 | 0.210 | 0.220 | 0.240 | 0.270 | 0.320 |
| 30 | 0.190 | 0.200 | 0.220 | 0.240 | 0.290 |
| 35 | 0.180 | 0.190 | 0.210 | 0.230 | 0.270 |
| Más de 35 | $1.07/\text{raiz}(n)$ | $1.14/\text{raiz}(n)$ | $1.22/\text{raiz}(n)$ | $1.36/\text{raiz}(n)$ | $1.63/\text{raiz}(n)$ |

Massey, F. J., Jr. 1951. La prueba de Kolmogorov-Smirnov para la bondad del ajuste. J. Amer. Statist. Ass., 46, 70. Recuperado de la tabla E, página 285, del libro de Siegel, Sidney. Estadística No Paramétrica. Ed. Trillas, 1984.

Otra forma de determinar la normalidad de un conjunto de datos es utilizar Minitab. Los datos se capturan en una columna de la pantalla principal de Minitab, luego se va al menú Stat, posteriormente se elige el Submenú Basic Statistics y por último Normality Test, como se muestra en la figura 136. Aparece la pantalla que se muestra en la figura 88 y después de llenar las casillas correspondientes y dar un click en Ok se obtiene la gráfica de la figura 89.

En la figura 90 se observa que $p\text{-Value}=0.939 > \alpha=0.05$ por lo que no existe evidencia para poder rechazar la hipótesis nula de que los datos presentan distribución normal.

Figura 88

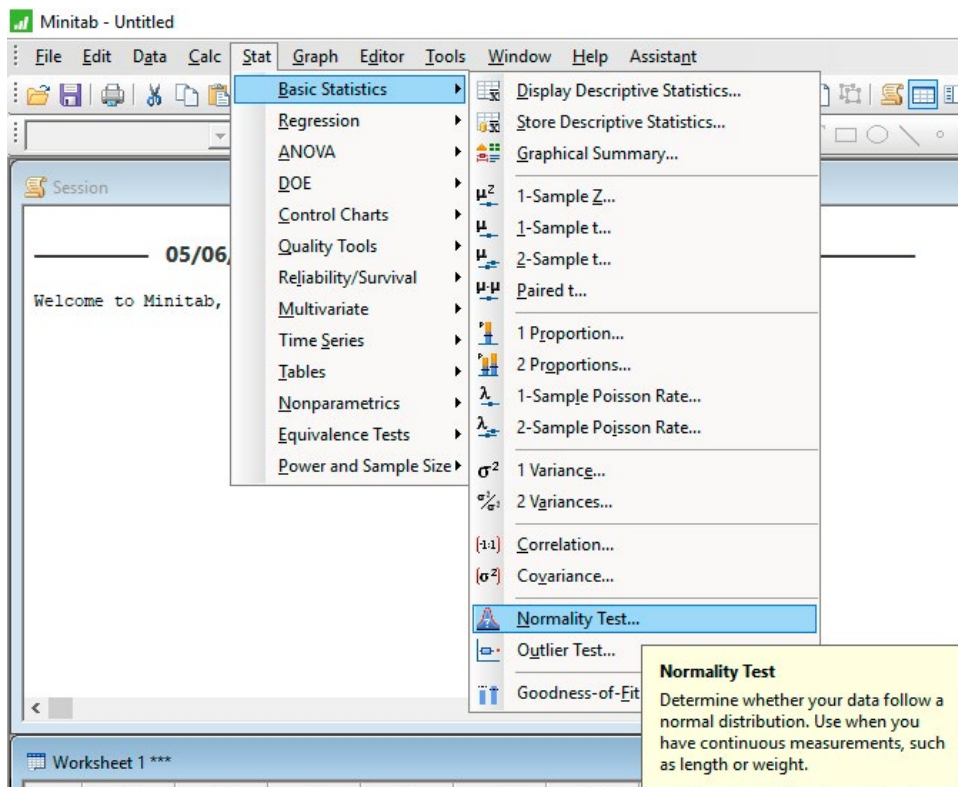


Figura 89

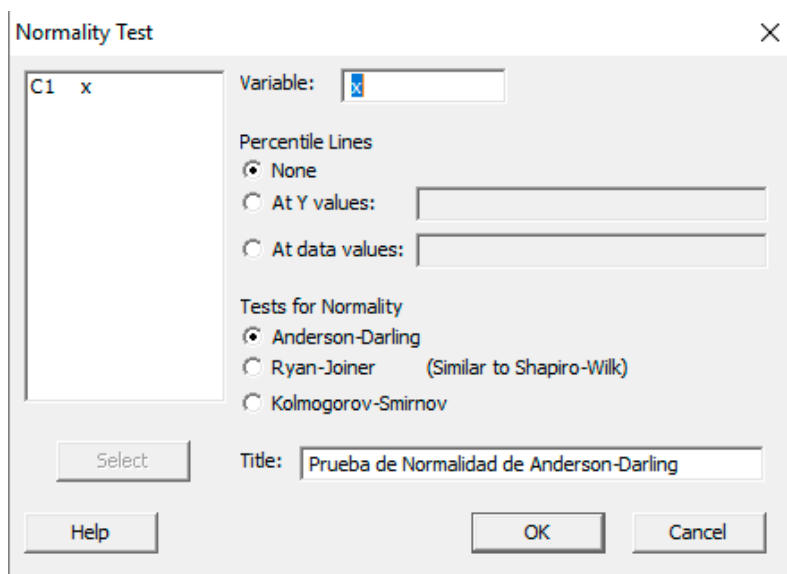
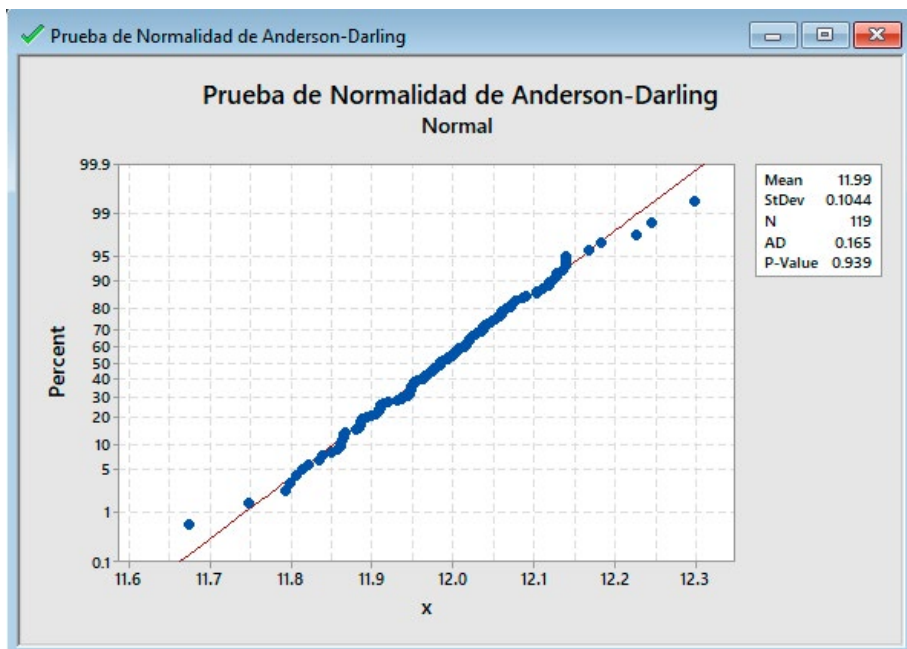


Figura 90



También se puede resolver la prueba de normalidad de los datos utilizando el software R, tecleando las siguientes líneas:

```
latas<-
c(12.046,12.091,11.952,11.821,11.674,12.02,12.077,11.867,12.063,12.043,12.014,
11.949,12.168,11.974,11.799,12.021,12.008,12.128,11.946,11.956,12.246,11.947,
11.994,12.124,12.006,12.118,11.862,11.989,11.881,12.016,12.038,11.971,12.038,
12.059,11.747,11.894,11.985,11.964,12.118,11.993,11.834,11.986,11.806,12.066,
11.947,12,12.136,11.862,12.139,11.85,11.899,11.866,11.886,12.227,11.949,12.016,
11.858,12.086,11.965,11.951,12.06,12.183,11.886,12.061,11.966,11.911,12.049,
11.911,11.937,11.984,11.908,11.904,12.112,11.931,11.999,12.104,11.921,12.004,
12.029,11.866,11.985,12.024,11.953,12.076,11.91,12.054,12.036,11.969,11.948,
12.019,11.976,11.937,12.128,11.838,12.001,12.073,12.139,11.863,12.139,12.028,
11.886,11.887,12.103,11.93,11.969,11.915,11.944,12.023,11.884,11.794,11.977,
11.814,12.299,11.98,12.053,12.04,12.005,12.038,11.909,12.072)
require(normtest)
ajb.norm.test(latas)
frosini.norm.test(latas)
```

```

hegazy2.norm.test(latas)
kurtosis.norm.test(latas)
skewness.norm.test(latas)
spiegelhalter.norm.test(latas)
wb.norm.test(latas)

```

Después de compilar estas líneas, el software R arroja los siguientes resultados:

```

latas<-
c(12.046,12.091,11.952,11.821,11.674,12.02,12.077,11.867,12.063,12.043,12.014,
11.949,12.168,11.974,11.799,12.021,12.008,12.128,11.946,11.956,12.246,11.947,
11.994,12.124,12.006,12.118,11.862,11.989,11.881,12.016,12.038,11.971,12.038,
12.059,11.747,11.894,11.985,11.964,12.118,11.993,11.834,11.986,11.806,12.066,
11.947,12,12.136,11.862,12.139,11.85,11.899,11.866,11.886,12.227,11.949,12.016,
11.858,12.086,11.965,11.951,12.06,12.183,11.886,12.061,11.966,11.911,12.049,
11.911,11.937,11.984,11.908,11.904,12.112,11.931,11.999,12.104,11.921,12.004,
12.029,11.866,11.985,12.024,11.953,12.076,11.91,12.054,12.036,11.969,11.948,
12.019,11.976,11.937,12.128,11.838,12.001,12.073,12.139,11.863,12.139,12.028,
11.886,11.887,12.103,11.93,11.969,11.915,11.944,12.023,11.884,11.794,11.977,
11.814,12.299,11.98,12.053,12.04,12.005,12.038,11.909,12.072)

```

```
require(normtest)
```

Loading required package: normtest

```
ajb.norm.test(latas)
```

Adjusted Jarque-Bera test for normality

data: latas

AJB = 1.4227, **p-value = 0.4485**

```
frosini.norm.test(latas)
```

Frosini test for normality

data: latas

B = 0.10636, **p-value = 0.986**

hegazy2.norm.test(latas)

Hegazy-Green test for normality

data: latas

T = 0.010837, **p-value = 0.45**

kurtosis.norm.test(latas)

Kurtosis test for normality

data: latas

T = 3.4227, **p-value = 0.29**

skewness.norm.test(latas)

Skewness test for normality

data: latas

T = 0.087197, **p-value = 0.682**

spiegelhalter.norm.test(latas)

Spiegelhalter test for normality

data: latas

T = 1.2774, **p-value = 0.1875**

wb.norm.test(latas)

Weisberg-Bingham test for normality

data: latas

WB = 0.99266, **p-value = 0.695**

En todos los casos de cada una de las pruebas el valor de p-value es mayor a $\alpha=0.05$ por lo que no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de que los datos presentan distribución normal.

- b.** ¿Qué tipo de diagrama de control de proceso utilizaría para determinar si el proceso se encuentra bajo control? Justifique su respuesta.

La única característica que se mide en la etapa de proceso citada es el volumen de llenado de latas, que es una característica de calidad por variables, y el tamaño de muestra es $n=5$, por lo que se sugiere usar un diagrama de control por variables tipo \bar{x} -R.

- c.** Calcule los límites de control del diagrama de control sugerido en el inciso previo.

Para $n=5$, los factores requeridos para calcular los límites de un diagrama tipo \bar{x} -R, son:

$$d_2 = 2.326$$

$$d_3 = 0.864$$

$$A_2 = 0.5768$$

$$D_3 = 0$$

$$D_4 = 2.11436$$

Con estos valores se obtiene la tabla 50.

Tabla 50

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|----|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | Muestra | x ₁ | x ₂ | x ₃ | x ₄ | x ₅ | Media | Rango | LIC media | LMC media | LSC media | LIC rango | LMC rango | LSC rango |
| 2 | 1 | 12.046 | 12.006 | 12.139 | 12.112 | 12.139 | 12.088 | 0.133 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 3 | 2 | 12.091 | 12.118 | 11.85 | 11.931 | 11.863 | 11.971 | 0.268 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 4 | 3 | 11.952 | 11.862 | 11.899 | 11.999 | 12.139 | 11.970 | 0.277 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 5 | 4 | 11.821 | 11.989 | 11.866 | 12.104 | 12.028 | 11.962 | 0.283 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 6 | 5 | 11.674 | 11.881 | 11.886 | 11.921 | 11.886 | 11.850 | 0.247 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 7 | 6 | 12.02 | 12.016 | 12.227 | 12.004 | 11.887 | 12.031 | 0.340 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 8 | 7 | 12.077 | 12.038 | 11.949 | 12.029 | 12.103 | 12.039 | 0.154 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 9 | 8 | 11.867 | 11.971 | 12.016 | 11.866 | 11.93 | 11.930 | 0.150 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 10 | 9 | 12.063 | 12.038 | 11.858 | 11.985 | 11.969 | 11.983 | 0.205 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 11 | 10 | 12.043 | 12.059 | 12.086 | 12.024 | 11.915 | 12.025 | 0.171 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 12 | 11 | 12.014 | 11.747 | 11.965 | 11.953 | 11.944 | 11.925 | 0.267 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 13 | 12 | 11.949 | 11.894 | 11.951 | 12.076 | 12.023 | 11.979 | 0.182 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 14 | 13 | 12.168 | 11.985 | 12.06 | 11.91 | 11.884 | 12.001 | 0.284 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 15 | 14 | 11.974 | 11.964 | 12.183 | 12.054 | 11.794 | 11.994 | 0.389 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 16 | 15 | 11.799 | 12.118 | 11.886 | 12.036 | 11.977 | 11.963 | 0.319 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 17 | 16 | 12.021 | 11.993 | 12.061 | 11.969 | 11.814 | 11.972 | 0.247 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 18 | 17 | 12.008 | 11.834 | 11.966 | 11.948 | 12.299 | 12.011 | 0.465 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 19 | 18 | 12.128 | 11.986 | 11.911 | 12.019 | 11.98 | 12.005 | 0.217 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 20 | 19 | 11.946 | 11.806 | 12.049 | 11.976 | 12.053 | 11.966 | 0.247 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 21 | 20 | 11.956 | 12.066 | 11.911 | 11.937 | 12.04 | 11.982 | 0.155 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 22 | 21 | 12.246 | 11.947 | 11.937 | 12.128 | 12.005 | 12.053 | 0.309 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 23 | 22 | 11.947 | 12 | 11.984 | 11.838 | 12.038 | 11.961 | 0.200 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 24 | 23 | 11.994 | 12.136 | 11.908 | 12.001 | 11.909 | 11.990 | 0.228 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 25 | 24 | 12.124 | 11.862 | 11.904 | 12.073 | 12.072 | 12.007 | 0.262 | 11.841 | 11.986 | 12.130 | 0 | 0.250 | 0.529 |
| 26 | | | | | | Media= | 11.986 | 0.250 | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | d ₂ = | 2.326 | | | | | | | | | | | | |
| 29 | d ₃ = | 0.864 | | | | | | | | | | | | |
| 30 | A ₂ = | 0.5768 | | | | | | | | | | | | |
| 31 | D ₃ = | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 32 | D ₄ = | 2.11436 | | | | | | | | | | | | |

En la tabla anterior, la media se calculó utilizando la siguiente instrucción en Excel: =promedio(B2:F2)

El rango se obtuvo como: =Max(B2:F2)-Min(B2:F2)

La media de las medias: =Promedio(H2:H25)

La media de los rangos: =Promedio(I2:I25)

Los límites de control se calcularon de la siguiente forma:

$$\text{LIC media} = \$G\$26 - \$B\$30 * \$H\$26$$

$$\text{LMC media} = \$G\$26$$

$$\text{LSC media} = \$G\$26 + \$B\$30 * \$H\$26$$

$$\text{LIC rango} = \$B\$31 * \$H\$26$$

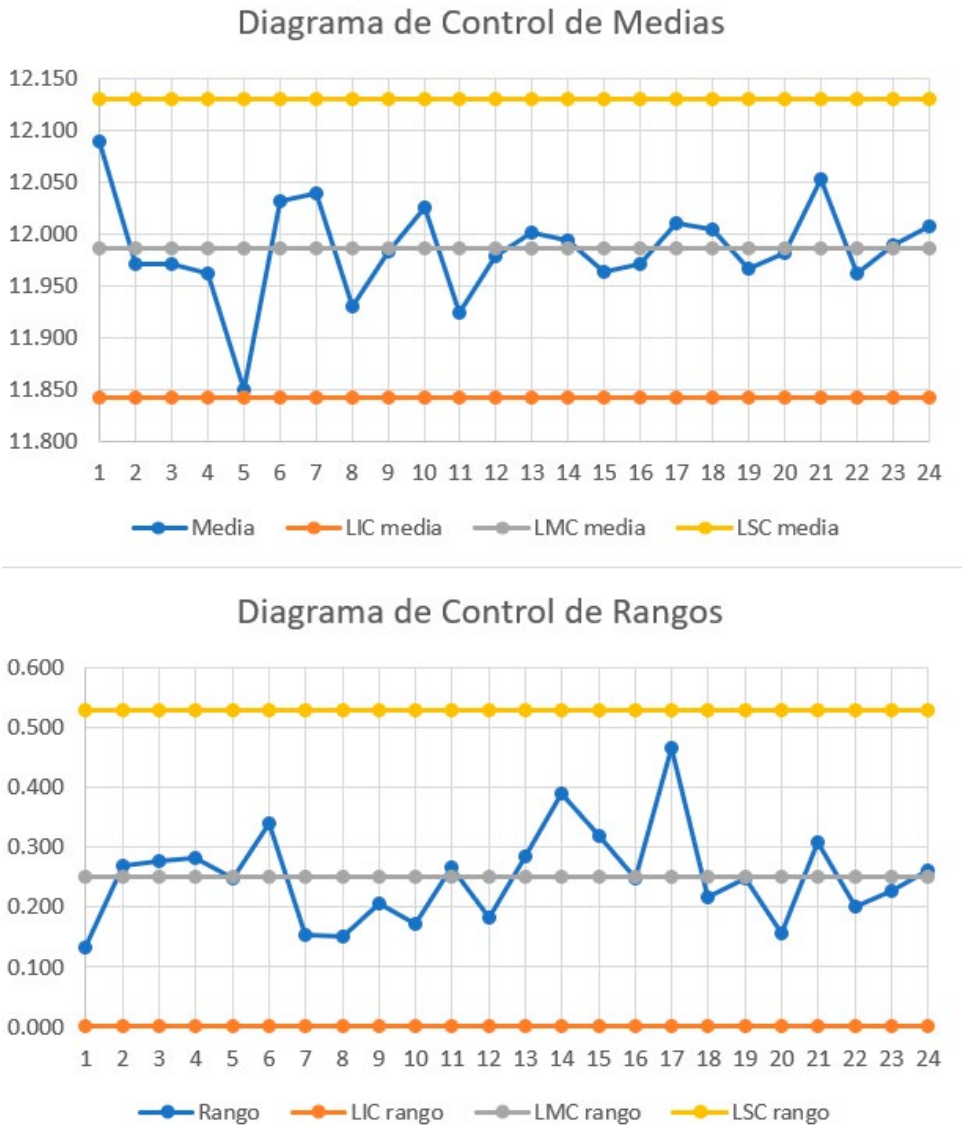
$$\text{LMC rango} = \$H\$26$$

$$\text{LSC rango} = \$B\$32 * \$H\$26$$

d. Trace el diagrama de control sugerido.

El diagrama se muestra en la figura 91 y como se puede observar son dos diagramas de control, uno para las medias y otro para los rangos. Se requiere interpretar ambos al mismo tiempo.

Figura 91. Diagramas de Control X-R usando Excel



Estos mismos diagramas pueden ser trazados usando Minitab. Lo primero es ingresar los datos en la pantalla principal en una sola columna o en un solo renglón, capturando primero todas las lecturas de la primera muestra, luego todas las lecturas de la segunda muestra y así sucesivamente en riguroso orden.

Posteriormente, se elige el menú Stats, luego Control Charts, después “Variables Charts for Subgroups” y finalmente “Xbar-R”, como se muestra en la figura 92, apareciendo la pantalla que se muestra en la figura 93, en la cual se debe marcar la única C1 que aparece y oprimir Select, posteriormente, en el combo que aparece arriba a la derecha seleccionar la opción “All observations for a chart are in one column:”. En la casilla que dice “Subgroup sizes:” se debe teclear el tamaño de cada muestra, cinco en este caso; finalmente, se oprime “Ok”, obteniéndose la gráfica que aparece en la figura 94.

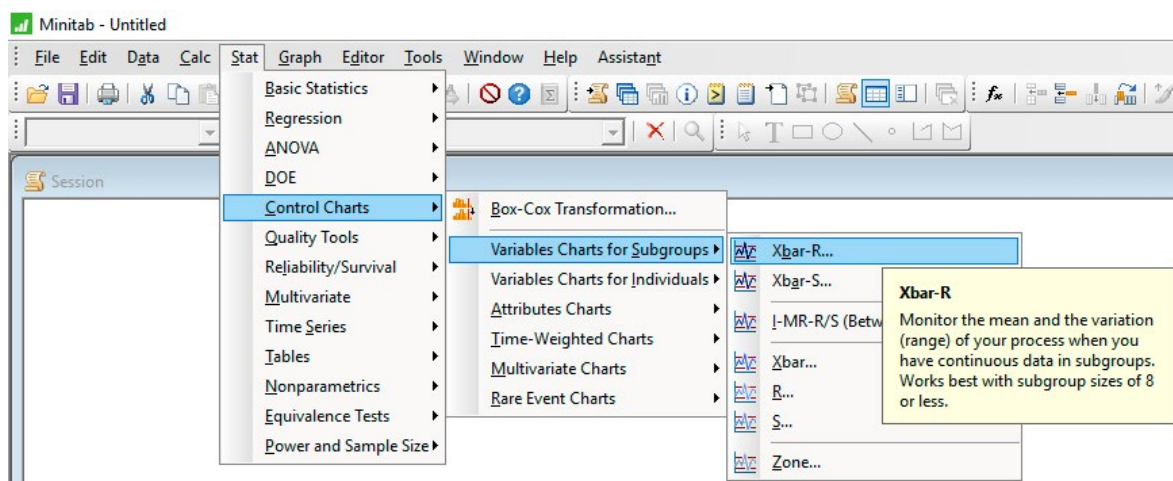
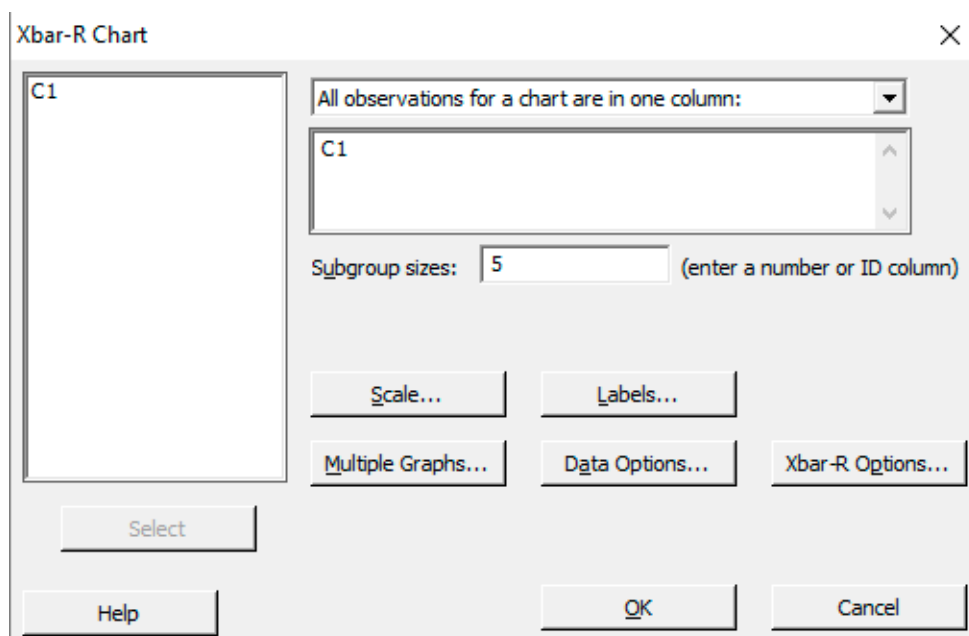
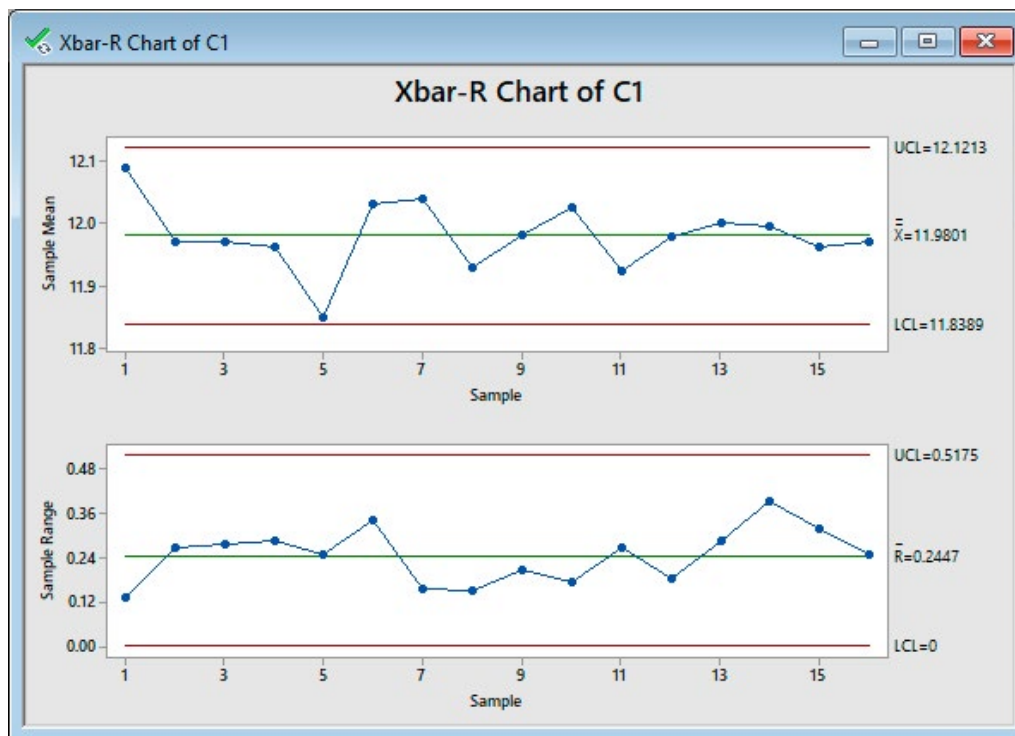
Figura 92

Figura 93


Figura 94. Diagramas de Control X-R usando Minitab



También puede usarse R para el trazo del diagrama de control de medias, tecleando las siguientes instrucciones:

- » `library(qcc)`
- » `datosxr<-read.csv(file="DatosXR.csv",head=TRUE,sep=";",nrows=24)`
- » `qcc(datosxr,type="xbar",sizes=5)`

Obteniéndose el gráfico del diagrama de medias que se muestra en la figura 95.

El trazo del diagrama de control de rangos con el software R, se obtendría tecleando las siguientes instrucciones:

- » `library(qcc)`
- » `datosxr<-read.csv(file="DatosXR.csv",head=TRUE,sep=";",nrows=24)`
- » `qcc(datosxr,type="R",sizes=5)`

Obteniéndose el gráfico del diagrama de rangos que se muestra en la figura 96.

Figura 95. Diagrama de Control de Medias usando R

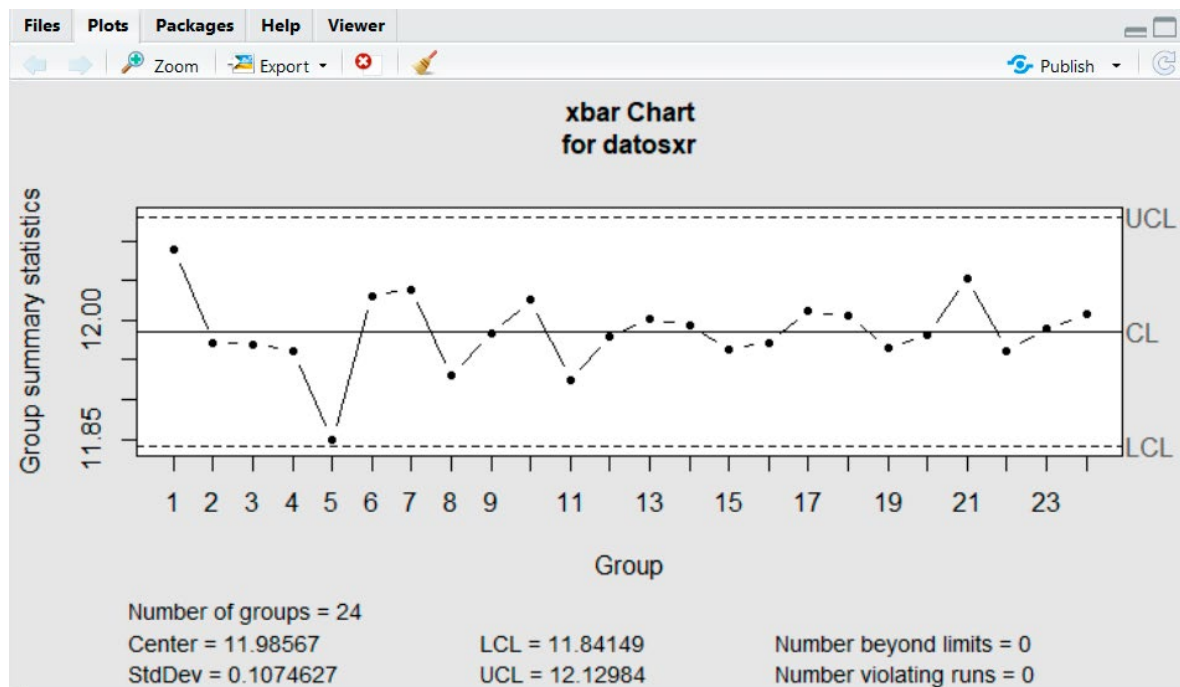
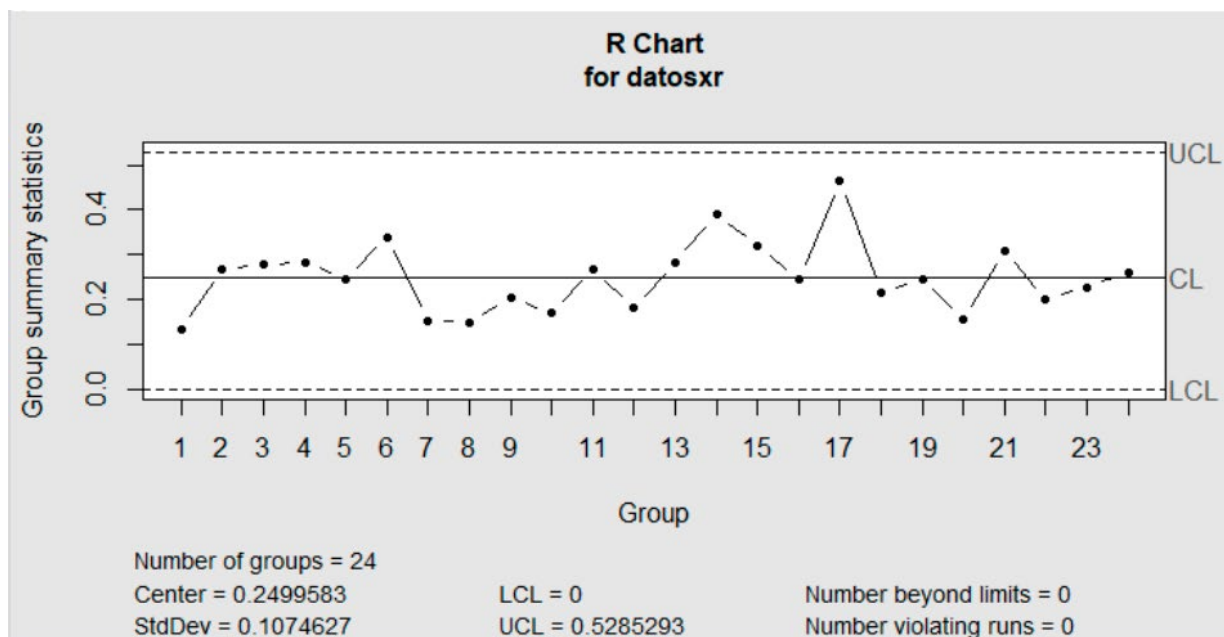


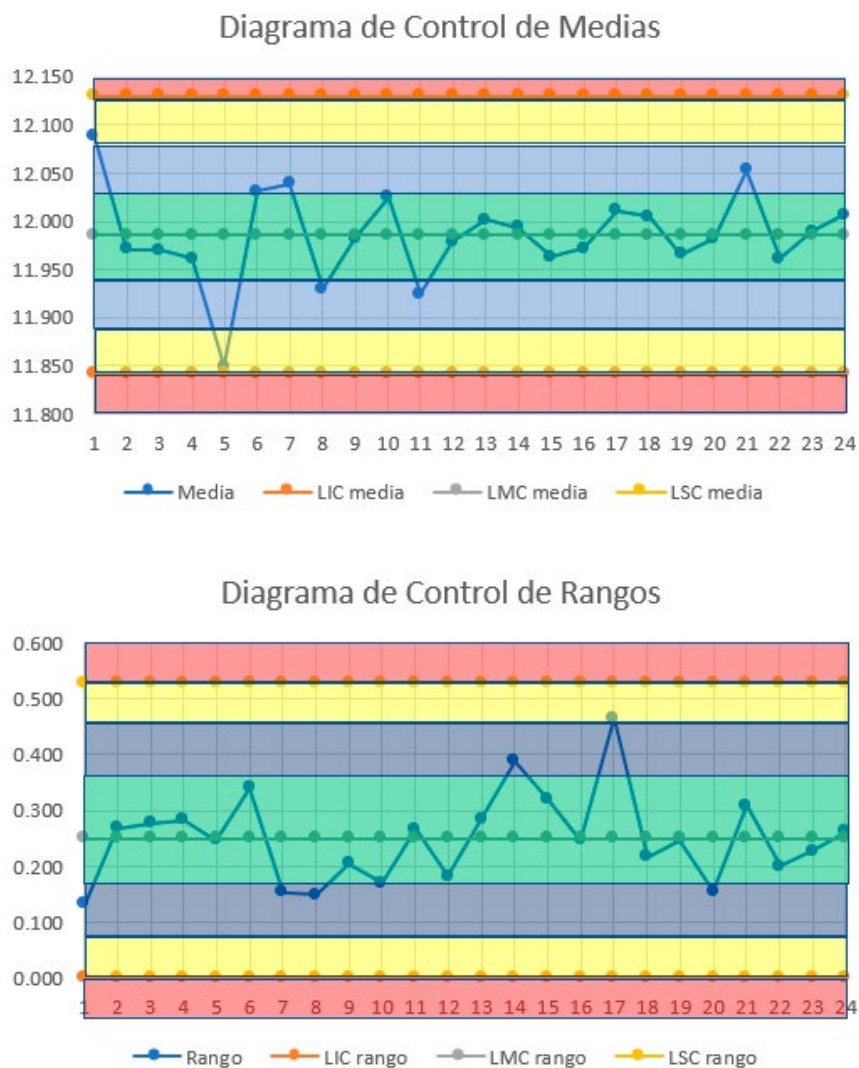
Figura 96. Diagrama de Control de Rangos usando R.



- e. Determine si el proceso se encuentra bajo control.

Ambos diagramas con la plantilla arcoíris se muestran en la figura 97. Nótese que tanto para el diagrama de medias como para el de rangos, todos sus puntos caen dentro de los límites de control. La única observación que valdría la pena emitir es que, en el caso del diagrama de medias, desde la muestra 12 hasta la muestra 20, nueve puntos caen en forma seguida en zona verde; habrá que investigar la causa de la no aleatoriedad de los datos y es explicable porque fueron datos generados con algoritmos pseudoaleatorios.

Figura 97. Diagrama de Control X-R estandarizado con gráfico Arcoiris



- f. Estime la media y la desviación estándar de proceso.

$$\hat{\mu}_x \approx \bar{\bar{x}} = 11.986$$

$$\hat{\sigma}_x \approx \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.250}{2.326} = 0.10748$$

- g. Suponga que los límites de especificación son LIE= 11.5 onzas y LSE= 12.5 onzas. Determine la capacidad de proceso.

$$Cp = \frac{12.5 - 11.5}{6(0.10748)} = 1.55 > 1.33$$

$$Cpl = \frac{(11.986 - 11.5)}{3(0.10748)} = 1.506 > 1.33$$

$$Cpu = \frac{(12.5 - 11.986)}{3(0.10748)} = 1.594 > 1.33$$

$$Cpk = \min\{Cpl, Cpu\} = 1.506 > 1.33$$

$$\xi = \frac{\hat{\mu}_x - D}{\hat{\sigma}_x} = \frac{11.986 - 12}{0.10748} = -0.13$$

$$Cpm = \frac{Cp}{\sqrt{1 + \xi^2}} = 1.58 > 1.33$$

$$Cpkm = \frac{Cpk}{\sqrt{1 + \xi^2}} = 1.49 > 1.33$$

Como se puede apreciar, el proceso es capaz de cumplir especificaciones.

- h. Estime la fracción defectuosa por debajo del límite inferior de especificación, la fracción defectuosa por encima del límite superior de especificación y la fracción defectuosa total.

Como ya se demostró, los datos que se tienen del volumen de llenado se comportan como una variable aleatoria normal

$x \sim N(\hat{\mu}_x \approx 11.986, \hat{\sigma}_x = 0.10748)$, por lo que:

$$p(x < \text{LIE}) = 3.066\text{E-}06$$

$$p(x > \text{LSE}) = 8.67\text{E-}07$$

$$p = 3.93\text{E-}06 = 3.93 \text{ ppm}$$

- i. ¿Cuál sería la primera acción por emprender para mejorar el proceso?, si la hiciera, ¿cuánto mejoraría el proceso?

La primera acción por ejercer es centrar la media de proceso en la media de diseño, es decir, lograr que la media de proceso sea 12.

Para medir el mejoramiento, nótese que al centrar la media de proceso en la media de diseño:

$$C_p = C_{pl} = C_{pu} = C_{pk} = C_{pm} = C_{pkm} = 1.55$$

Asimismo

$$p(x < LIE) = 3.066E-06$$

$$p(x > LSE) = 3.066E-06$$

$$p = 3.29E-06 = 3.29 \text{ ppm}$$

El mejoramiento se mediría con el cálculo de la mejora relativa (error relativo):

$$mejora_relativa = \frac{3.93 - 3.29}{3.93} * 100 = 16.42\%$$

- j. Si no cumplir la especificación inferior cuesta \$10.00 por lata y no cumplir la especificación superior cuesta \$7.00 por lata, obtenga la función de pérdida según el enfoque occidental y obtenga la función de pérdida de Taguchi, según el enfoque oriental.

Según el enfoque occidental, solo cuesta cuando no cumple la especificación, por lo que la función de pérdida sería:

$$funcion_de_perdida = \left\{ \begin{array}{lll} 10 & si & x < 11.5 \\ 0 & si & 11.5 \leq x \leq 12.5 \\ 7 & si & x > 12.5 \end{array} \right\}$$

Según el enfoque oriental, desarrollado por Genichi Taguchi:

La función de pérdida corresponde con una parábola vertical de rama izquierda con vértice en (12,0), es decir,

$$y=m(x-12)^2$$

El punto lateral izquierdo de esta parábola está ubicado en (11.5, 10), por lo cual:

$$m= 10/(11.5-12)^2=40$$

La otra parte de la función de pérdida corresponde con una parábola vertical de rama derecha con vértice en (12,0), es decir,

$$y=m(x-12)^2$$

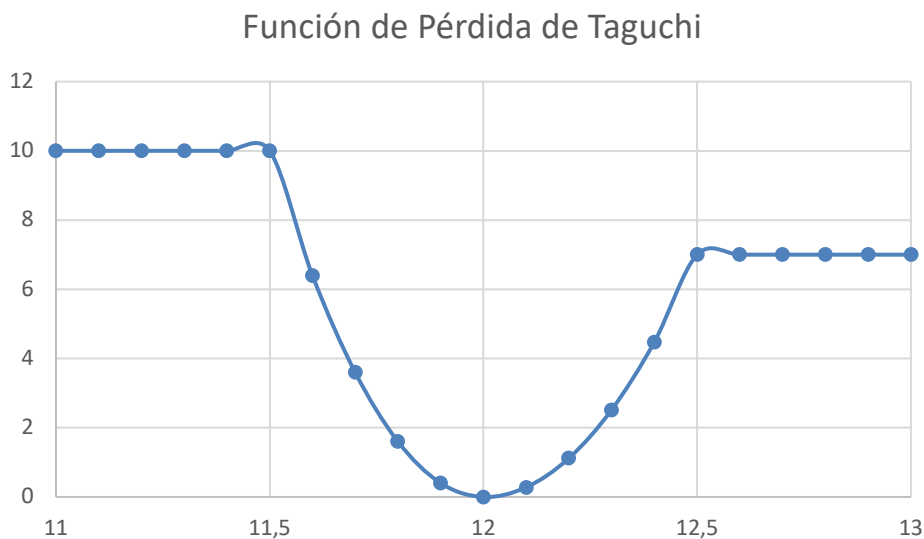
El punto lateral derecho de esta parábola está ubicado en (12.5, 7), por lo cual:

$$m= 7/(12.5-12)^2=28$$

Por lo tanto, la función de pérdida tiene como expresión matemática la siguiente:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 10 & \text{si} & x < 11.5 \\ 40(x-12)^2 & \text{si} & 11.5 \leq x \leq 12 \\ 28(x-12)^2 & \text{si} & 12. < x \leq 12.5 \\ 7 & \text{si} & x > 12.5 \end{array} \right\}$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 98.

Figura 98


Ejemplo 15.2. Un proceso productivo manufactura partes a través de un proceso de moldeo por inyección. Una característica importante de este proceso es la resistencia mecánica de las piezas. Para conocer sobre dicha característica, se toman muestras periódicas de tamaño $n=4$, cada 15 minutos, obteniéndose los resultados mostrados en la tabla 50.

a. Explique qué tipo de diagrama de control utilizaría.

La resistencia mecánica de las piezas es medible con instrumentos, por lo que es una característica de calidad por variables; además, el tamaño de muestra es constante e igual a $n=4$, por lo que se sugiere usar un diagrama de control X-R.

Los factores que se requieren para el cálculo de los límites son:

$$d_2 = 2.059$$

$$d_3 = 0.880$$

$$A_2 = 0.729$$

$$D_3 = 0$$

$$D_4 = 2.282$$

Tabla 51

| Hora | Muestra | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
|-------|---------|-------|-------|-------|-------|
| 07:15 | 1 | 82.0 | 80.2 | 77.7 | 74.7 |
| 07:30 | 2 | 87.6 | 77.3 | 77.8 | 70.0 |
| 07:45 | 3 | 84.7 | 74.8 | 83.3 | 74.2 |
| 08:30 | 4 | 79.8 | 73.4 | 81.5 | 73.1 |
| 08:45 | 5 | 82.4 | 77.4 | 81.6 | 77.2 |
| 09:00 | 6 | 74.3 | 78.9 | 86.3 | 88.7 |
| 09:15 | 7 | 73.5 | 77.0 | 79.8 | 72.4 |
| 09:30 | 8 | 78.2 | 83.4 | 80.5 | 85.0 |
| 09:45 | 9 | 79.5 | 85.2 | 75.2 | 83.1 |
| 10:00 | 10 | 74.7 | 74.2 | 70.1 | 81.1 |
| 10:15 | 11 | 79.0 | 80.5 | 77.4 | 72.8 |
| 10:30 | 12 | 79.6 | 80.8 | 78.3 | 72.8 |
| 10:45 | 13 | 81.7 | 80.3 | 78.1 | 81.0 |
| 11:00 | 14 | 78.2 | 73.9 | 77.6 | 76.7 |
| 11:15 | 15 | 84.5 | 81.1 | 81.8 | 72.4 |
| 11:30 | 16 | 77.8 | 78.6 | 79.2 | 78.1 |
| 11:45 | 17 | 81.1 | 77.2 | 74.5 | 77.2 |
| 12:00 | 18 | 83.5 | 75.9 | 82.5 | 80.2 |
| 12:15 | 19 | 78.0 | 76.8 | 80.2 | 83.4 |
| 12:30 | 20 | 83.5 | 72.1 | 77.6 | 77.7 |
| 12:45 | 21 | 67.9 | 80.5 | 77.2 | 79.8 |
| 13:00 | 22 | 68.8 | 67.6 | 79.4 | 83.3 |
| 13:15 | 23 | 77.5 | 84.2 | 77.4 | 79.3 |
| 13:30 | 24 | 75.9 | 85.1 | 85.9 | 93.4 |
| 13:45 | 25 | 92.6 | 80.6 | 86.8 | 78.6 |

b. Calcule sus límites de control.

LIC media= media de medias- A_2 *media de rangos= 72.134

LMC media= media de medias= 79.0

LSC media= media de medias+ A_2 *media de rangos= 85.81

LIC rango= D_3 *media de rangos= 0

LMC rango= media de rangos= 9.4

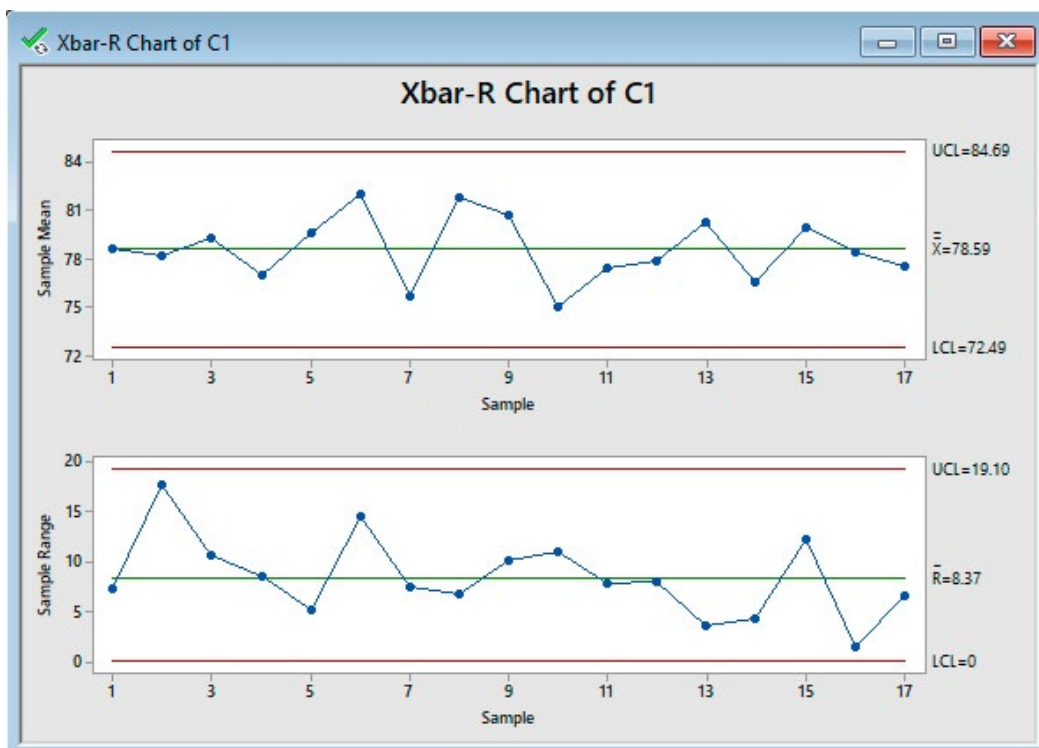
LSC rango= D_4 *media de rangos= 21.405

Tabla 52

| Hora | Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x} | R | LIC \bar{x} | LMC \bar{x} | LSC \bar{x} | LIC R | LMC R | LSC R |
|--------|---------|-------|-------|-------|--------|-----------|------|---------------|---------------|---------------|-------|-------|---------|
| 07:15 | 1 | 82.0 | 80.2 | 77.7 | 74.7 | 78.7 | 7.3 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 07:30 | 2 | 87.6 | 77.3 | 77.8 | 70.0 | 78.2 | 17.6 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 07:45 | 3 | 84.7 | 74.8 | 83.3 | 74.2 | 79.3 | 10.5 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 08:30 | 4 | 79.8 | 73.4 | 81.5 | 73.1 | 77.0 | 8.4 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 08:45 | 5 | 82.4 | 77.4 | 81.6 | 77.2 | 79.7 | 5.2 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 09:00 | 6 | 74.3 | 78.9 | 86.3 | 88.7 | 82.1 | 14.4 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 09:15 | 7 | 73.5 | 77.0 | 79.8 | 72.4 | 75.7 | 7.4 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 09:30 | 8 | 78.2 | 83.4 | 80.5 | 85.0 | 81.8 | 6.8 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 09:45 | 9 | 79.5 | 85.2 | 75.2 | 83.1 | 80.8 | 10.0 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 10:00 | 10 | 74.7 | 74.2 | 70.1 | 81.1 | 75.0 | 11.0 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 10:15 | 11 | 79.0 | 80.5 | 77.4 | 72.8 | 77.4 | 7.7 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 10:30 | 12 | 79.6 | 80.8 | 78.3 | 72.8 | 77.9 | 8.0 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 10:45 | 13 | 81.7 | 80.3 | 78.1 | 81.0 | 80.3 | 3.6 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 11:00 | 14 | 78.2 | 73.9 | 77.6 | 76.7 | 76.6 | 4.3 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 11:15 | 15 | 84.5 | 81.1 | 81.8 | 72.4 | 80.0 | 12.1 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 11:30 | 16 | 77.8 | 78.6 | 79.2 | 78.1 | 78.4 | 1.4 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 11:45 | 17 | 81.1 | 77.2 | 74.5 | 77.2 | 77.5 | 6.6 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 12:00 | 18 | 83.5 | 75.9 | 82.5 | 80.2 | 80.5 | 7.6 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 12:15 | 19 | 78.0 | 76.8 | 80.2 | 83.4 | 79.6 | 6.6 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 12:30 | 20 | 83.5 | 72.1 | 77.6 | 77.7 | 77.7 | 11.4 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 12:45 | 21 | 67.9 | 80.5 | 77.2 | 79.8 | 76.4 | 12.6 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 13:00 | 22 | 68.8 | 67.6 | 79.4 | 83.3 | 74.8 | 15.7 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 13:15 | 23 | 77.5 | 84.2 | 77.4 | 79.3 | 79.6 | 6.8 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 13:30 | 24 | 75.9 | 85.1 | 85.9 | 93.4 | 85.1 | 17.5 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| 13:45 | 25 | 92.6 | 80.6 | 86.8 | 78.6 | 84.7 | 14.0 | 72.134 | 79.0 | 85.81 | 0 | 9.4 | 21.4052 |
| | | | | | Media= | 79.0 | 9.4 | | | | | | |
| $d_2=$ | 2.059 | | | | | | | | | | | | |
| $d_3=$ | 0.88 | | | | | | | | | | | | |
| $A_2=$ | 0.729 | | | | | | | | | | | | |
| $D_3=$ | 0 | | | | | | | | | | | | |
| $D_4=$ | 2.282 | | | | | | | | | | | | |

Con Minitab el diagrama de control se muestra en la figura 99.

Figura 99



c. Determine si el proceso desde su inicio se encuentra bajo control.

Se muestra el gráfico X-R en la figura 100 con la plantilla arcoíris, observándose que el proceso se encuentra bajo control, aunque no debe pasar desapercibido que, en el diagrama de medias, en las muestras de la 11 a la 20, cayeron 9 puntos de 10 sucesivos en zona verde; además, en las muestras 23, 24 y 25 cayeron dos de tres puntos sucesivos en zona amarilla, lo que rompe la aleatoriedad del proceso.

Figura 100

del gráfico

Diagrama de Medias

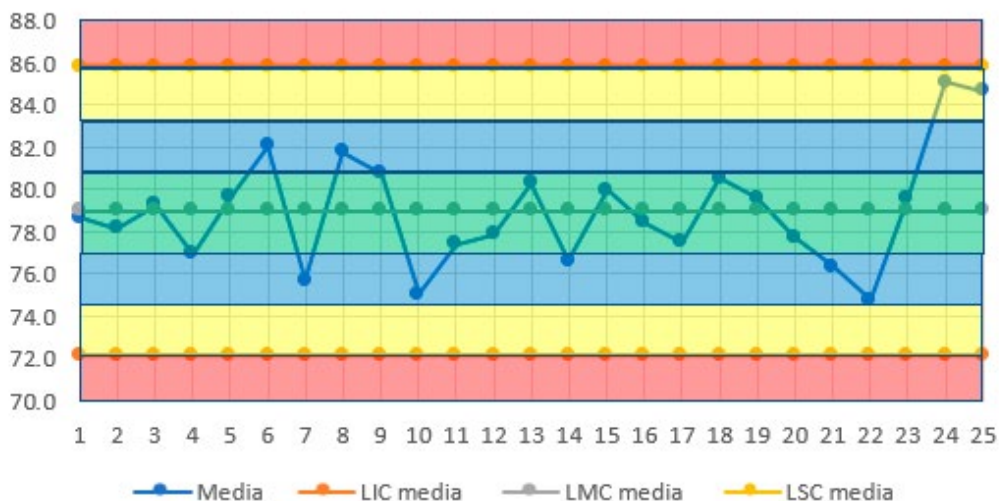
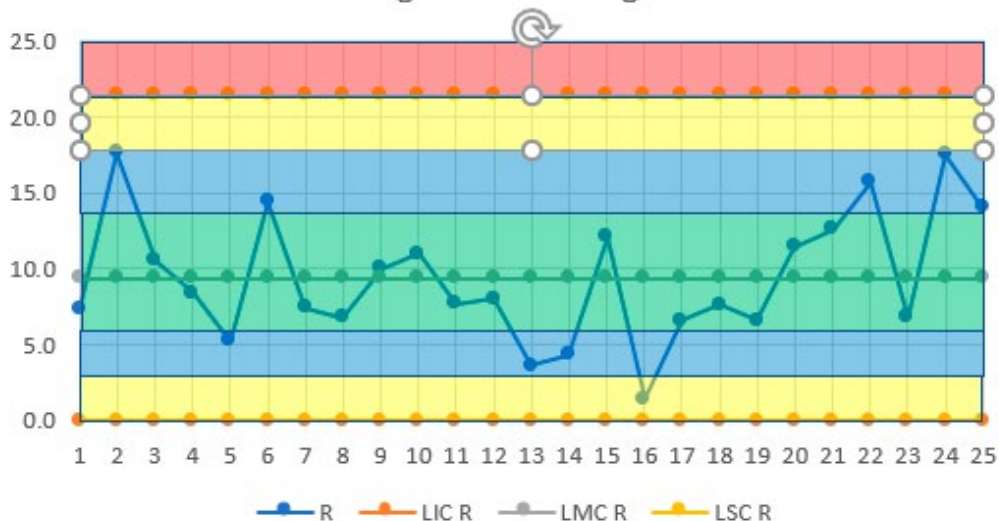


Diagrama de Rangos



- d. Estime cuál es la resistencia media del proceso y cuál su desviación estándar.

$$\hat{\mu}_x \approx \bar{x} = 79.0$$

$$\hat{\sigma} \approx \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{9.4}{2.059} = 4.5653$$

- e. Si las especificaciones establecen que la resistencia mecánica debe estar entre 72 y 88, calcule la capacidad o habilidad de proceso.

$$Cp = \frac{88 - 72}{6 * 4.5653} = 0.5854$$

$$Cpl = \frac{79 - 72}{3 * 4.5653} = 0.5111$$

$$Cpu = \frac{88 - 79}{3 * 4.5653} = 0.6571$$

$$Cpk = \min\{Cpl \text{ o } Cpu\} = 0.5111$$

$$\varepsilon = \frac{(80 - 79)}{4.5653} = 0.219$$

$$Cpm = \frac{0.5854}{\sqrt{1 + (0.219)^2}} = 0.5718$$

$$Cpkm = \frac{0.5111}{\sqrt{1 + (0.219)^2}} = 0.4993$$

El proceso no es capaz de cumplir especificaciones.

- f. Suponga que durante el proceso la media cambia de 79 a 85, manteniéndose la desviación estándar sin cambios. Calcule la probabilidad de que el diagrama detecte el cambio en la siguiente muestra. Estime la probabilidad de que no detecte el cambio en la primera muestra, ni en la segunda, pero sí en la tercera.

Recuerde que $\mu_x = \mu_x = 85.0$ y que $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{4.5653}{2} = 2.28265$

Probabilidad de NO detectarlo en la 1era. muestra=

$$p(\text{LIC} \leq \text{media} \leq \text{LSC}, \text{media} = 85, \text{Desv Est} = 4.5653/\sqrt{4}) =$$

$$p(72.134 \leq \text{media} \leq 85.81, \text{media} = 85, \text{Desv Est} = 4.5653/\sqrt{4}) = 0.63865$$

Probabilidad de detectarlo en la primera muestra= $0.36135 = 36.14\%$

Probabilidad de detectarlo hasta la tercera muestra= $(0.63865)^2(0.36135) = 0.14739 = 14.74\%$

- g.** Suponga que la desviación estándar cambia de 4.5653 a 6 manteniendo constante la media, ¿cuál es la probabilidad de que el diagrama detecte el cambio en la siguiente muestra?

En este caso, al cambiar la desviación estándar afecta al diagrama de control de medias y al diagrama de control de rangos, por lo que para no detectar cambios en la primera muestra, no debe detectarlo el diagrama de medias, ni tampoco el diagrama de rangos.

Probabilidad de NO detectarlo en la 1era. muestra=

$$[p(\text{LIC} \leq \text{media} \leq \text{LSC}, \text{media} = 79, \text{Desv Est} = 6/\sqrt{4})]^* [p(\text{LIC} \leq \text{rango} \leq \text{LSC}, \text{media} = 6*d_2, \text{Desv Est} = 6*d_3)] = [p(72.134 \leq \text{media} \leq 85.81, \text{media} = 79, \text{Desv Est} = 3)]^* [p(0 \leq \text{rango} \leq 21.4052, \text{media} = 6*2.059, \text{Desv Est} = 6*0.88)] = (0.97735)*(0.94711) = 0.92566$$

Probabilidad de detectarlo en la primera muestra= 0.07434

- h.** Suponga que la media cambia de 79 a 85 y la desviación estándar cambia de 4.5653 a 6, ¿cuál es la probabilidad de que el diagrama detecte el cambio en la siguiente muestra?

En este caso, al cambiar la media y la desviación estándar afecta al diagrama de control de medias y al diagrama de control de rangos, por lo que para no detectar cambios en la primera muestra, no debe detectarlo el diagrama de medias, ni tampoco el diagrama de rangos.

Probabilidad de NO detectarlo en la 1era. muestra=

$$[p(\text{LIC} \leq \text{media} \leq \text{LSC}, \text{media} = 85, \text{Desv Est} = 6/\sqrt{4})] * [p(\text{LIC} \leq \text{rango} \leq \text{LSC}, \text{media} = 6*d_2, \text{Desv Est} = 6*d_3)] = [p(72.134 \leq \text{media} \leq 85.81, \text{media} = 85, \text{Desv Est} = 3)] * [p(0 \leq \text{rango} \leq 21.4052, \text{media} = 6*2.059, \text{Desv Est} = 6*0.88)] = (0.60641)*(0.94711) = 0.57434$$

Probabilidad de detectarlo en la primera muestra= 0.42566

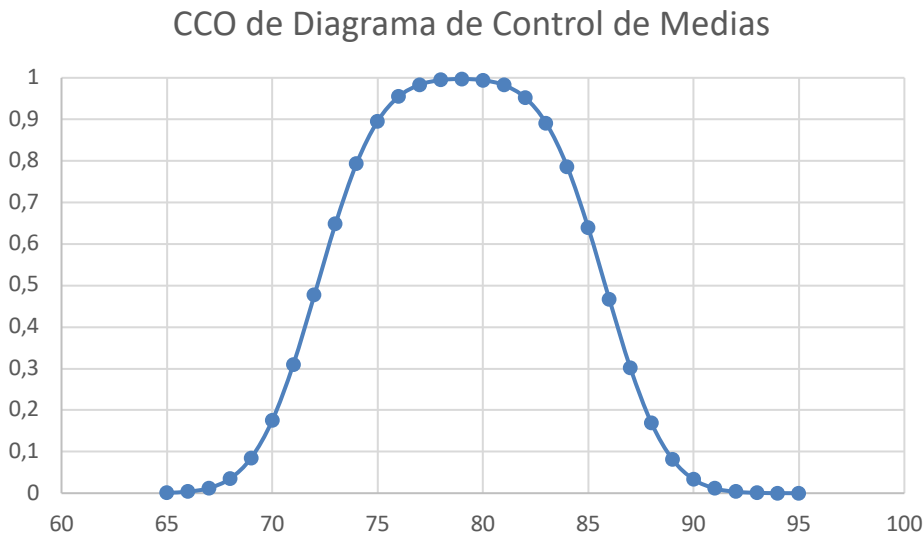
- i. Trace la curva característica de operación del diagrama de control estadístico, suponiendo que la media cambia, pero la desviación estándar se mantiene constante.

β = Probabilidad de NO detectar el cambio en la 1era. muestra=

$$p(\text{LIC} \leq \text{media} \leq \text{LSC}, \text{media} = \text{variable}, \text{Desv Est} = 4.5653/\sqrt{4}) = p(72.134 \leq \text{media} \leq 85.81, \text{media} = \text{variable}, \text{Desv Est} = 2.28265)$$

La Curva Característica de Operación del Diagrama de Control de Medias para una desviación estándar constante se muestra en la figura 101.

Figura 101. Curva característica de operación del diagrama de medias suponiendo desviación estándar constante.



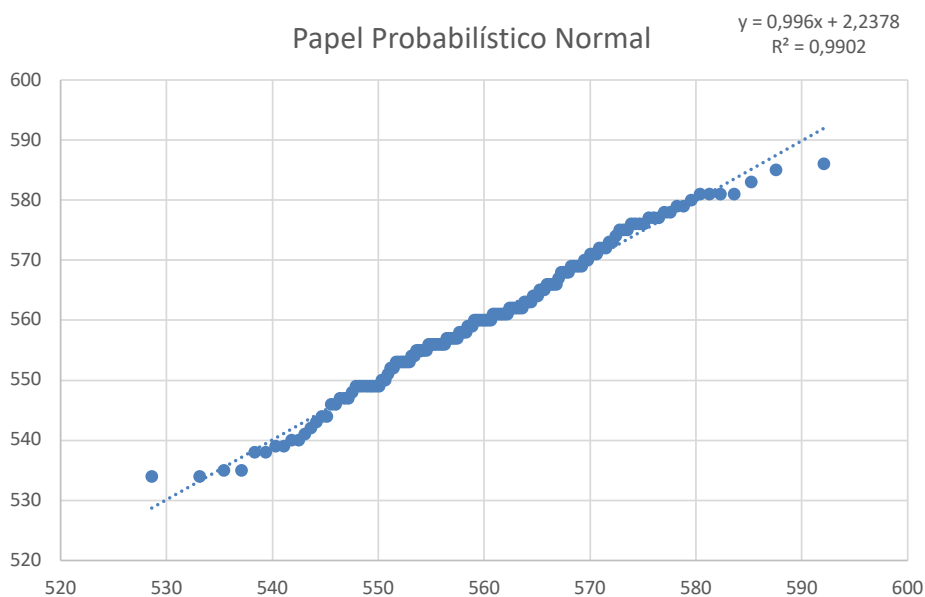
Ejemplo 15.3. Nestlé México elabora cereal la Lechera en cajas de cartón cuyo contenido neto debe pesar 570 gramos más o menos 10 gramos. Se pretende controlar estadísticamente el peso de las cajas de cereal con un diagrama de control por variables y para ello se toman muestras periódicas cada media hora, de tamaño $n=10$, obteniéndose los resultados que se muestran en la Tabla 52.

Tabla 53

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | x_{10} |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1 | 561 | 575 | 562 | 560 | 566 | 583 | 540 | 556 | 556 | 563 |
| 2 | 562 | 586 | 560 | 569 | 566 | 568 | 579 | 539 | 553 | 538 |
| 3 | 549 | 558 | 543 | 556 | 560 | 549 | 565 | 581 | 549 | 555 |
| 4 | 585 | 548 | 566 | 568 | 555 | 577 | 575 | 553 | 549 | 561 |
| 5 | 546 | 553 | 560 | 557 | 550 | 562 | 562 | 558 | 540 | 572 |
| 6 | 558 | 561 | 539 | 570 | 549 | 576 | 557 | 547 | 564 | 547 |
| 7 | 571 | 561 | 560 | 571 | 576 | 563 | 550 | 578 | 534 | 581 |
| 8 | 556 | 563 | 574 | 566 | 564 | 556 | 557 | 556 | 570 | 579 |
| 9 | 575 | 541 | 553 | 561 | 565 | 557 | 542 | 563 | 577 | 560 |
| 10 | 576 | 558 | 568 | 538 | 554 | 556 | 566 | 553 | 535 | 567 |
| 11 | 557 | 549 | 568 | 561 | 560 | 560 | 572 | 552 | 552 | 565 |
| 12 | 562 | 564 | 547 | 559 | 578 | 572 | 569 | 559 | 544 | 551 |
| 13 | 580 | 534 | 546 | 544 | 569 | 569 | 554 | 561 | 559 | 557 |
| 14 | 560 | 549 | 573 | 553 | 555 | 562 | 577 | 573 | 581 | 555 |
| 15 | 569 | 576 | 562 | 571 | 549 | 581 | 561 | 535 | 556 | 555 |

- a. Determine si el peso de las cajas de cereal presenta distribución normal, considerando todos los datos.

La figura 102 muestra el gráfico de papel probabilístico normal, en donde se comprueba que los datos si presentan distribución de probabilidad normal.



b. Explique qué diagrama de control aplicaría.

Como se puede apreciar en los datos, se trata de una característica de calidad por variables, con muestras periódicas constantes de tamaño $n=10$, por lo que lo más recomendable es usar un diagrama de control tipo \bar{x} -S.

c. Obtenga límites de control para el diagrama de control elegido en el inciso b.

Los factores necesarios para el cálculo de los límites de control para $n=10$, son:

$$A_3 = 0.975$$

$$c_4 = 0.9727$$

$$B_3 = 0.284$$

$$B_4 = 1.716$$

Con estos datos se forma la tabla para el cálculo de los límites de control que se muestra en la tabla 54.a y 54.b

Tabla 54.a

| Muestra | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | Media | Dev Est |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---------|
| 1 | 561 | 575 | 562 | 560 | 566 | 583 | 540 | 556 | 556 | 563 | 562.2 | 11.49 |
| 2 | 562 | 586 | 560 | 569 | 566 | 568 | 579 | 539 | 553 | 538 | 562 | 15.48 |
| 3 | 549 | 558 | 543 | 556 | 560 | 549 | 565 | 581 | 549 | 555 | 556.5 | 10.75 |
| 4 | 585 | 548 | 566 | 568 | 555 | 577 | 575 | 553 | 549 | 561 | 563.7 | 12.66 |
| 5 | 546 | 553 | 560 | 557 | 550 | 562 | 562 | 558 | 540 | 572 | 556 | 9.13 |
| 6 | 558 | 561 | 539 | 570 | 549 | 576 | 557 | 547 | 564 | 547 | 556.8 | 11.47 |
| 7 | 571 | 561 | 560 | 571 | 576 | 563 | 550 | 578 | 534 | 581 | 564.5 | 14.32 |
| 8 | 556 | 563 | 574 | 566 | 564 | 556 | 557 | 556 | 570 | 579 | 564.1 | 8.21 |
| 9 | 575 | 541 | 553 | 561 | 565 | 557 | 542 | 563 | 577 | 560 | 559.4 | 11.96 |
| 10 | 576 | 558 | 568 | 538 | 554 | 556 | 566 | 553 | 535 | 567 | 557.1 | 13.06 |
| 11 | 557 | 549 | 568 | 561 | 560 | 560 | 572 | 552 | 552 | 565 | 559.6 | 7.38 |
| 12 | 562 | 564 | 547 | 559 | 578 | 572 | 569 | 559 | 544 | 551 | 560.5 | 10.93 |
| 13 | 580 | 534 | 546 | 544 | 569 | 569 | 554 | 561 | 559 | 557 | 557.3 | 13.60 |
| 14 | 560 | 549 | 573 | 553 | 555 | 562 | 577 | 573 | 581 | 555 | 563.8 | 11.29 |
| 15 | 569 | 576 | 562 | 571 | 549 | 581 | 561 | 535 | 556 | 555 | 561.5 | 13.62 |

Tabla 54.b

| Muestra | Media | Dev Est | LIC media | LMC media | LSC media | LIC Dev Est | LMC Dev Est | LSC Dev Est |
|---------|--------|---------|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 562.2 | 11.49 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 2 | 562 | 15.48 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 3 | 556.5 | 10.75 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 4 | 563.7 | 12.66 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 5 | 556 | 9.13 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 6 | 556.8 | 11.47 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 7 | 564.5 | 14.32 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 8 | 564.1 | 8.21 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 9 | 559.4 | 11.96 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 10 | 557.1 | 13.06 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 11 | 559.6 | 7.38 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 12 | 560.5 | 10.93 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 13 | 557.3 | 13.60 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 14 | 563.8 | 11.29 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| 15 | 561.5 | 13.62 | 548.9 | 560.3 | 571.7 | 3.32 | 11.69 | 20.06 |
| Media= | 560.33 | 11.69 | | | | | | |

- d. Los diagramas X-S pueden ser trazados usando Minitab. Lo primero es ingresar los datos en la pantalla principal en una sola columna o en un solo renglón, capturando primero todas las lecturas de la primera muestra, luego todas las lecturas de la segunda muestra y así sucesivamente en riguroso orden.

Posteriormente, se elige el menú “Stats”, luego “Control Charts”, después “Variables Charts for Subgroups” y finalmente “Xbar-S”, como se muestra en la figura 103 apareciendo la pantalla que se muestra en la figura 104, en la cual se debe iluminar la única C1 que aparece y oprimir “Select”, posteriormente, en el combo que aparece arriba a la derecha seleccionar la opción “All observations for a chart are in one column:”. En la casilla que dice “Subgroup sizes:” se debe teclear el tamaño de cada muestra, diez en este caso; finalmente, se oprime “Ok”, obteniéndose la gráfica que aparece en la figura 105.

Figura 103

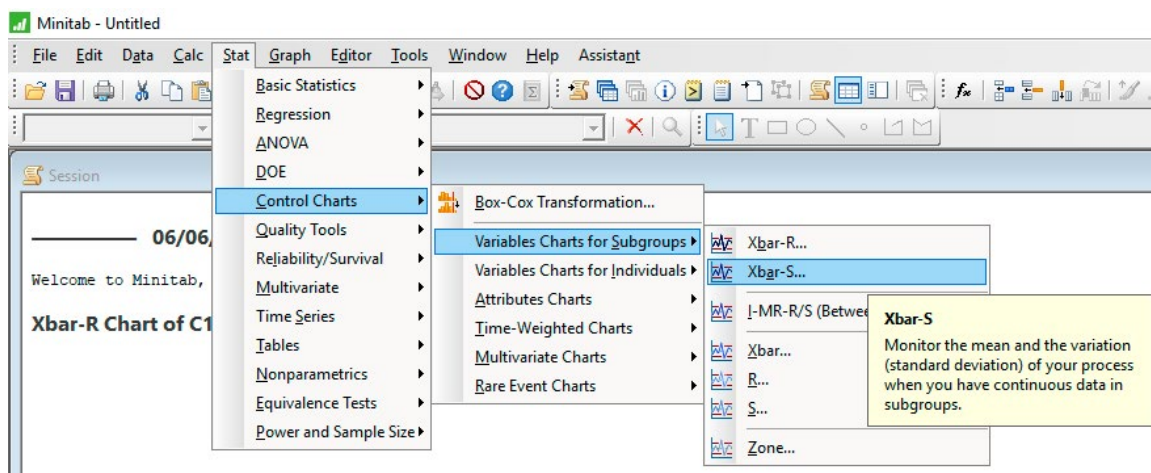


Figura 104

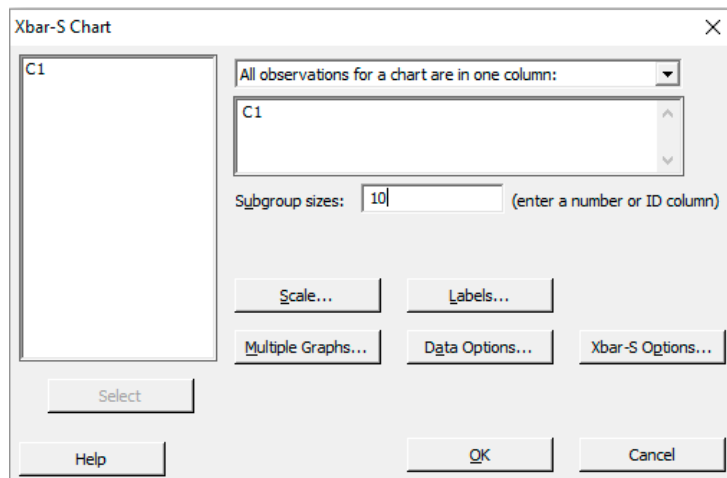
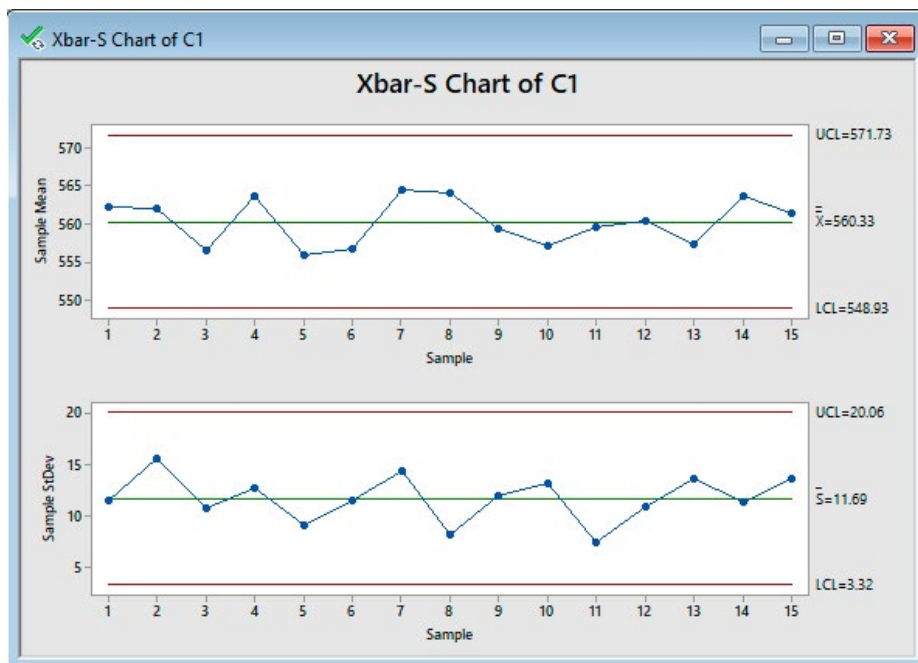


Figura 105



También puede usarse R para el trazo del diagrama de control de medias, tecleando las siguientes instrucciones:

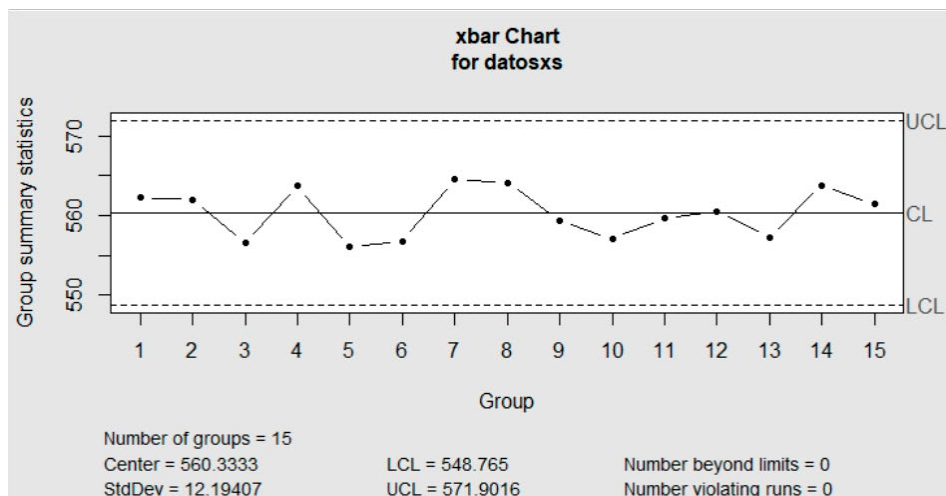
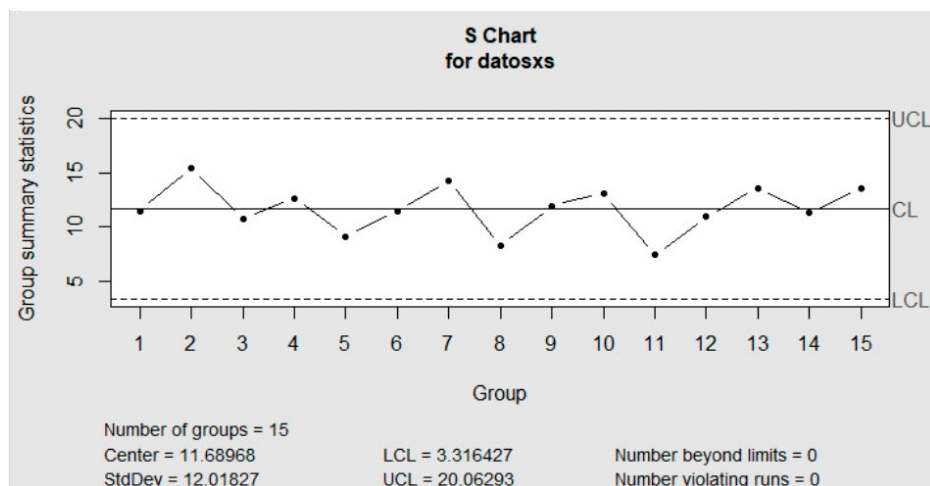
- » `library(qcc)`
- » `datosxs<-read.csv(file="DatosXS.csv",head=FALSE,sep=";",nrows=15)`
- » `qcc(datosxs,type="xbar",sizes=10)`

Obteniéndose el gráfico del diagrama de medias que se muestra en la figura 106.

De la misma forma, puede usarse R para el trazo del diagrama de control de desviaciones estándar, tecleando las siguientes instrucciones:

- » `library(qcc)`
- » `datosxs<-read.csv(file="DatosXS.csv",head=FALSE,sep=";",nrows=15)`
- » `qcc(datosxs,type="S",sizes=10)`

Obteniéndose el gráfico del diagrama de desviaciones estándar que se muestra en la figura 107.

Figura 106. Diagrama de Medias usando R

Figura 107. Diagrama de Desviaciones Estándar usando R


e. ¿Considera Usted que el proceso se encuentra bajo control?

Los diagramas de medias y rangos con la plantilla arcoíris, usando Excel, se muestran en la figura 108.

Nótese que ningún punto cae fuera de los límites de control, pero sí despierta suspicacia el hecho de que los datos tiendan a concentrarse en zona verde, lo cual implica falta de aleatoriedad. Este tipo de tendencias aparece cuando los datos son inventados y este es el caso.

Figura 108. Diagrama de Medias y Desviaciones Estándar usando Excel, con la plantilla arcoíris para interpretar el diagrama x-S.



f. Calcule la media y la desviación estándar de proceso.

$$\hat{\mu}_x \approx \bar{\bar{x}} = 560.33$$

$$\hat{\sigma} \approx \frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{11.69}{0.9727} = 12.018$$

g. Determine la capacidad o habilidad de proceso.

$$Cp = \frac{580 - 560}{6(12.018)} = 0.2774 < 1.33$$

$$Cpl = \frac{(560.33 - 560)}{3(12.018)} = 0.0092 < 1.33$$

$$Cpu = \frac{(580 - 560.33)}{3(12.018)} = 0.5456 < 1.33$$

$$Cpk = \min\{Cpl \text{ o } Cpu\} = 0.0092 < 1.33$$

$$\xi^2 = \frac{\hat{\mu}_x - D}{\hat{\sigma}_x} = \frac{11.986 - 12}{0.10748} = -0.8046$$

$$Cpm = \frac{Cp}{\sqrt{1 + \xi^2}} = 0.2161 < 1.33$$

$$Cpkm = \frac{Cpk}{\sqrt{1 + \xi^2}} = 0.0072 < 1.33$$

Como se puede apreciar, el proceso no es capaz de cumplir especificaciones.

h. Estime la fracción de cajas de cereal que no cumplen el mínimo especificado.

Se partirá del supuesto ya demostrado

$$x \sim N(\mu_x \approx 560.33, \sigma_x \approx 12.018)$$

$$P(x < LIE) = P(x < 560) = 0.489047$$

i. ¿Cuál es la primera acción que realizaría para mejorar el proceso y si lo hiciera cuánto mejoraría?

Centrar la media de proceso en la media de diseño; es decir, hacer que $\mu_x = 570$. La capacidad de proceso quedaría como:

$$Cpkm = Cpm = 0.2774$$

La fracción defectuosa quedaría como:

$$x \sim N(\mu_x \approx 570, \sigma_x \approx 12.018)$$

$$P(x < \text{LIE}) = p(x < 560) = 0.20268$$

El mejoramiento sería $(0.489047 - 0.20268) / 0.489047 = 0.585561 = 58.56\%$.

Ejemplo 15.4. El tiempo que tarda un operario en realizar una operación es una variable aleatoria de interés para reducir costos en un proceso productivo. Se midió el tiempo de operación de seis operarios durante 20 días, obteniéndose los resultados que se muestran en la Tabla 55.

Tabla 55. Tiempos de operación por trabajador

| Muestra | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 104.38 | 74.12 | 26.59 | 147.33 | | |
| 2 | 116 | 95.96 | 118.73 | 51.08 | | |
| 3 | 158.68 | 93.59 | 76.8 | 81.44 | | |
| 4 | 129.34 | 263.87 | 35.02 | 343.71 | | |
| 5 | 39.11 | 148.45 | 149.39 | 198.18 | | |
| 6 | 75.79 | 245.91 | 130.35 | 128.35 | 278.66 | |
| 7 | 66.15 | 59.29 | 215.34 | 186.86 | 383.72 | |
| 8 | 73.71 | 94.68 | 236.68 | 97.73 | 161.29 | |
| 9 | 92.9 | 85.38 | 62.67 | 170.3 | 113.85 | |
| 10 | 73.1 | 182.94 | 275.74 | 349.66 | 279.3 | |
| 11 | 221.35 | 227.33 | 211.36 | 150.64 | 367.1 | 75.25 |
| 12 | 91.21 | 187.2 | 229.08 | 391.74 | 56.81 | 207.02 |
| 13 | 379.18 | 279.86 | 74.58 | 181.5 | 231.2 | 187.17 |
| 14 | 312.11 | 119.23 | 207.43 | 111.02 | 540.46 | 250.54 |
| 15 | 49.51 | 424.5 | 50.08 | 29.53 | 107.69 | 129.58 |
| 16 | 48.96 | 41.54 | 154.82 | 278.64 | 108.77 | 117.2 |
| 17 | 344.44 | 78.94 | 146.36 | 94.13 | 208.99 | 65.37 |
| 18 | 90.8 | 115.55 | 190.85 | 293.12 | 88.37 | 88.23 |
| 19 | 379.2 | 90.46 | 321.29 | 225.09 | 201.49 | 120.36 |
| 20 | 114.11 | 65.74 | 119.61 | 180.68 | 157.27 | 168.4 |

Los tiempos de operación generalmente no se comportan con distribución normal, generalmente obedecen a una distribución exponencial negativa; conviene analizar previamente el comportamiento probabilístico de los datos. Primero se obtiene una estadística descriptiva de estos. Se utilizará para ello Excel, obteniéndose los resultados que se muestran en la Tabla 56.

Tabla 56

| Estadísticos de las muestras de Tiempos de Operación | |
|--|-----------|
| Media | 165.26 |
| Error típico | 10.06 |
| Mediana | 130.35 |
| Moda | #N/A |
| Desviación estándar | 103.13 |
| Varianza de la muestra | 10,635.26 |
| Curtosis | 0.93 |
| Coefficiente de asimetría | 1.08 |
| Rango | 513.87 |
| Mínimo | 26.59 |
| Máximo | 540.46 |
| Suma | 17352.16 |
| Cuenta | 105 |

Se usará R para probar la hipótesis nula de que los datos tienen distribución normal, a través de las siguientes instrucciones:

```
library(qcc)
```

```
x<-
```

```
c(104.38,116,158.68,129.34,39.11,75.79,66.15,73.71,92.9,73.1,221.35,91.21,379.18,
312.11,49.51,48.96,344.44,90.8,379.2,114.11,74.12,95.96,93.59,263.87,148.45,
245.91,59.29,94.68,85.38,182.94,227.33,187.2,279.86,119.23,424.5,41.54,78.94,
115.55,90.46,65.74,26.59,118.73,76.8,35.02,149.39,130.35,215.34,236.68,62.67,
275.74,211.36,229.08,74.58,207.43,50.08,154.82,146.36,190.85,321.29,119.61,
147.33,51.08,81.44,343.71,198.18,128.35,186.86,97.73,170.3,349.66,150.64,391.74,
181.5,111.02,29.53,278.64,94.13,293.12,225.09,180.68,278.66,383.72,161.29,113.85,
279.3,367.1,56.81,231.2,540.46,107.69,108.77,208.99,88.37,201.49,157.27,75.25,
207.02,187.17,250.54,129.58,117.2,65.37,88.23,120.36,168.4)
```

```
require(nortest)
ad.test(x)$p.value
cvm.test(x)$p.value
lillie.test(x)$p.value
pearson.test(x)$p.value
sf.test(x)$p.value
```

Los resultados se muestran a continuación.

Pruebas de Normalidad usando R

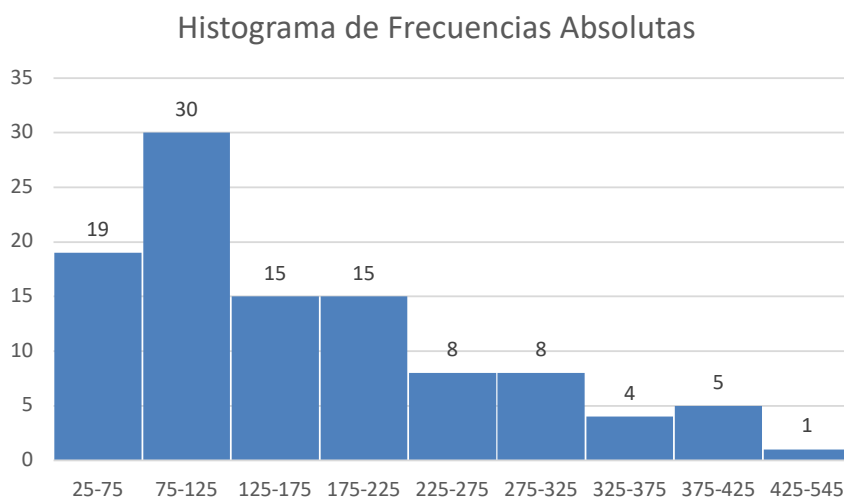
```
> library(qcc)
> x<-c(104.38,116,158.68,129.34,39.11,75.79,66.15,73.71,92.9,73.1,221.35,91.21,379.18,312.
11,49.51,48.96,344.44,90.8,379.2,114.11,74.12,95.96,93.59,263.87,148.45,245.91,59.29,94.68
,85.38,182.94,227.33,187.2,279.86,119.23,424.5,41.54,78.94,115.55,90.46,65.74,26.59,118.73
,76.8,35.02,149.39,130.35,215.34,236.68,62.67,275.74,211.36,229.08,74.58,207.43,50.08,154.
82,146.36,190.85,321.29,119.61,147.33,51.08,81.44,343.71,198.18,128.35,186.86,97.73,170.3,
349.66,150.64,391.74,181.5,111.02,29.53,278.64,94.13,293.12,225.09,180.68,278.66,383.72,16
1.29,113.85,279.3,367.1,56.81,231.2,540.46,107.69,108.77,208.99,88.37,201.49,157.27,75.25,
207.02,187.17,250.54,129.58,117.2,65.37,88.23,120.36,168.4)
> require(nortest)
> ad.test(x)$p.value
[1] 5.988806e-07
> cvm.test(x)$p.value
[1] 8.175925e-06
> lillie.test(x)$p.value
[1] 4.613672e-05
> pearson.test(x)$p.value
[1] 0.0009137234
> sf.test(x)$p.value
[1] 1.260738e-05
```

Nótese que en todos los modelos de prueba de bondad de ajuste la p es mucho menor que α , por lo que se rechaza que los datos presenten distribución normal.

Observe el histograma de frecuencias absolutas de la tabla 57 en la figura 109, donde no se percibe que los datos tengan distribución normal.

Tabla 57

| Lim Inf | Lim Sup | Marca_Clase | Frec Acum | Frec Obs |
|---------|---------|-------------|-----------|----------|
| 25 | 75 | 50 | 19 | 19 |
| 75 | 125 | 100 | 49 | 30 |
| 125 | 175 | 150 | 64 | 15 |
| 175 | 225 | 200 | 79 | 15 |
| 225 | 275 | 250 | 87 | 8 |
| 275 | 325 | 300 | 95 | 8 |
| 325 | 375 | 350 | 99 | 4 |
| 375 | 425 | 400 | 104 | 5 |
| 425 | 545 | 485 | 105 | 1 |

Figura 109


Otro problema que se presenta en esta colección de datos es que los tamaños de muestra no son constantes, esto hace variar a los límites de control, ya que hay muestras con tamaño $n=4$, otras con $n=5$ y otras con $n=6$.

Dado que los tamaños de muestra no son constantes, se sugiere utilizar un diagrama de control \bar{x} -R estandarizado, pero se plantearán las tres posibles respuestas, con límites variables, con n promedio y con el diagrama estandarizado.

De la tabla 39, se obtienen los factores necesarios para realizar los cálculos de los límites de control, los cuales se muestran en la tabla 58.

Tabla 58

| n | d_2 | d_3 | A_2 | D_3 | D_4 |
|---|-------|-------|--------|-------|---------|
| 4 | 2.059 | 0.88 | 0.7285 | 0 | 2.28218 |
| 5 | 2.326 | 0.864 | 0.5768 | 0 | 2.11436 |
| 6 | 2.534 | 0.848 | 0.4833 | 0 | 2.00395 |

Con estos datos se obtiene la media y la desviación estándar de cada muestra y se conforma la tabla 59.

Figura 59

| Muestra | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | Media | Rango |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 104.38 | 74.12 | 26.59 | 147.33 | | | 88.11 | 120.74 |
| 2 | 116 | 95.96 | 118.73 | 51.08 | | | 95.44 | 67.65 |
| 3 | 158.68 | 93.59 | 76.8 | 81.44 | | | 102.63 | 81.88 |
| 4 | 129.34 | 263.87 | 35.02 | 343.71 | | | 192.99 | 308.69 |
| 5 | 39.11 | 148.45 | 149.39 | 198.18 | | | 133.78 | 159.07 |
| 6 | 75.79 | 245.91 | 130.35 | 128.35 | 278.66 | | 171.81 | 202.87 |
| 7 | 66.15 | 59.29 | 215.34 | 186.86 | 383.72 | | 182.27 | 324.43 |
| 8 | 73.71 | 94.68 | 236.68 | 97.73 | 161.29 | | 132.82 | 162.97 |
| 9 | 92.9 | 85.38 | 62.67 | 170.3 | 113.85 | | 105.02 | 107.63 |
| 10 | 73.1 | 182.94 | 275.74 | 349.66 | 279.3 | | 232.15 | 276.56 |
| 11 | 221.35 | 227.33 | 211.36 | 150.64 | 367.1 | 75.25 | 208.84 | 291.85 |
| 12 | 91.21 | 187.2 | 229.08 | 391.74 | 56.81 | 207.02 | 193.84 | 334.93 |
| 13 | 379.18 | 279.86 | 74.58 | 181.5 | 231.2 | 187.17 | 222.25 | 304.60 |
| 14 | 312.11 | 119.23 | 207.43 | 111.02 | 540.46 | 250.54 | 256.80 | 429.44 |
| 15 | 49.51 | 424.5 | 50.08 | 29.53 | 107.69 | 129.58 | 131.82 | 394.97 |
| 16 | 48.96 | 41.54 | 154.82 | 278.64 | 108.77 | 117.2 | 124.99 | 237.10 |
| 17 | 344.44 | 78.94 | 146.36 | 94.13 | 208.99 | 65.37 | 156.37 | 279.07 |
| 18 | 90.8 | 115.55 | 190.85 | 293.12 | 88.37 | 88.23 | 144.49 | 204.89 |
| 19 | 379.2 | 90.46 | 321.29 | 225.09 | 201.49 | 120.36 | 222.98 | 288.74 |
| 20 | 114.11 | 65.74 | 119.61 | 180.68 | 157.27 | 168.4 | 134.30 | 114.94 |

Con la tabla anterior se conforma la tabla 60.

Tabla 60

| Muestra | Media | Rango | LIC media | LMC media | LSC media | LIC rango | LMC rango | LSC rango |
|---------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 88.11 | 120.74 | 0 | 161.68 | 332.63 | 0 | 234.65 | 535.52 |
| 2 | 95.44 | 67.65 | 0 | 161.68 | 332.63 | 0 | 234.65 | 535.52 |
| 3 | 102.63 | 81.88 | 0 | 161.68 | 332.63 | 0 | 234.65 | 535.52 |
| 4 | 192.99 | 308.69 | 0 | 161.68 | 332.63 | 0 | 234.65 | 535.52 |
| 5 | 133.78 | 159.07 | 0 | 161.68 | 332.63 | 0 | 234.65 | 535.52 |
| 6 | 171.81 | 202.87 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 7 | 182.27 | 324.43 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 8 | 132.82 | 162.97 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 9 | 105.02 | 107.63 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 10 | 232.15 | 276.56 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 11 | 208.84 | 291.85 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 12 | 193.84 | 334.93 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 13 | 222.25 | 304.60 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 14 | 256.80 | 429.44 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 15 | 131.82 | 394.97 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 16 | 124.99 | 237.10 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 17 | 156.37 | 279.07 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 18 | 144.49 | 204.89 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 19 | 222.98 | 288.74 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| 20 | 134.30 | 114.94 | 48.28 | 161.68 | 275.09 | 0 | 234.65 | 470.23 |
| Media= | 161.68 | 234.65 | | | | | | |

Y con la tabla 60 se traza el diagrama x-R con límites variables que se muestran en la figura 110.

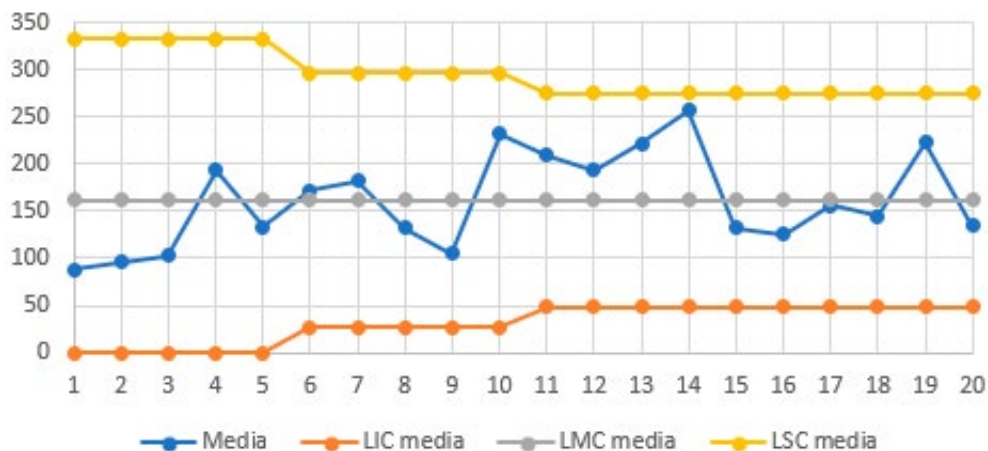
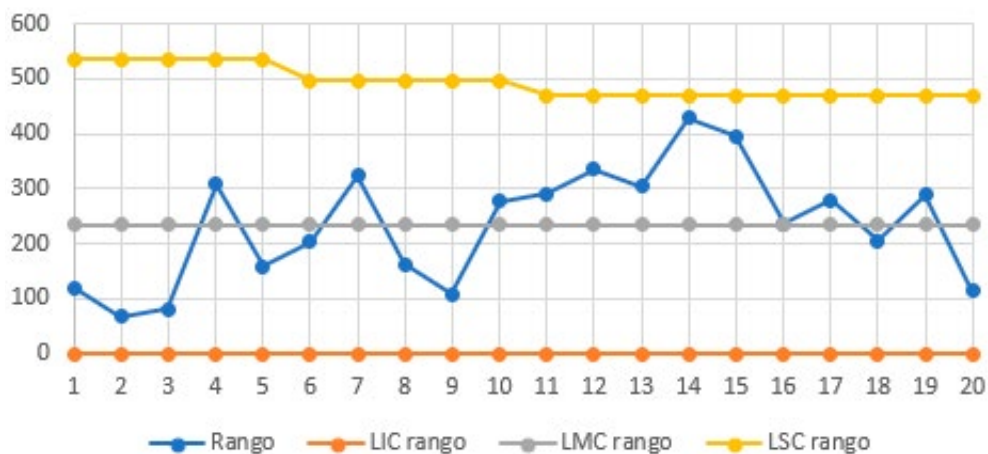
Figura 110
Diagrama de control de medias con límites variables


Diagrama de control de rangos con límites variables



Ahora se considerará el caso de tomar una n promedio, como se muestra en la tabla 61.

El diagrama de control x - R con n promedio se muestra en la figura 111.

Finalmente se considera el caso de estandarizar el diagrama x - R . Los datos necesarios se muestran en la tabla 62.

El Diagrama x - R Estandarizado se muestra en la figura 112.

Un Diagrama de Control Estandarizado tiene diversas ventajas comparado con los diagramas de control comunes. En primer lugar, no se requiere calcular los límites, estos siempre van a ser los mismos: $LIC = -3$, $LMC = 0$ y $LSC = 3$. La segunda ventaja es que como los límites siempre son los mismos, se pueden graficar varios diagramas dentro de un mismo gráfico. La tercera ventaja es que se pueden interpretar directamente por la plantilla arcoíris debido a que sus colores siempre son los mismos, con un ancho de una unidad, como se aprecia en la figura 113.

Tabla 62

| Muestra | Media | Rango | ni | LIC media | LMC media | LSC media | LIC rango | LMC rango | LSC rango |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 88.11 | 120.74 | 4 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 2 | 95.44 | 67.65 | 4 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 3 | 102.63 | 81.88 | 4 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 4 | 192.99 | 308.69 | 4 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 5 | 133.78 | 159.07 | 4 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 6 | 171.81 | 202.87 | 5 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 7 | 182.27 | 324.43 | 5 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 8 | 132.82 | 162.97 | 5 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 9 | 105.02 | 107.63 | 5 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 10 | 232.15 | 276.56 | 5 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 11 | 208.84 | 291.85 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 12 | 193.84 | 334.93 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 13 | 222.25 | 304.60 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 14 | 256.80 | 429.44 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 15 | 131.82 | 394.97 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 16 | 124.99 | 237.10 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 17 | 156.37 | 279.07 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 18 | 144.49 | 204.89 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 19 | 222.98 | 288.74 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| 20 | 134.30 | 114.94 | 6 | 26.34 | 161.68 | 297.03 | 0 | 234.65 | 496.14 |
| Media= | 161.68 | 234.65 | 5.25 | | | | | | |
| n | d ₂ | d ₃ | A ₂ | D ₃ | D ₄ | | | | |
| 5 | 2.326 | 0.864 | 0.5768 | 0 | 2.11436 | | | | |

Figura 112

Diagrama de medias con n promedio

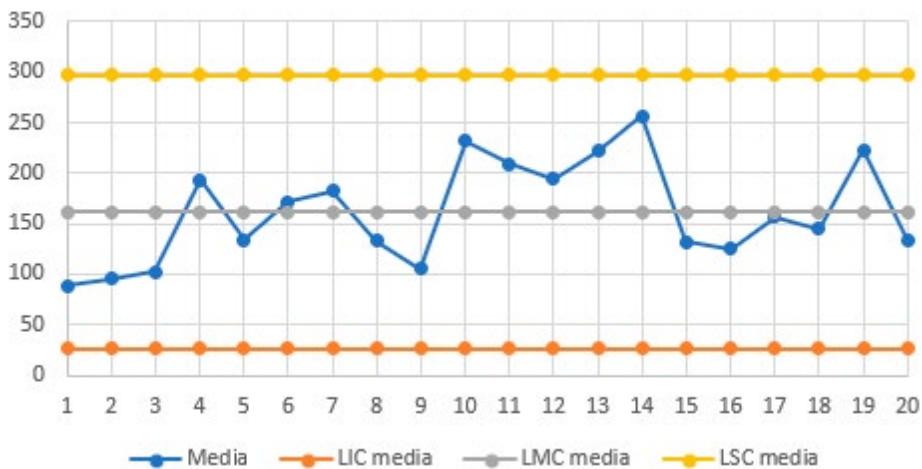


Diagrama de rangos con n promedio

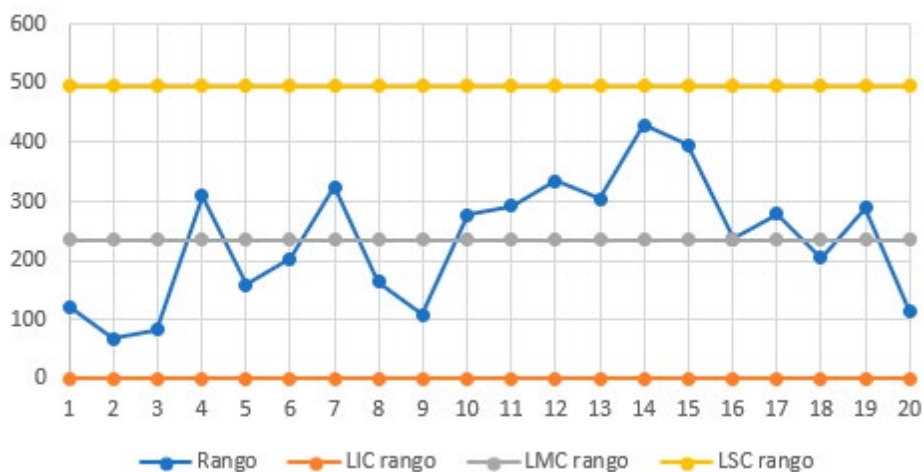
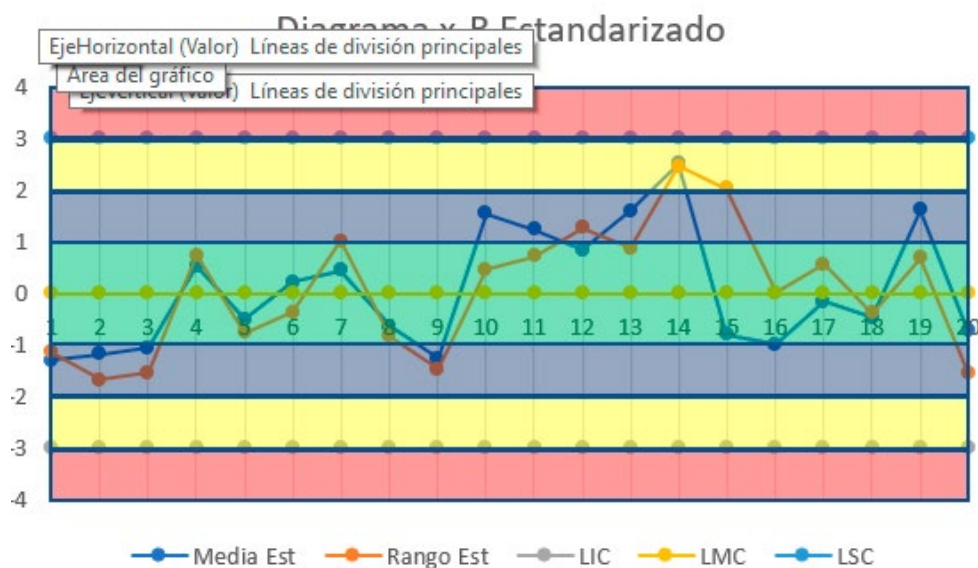


Tabla 63

| Muestra | Media | Media Est | Rango | Rango Est | ni | LIC | LMC | LSC |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|------|------|
| 1 | 88.11 | -1.29 | 120.74 | -1.14 | 4 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 2 | 95.44 | -1.16 | 67.65 | -1.67 | 4 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 3 | 102.63 | -1.04 | 81.88 | -1.52 | 4 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 4 | 192.99 | 0.55 | 308.69 | 0.74 | 4 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 5 | 133.78 | -0.49 | 159.07 | -0.75 | 4 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 6 | 171.81 | 0.22 | 202.87 | -0.36 | 5 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 7 | 182.27 | 0.46 | 324.43 | 1.03 | 5 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 8 | 132.82 | -0.64 | 162.97 | -0.82 | 5 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 9 | 105.02 | -1.26 | 107.63 | -1.46 | 5 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 10 | 232.15 | 1.56 | 276.56 | 0.48 | 5 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 11 | 208.84 | 1.25 | 291.85 | 0.73 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 12 | 193.84 | 0.85 | 334.93 | 1.28 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 13 | 222.25 | 1.60 | 304.60 | 0.89 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 14 | 256.80 | 2.52 | 429.44 | 2.48 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 15 | 131.82 | -0.79 | 394.97 | 2.04 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 16 | 124.99 | -0.97 | 237.10 | 0.03 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 17 | 156.37 | -0.14 | 279.07 | 0.57 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 18 | 144.49 | -0.45 | 204.89 | -0.38 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 19 | 222.98 | 1.62 | 288.74 | 0.69 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| 20 | 134.30 | -0.72 | 114.94 | -1.52 | 6 | -3.00 | 0.00 | 3.00 |
| Media= | 161.68 | | 234.65 | | | | | |
| n | d ₂ | d ₃ | A ₂ | D ₃ | D ₄ | | | |
| 4 | 2.059 | 0.88 | 0.7285 | 0 | 2.28218 | | | |
| 5 | 2.326 | 0.864 | 0.5768 | 0 | 2.11436 | | | |
| 6 | 2.534 | 0.848 | 0.4833 | 0 | 2.00395 | | | |

Figura 113



Para interpretar el diagrama de la figura 113 se deben aplicar las siguientes reglas:

El proceso está fuera de control cuando un punto o más del gráfico de medias estandarizado o del gráfico de rangos estandarizados cae en zona roja. También se dice que está fuera de control cuando se detecta que no hay aleatoriedad en los datos. Dos de tres puntos sucesivos en zona amarilla, de ambos gráficos, el gráfico arcoíris lo marca como falta de aleatoriedad como puede ser el caso de las muestras 13, 14 y 15 del gráfico de rangos estandarizados de la figura 113, habrá que analizar este repentino crecimiento. Cuatro de cinco puntos sucesivos en zona azul, o siete de ocho puntos sucesivos en zona verde se consideran no aleatorios.

Existen otro tipo de diagramas de control igualmente útiles o complementarios a los anteriores que se describirán a continuación, entre ellos se pueden citar:

1. Diagrama de varianza S^2 .
2. Diagrama de control de lecturas individuales y de rangos móviles X-MR.
3. Diagrama CuSum.
4. Diagrama de medias móviles exponencialmente ponderadas EWMA.
5. Diagramas g y h.

Cabe señalar que es muy loable y habla del desarrollo acelerado de la ciencia, el hecho de que se inventen nuevos diagramas de control estadístico de procesos; sin embargo, en la práctica profesional, la sencillez con la que se calculan los límites de control estadístico de calidad de procesos tradicionales de Shewhart y su fácil interpretación son insustituibles en comparación con los diagramas de control estadístico más modernos, como lo son los gráficos CUSUM, los EWMA y los diagramas g y h que se describirán a continuación. Cabe recordar que en la práctica profesional el diseño del control estadístico más adecuado le corresponde a un ingeniero o a algún profesional de la estadística industrial; sin embargo, una vez diseñados, quienes los aplican y recaban la información, son técnicos sin estudios profesionales, para los cuales son mejores los diagramas más simples y comunes, los tradicionales de Shewhart. Con el avance en las tecnologías de la información ese enfoque se ha ido matizando, aun así, las herramientas que se apliquen en los procesos industriales se deben mantener lo más simples y comunes posibles.

16.1. Diagrama de Varianza S²

Este tipo de diagrama se desprende directamente del tema 6 Intervalos de Confianza, de este volumen, en el cual, específicamente en la tabla 9 de la página 41 se señala un intervalo de confianza para la varianza poblacional, en función de la varianza muestral, dado por:

$$\frac{(n-1)S_{(n-1)}^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)S_{(n-1)}^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2} \quad \text{Para N infinito} \quad \dots (112)$$

$$\frac{(n-1)S_{(n-1)}^2 \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)S_{(n-1)}^2 \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2} \quad \text{Para N finito} \quad \dots (113)$$

De estas ecuaciones se despeja S² obteniéndose el intervalo de control.

$$\frac{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}{(n-1)} \sigma_x^2 \leq S_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}{(n-1)} \sigma_x^2 \quad \text{Para N infinito} \quad \dots (114)$$

$$\frac{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}{(n-1)} \left(\frac{N-1}{N-n}\right) \sigma_x^2 \leq S_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}^2}{(n-1)} \left(\frac{N-1}{N-n}\right) \sigma_x^2 \quad \text{Para N finito} \quad \dots (115)$$

En donde la desviación estándar poblacional se estimará con la media de las desviaciones estándar de las muestras obtenidas, o mejor aún, con las expresiones 93 y 98:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (116)$$

$$\hat{\sigma}_2 \approx \frac{\bar{S}_{(n-1)}}{c_4}$$

Para ejemplificar la aplicación de este diagrama, se obtendrá el Diagrama S² para el ejemplo 15.3 de la página 180 y se compararán los resultados con el diagrama S obtenido en el ejercicio 15.3.

Ejemplo 16.1. Nestlé México elabora cereal la Lechera en cajas de cartón cuyo contenido neto debe pesar 570 gramos más o menos 10 gramos. Se toman muestras periódicas cada media hora, de tamaño $n=10$, obteniéndose los resultados que se muestran en la Tabla 53 de la página 180. Obtenga un diagrama de control estadístico de proceso de la varianza.

Se supondrá que el proceso es continuo por lo que N se tomará como infinito.

Los valores de la ji-cuadrada se tomarán a un nivel de confianza de 99.73%

Por lo que empleando Excel se obtienen:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.99865, 9} = 21.3082$$

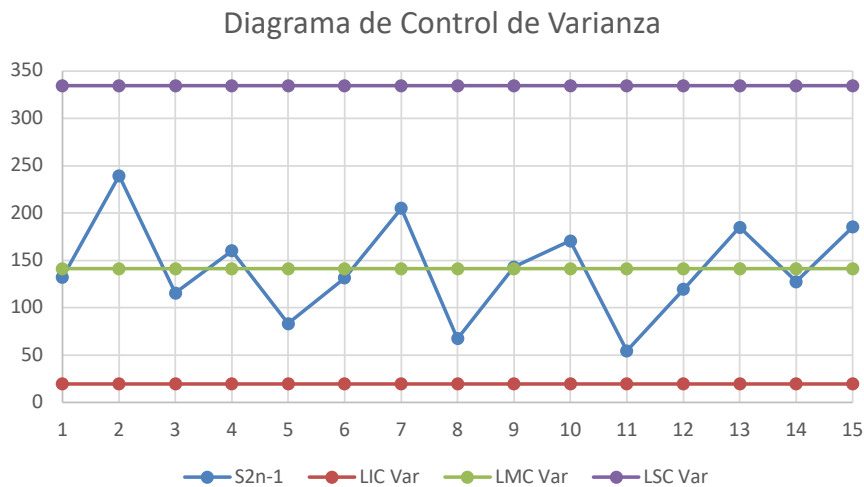
$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.01135, 9} = 1.24125$$

La tabla para proceder al trazo del diagrama de control se muestra en la tabla 53 de la página 180. A partir de ésta se obtiene la tabla 64 que se muestra a continuación.

Tabla 64. Límites de control para la varianza muestral

| Muestra | S^2_{n-1} | LIC Var | LMC Var | LSC Var |
|---------|-------------|---------|---------|---------|
| 1 | 131.9556 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 2 | 239.5556 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 3 | 115.6111 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 4 | 160.2333 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 5 | 83.3333 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 6 | 131.5111 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 7 | 205.1667 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 8 | 67.4333 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 9 | 143.1556 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 10 | 170.5444 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 11 | 54.4889 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 12 | 119.3889 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 13 | 184.9000 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 14 | 127.5111 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |
| 15 | 185.3889 | 19.49 | 141.35 | 334.65 |

El Diagrama de Control de S^2 se muestra en la figura 114.

Figura 114


Para proceder a comparar el diagrama de desviaciones estándar obtenido en el problema 15.3, mostrado en las figuras 105 de la página 183, 107 de la página 184 y 108 de la página 185, con el obtenido arriba mostrado en la figura 114, a los datos de la tabla 64 se le saca la raíz cuadrada, obteniéndose la tabla 65.

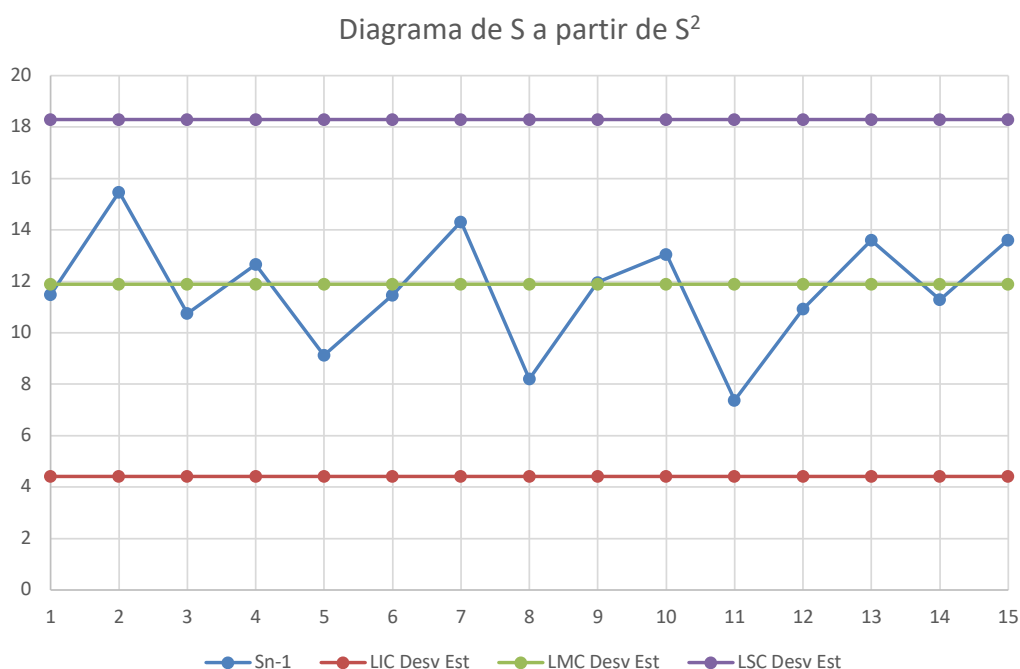
Tabla 65. Obtenida de la raíz cuadrada de los datos de la tabla 64

| Muestra | S _{n-1} | LIC Desv Est | LMC Desv Est | LSC Desv Est |
|---------|------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 11.4872 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 2 | 15.4776 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 3 | 10.7523 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 4 | 12.6583 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 5 | 9.1287 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 6 | 11.4678 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 7 | 14.3236 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 8 | 8.2118 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 9 | 11.9648 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 10 | 13.0593 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 11 | 7.3817 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 12 | 10.9265 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 13 | 13.5978 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 14 | 11.2921 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |
| 15 | 13.6158 | 4.4152 | 11.8889 | 18.2933 |

Con estos datos se grafica el diagrama de control de la desviación estándar que se muestra en la figura 115.

Se puede apreciar que el diagrama mostrado en las figuras 105 de la página 183, 107 de la página 184 y 108 de la página 185, coincide con el diagrama de la figura 115, aunque los límites de control de ambos diagramas son diferentes. Para el de las figuras 105 de la página 184, 107 de la página 184 y 108 de la página 185, los límites son LIC= 3.32, LMC=11.8889 y LSC=20.6; en cambio, los de la última figura son LIC=4.42, LMC=11.89 y LSC=18.29; los límites del diagrama de la figura 115 son más estrechos debido a que la aproximación de la distribución Ji-cuadrada se ajusta mejor que la normal.

Figura 115



16.2. Diagrama de Lecturas Individuales y de Rangos Móviles

Los diagramas de control estadístico de procesos por variables, como X-R o X-S, pueden verse enriquecidos si se acompañan de un diagrama de control estadístico de proceso de lecturas individuales, el cual se refiere a graficar las lecturas individuales, es decir, considerar un tamaño de muestra $n=1$. Elaborar un diagrama de lecturas individuales puede permitir comparar los valores reales obtenidos en las muestras, con los valores especificados en alguna norma, plano o especificación. Ya se ha mencionado que el diagrama es una especie de mecanismo de detección que avisa cuando el proceso cambia con respecto al comportamiento histórico, pero que no permite saber si el proceso cumple o no cumple especificaciones, para lo cual es necesario elaborar un análisis de capacidad o habilidad de proceso.

Al diagrama de lecturas individuales tradicionalmente se le presenta junto con un diagrama de rangos móviles, los cuales se explican a continuación.

Sean dos lecturas consecutivas de un proceso, x_{i-1} y x_i ; el rango móvil de ambas lecturas, RM_i , se calcula como la diferencia en valor absoluto entre ellas:

$$RM_i = |x_i - x_{i-1}| \quad \dots (117)$$

Los límites de control para el diagrama de control de lecturas individuales se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} LIC(x) &= \bar{x} - 3 \frac{(\overline{RM})}{d_2} \\ LMC(x) &= \bar{x} \\ LSC(x) &= \bar{x} + 3 \frac{(\overline{RM})}{d_2} \end{aligned} \quad \dots (118)$$

En donde \overline{RM} representa el promedio de los rangos móviles de las lecturas individuales sucesivas.

Los límites de control para el diagrama de rangos móviles se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 LIC(RM) &= D_3(\overline{RM}) \\
 LMC(RM) &= \overline{RM} \\
 LSC(RM) &= D_4(\overline{RM})
 \end{aligned}
 \quad \dots (119)$$

La media y la desviación estándar se estiman con las siguientes expresiones:

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad \dots (120)$$

$$\hat{\sigma}_{x_1} = \frac{\overline{RM}}{d_2} \quad \dots (121)$$

$$\hat{\sigma}_{x_2} = \frac{\overline{S}}{c_4}$$

$$\hat{\sigma}_{x_3} = \frac{\overline{RM}}{d_4}$$

Observe que para estimar la desviación estándar entre subgrupos racionales se pueden usar tres estimadores puntuales diferentes.

Ejemplo 16.2. La compañía Nestlé tiene un producto insignia denominado Nespresso, el cual consiste en cápsulas de diversas variedades de café con una carga especificada de 5.5 ± 0.25 gramos cada una. El proceso de manufactura es continuo y el proceso de control estadístico se lleva a cabo considerando un diagrama de control de lecturas individuales y de rangos móviles. En la tabla 66 se muestran 20 lecturas tomadas durante cierto período de tiempo. Obtenga un diagrama de control estadístico de proceso de lecturas individuales y de rangos móviles.

Para calcular RM en la casilla C3= $\text{abs}(\$B3-\$B2)$

El promedio de valores de la carga se encuentra en la casilla $\$B\21

El promedio de valores de rangos móviles se encuentra en la casilla $\$C\21

Para calcular LIC carga en la casilla $D2= \$B\$21-3*\$C\$21/1.128$

Para calcular LMC carga en la casilla $E2= \$B\21

Para calcular LSC carga en la casilla $F2= \$B\$21+3*\$C\$21/1.128$

El Límite Inferior de Especificación LIE en la casilla $G2= 5.25$

El Límite Medio de Especificación LME en la casilla $H2= 5.5$

El Límite Superior de Especificación LSE en la casilla $I2= 5.75$

Para calcular el LIC RM en la casilla $J2= (0)(\$C\$21)= 0$

Para calcular el LMC RM en la casilla $K2= (\$C\$21)$

Para calcular el LSC RM en la casilla $L2= (3.267)(\$C\$21)$

Con los datos de la tabla 67, se trazan los diagramas de control de lecturas individuales, que se muestra en la figura 116, y el diagrama de control de rangos móviles, que se muestra en la figura 117.

En el diagrama de control de lecturas individuales se agregaron los límites de especificación, nótese que las lecturas reales obtenidas, en general, están un poco debajo de lo especificado, lo cual implica un decaimiento de la capacidad de proceso. Convendrá hacer un estudio de dicha capacidad.

Con relación al diagrama de control de rangos móviles que se muestra en la figura 117, los 10 puntos, desde la muestra 3 hasta la muestra 12, van alternadamente uno arriba, otro abajo, lo cual refleja un patrón de no aleatoriedad que habrá que investigar la razón.

Figura 116. Diagrama de control de lecturas individuales

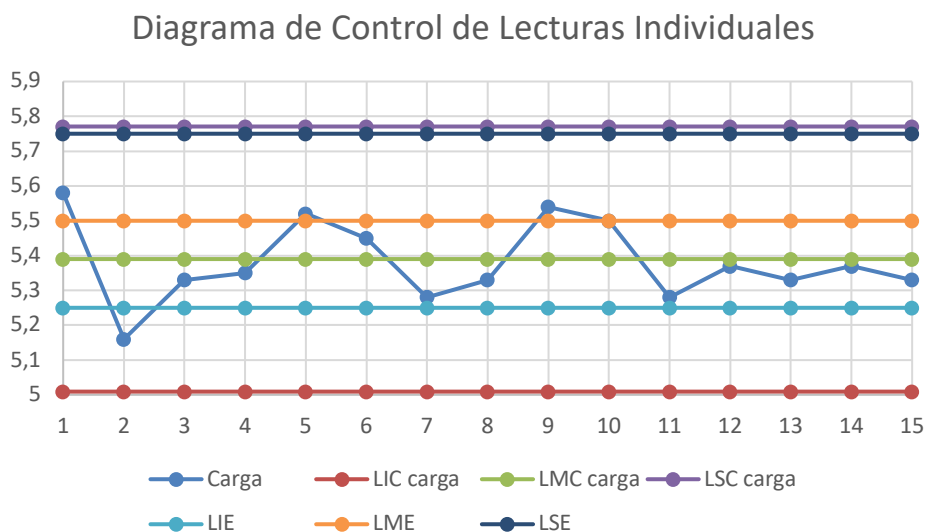
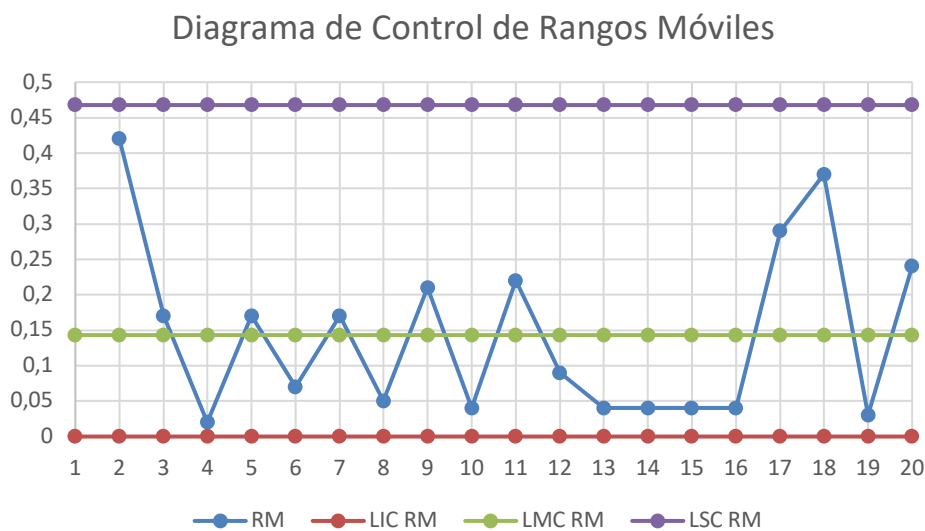


Figura 117. Diagrama de control de rangos móviles



La media del proceso está dada por su estimador puntual, la media muestral de las lecturas individuales:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 5.39$$

La desviación estándar del proceso se puede estimar a través de varias formas diferentes:

$$\hat{\sigma}_{x_1} = \frac{\overline{RM}}{d_2} = \frac{0.14}{1.128} = 0.1269$$

$$\hat{\sigma}_{x_2} = \frac{S}{c_4} = \frac{0.12511}{0.7979} = 0.1568$$

$$\hat{\sigma}_{x_3} = \frac{\overline{RM}}{d_4} = \frac{0.14}{0.9551} = 0.1499$$

Ahora se calcularán los parámetros de capacidad de proceso. Dado que no hay coincidencia entre las desviaciones estándar estimadas, se tomará la que quede intermedia:

$$Cp = (5.75 - 5.25) / (6 * 0.15) = 0.5556$$

$$Cplie = (5.39 - 5.25) / (3 * 0.15) = 0.3111$$

$$Cplse = (5.75 - 5.39) / (3 * 0.15) = 0.8$$

$$Cpk = \text{mínimo} \{Cplie, Cplse\} = 0.3111$$

$$E = (5.39 - 5.5) / 0.15 = -0.7333$$

$$Cpm = 0.5556 / \text{raíz}(1 + (-0.7333)^2) = 0.448$$

$$Cpkm = 0.2509$$

Como se puede apreciar, el proceso no es capaz de cumplir especificaciones.

Los diagramas de lecturas individuales y de rangos móviles también pueden ser graficados usando el software Minitab, como a continuación se describe.

Se resolverá el problema 16.2 usando Minitab. Lo primero es capturar las 20 lecturas individuales dadas en la tabla 66 en la pantalla principal de Minitab. Posteriormente, acceder al menú “Stat”, luego al submenú “Control Charts”, después al submenú “Variables Charts for Individuals” y finalmente al submenú “I-MR...” como se muestra en la figura 118 obteniéndose la pantalla de la figura 119.

Figura 118

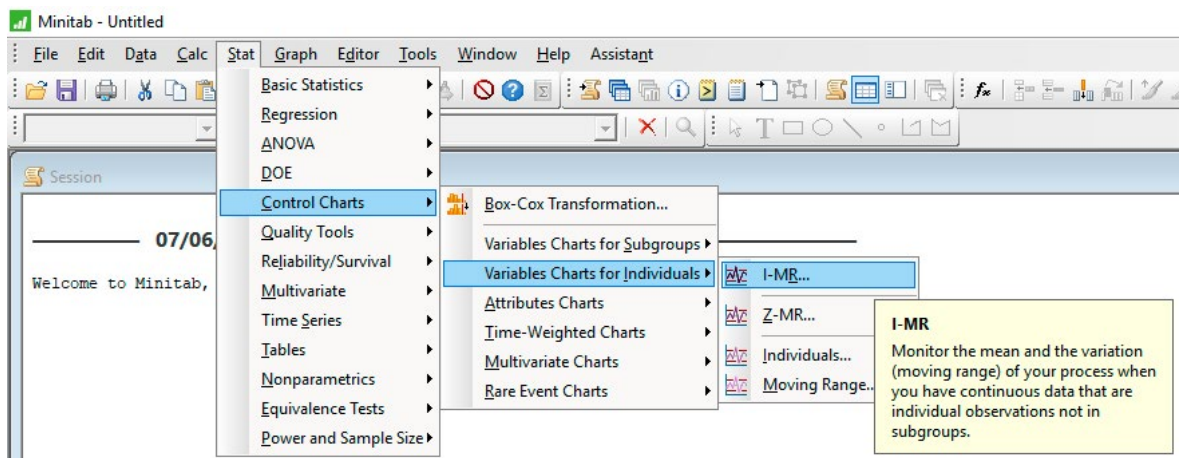
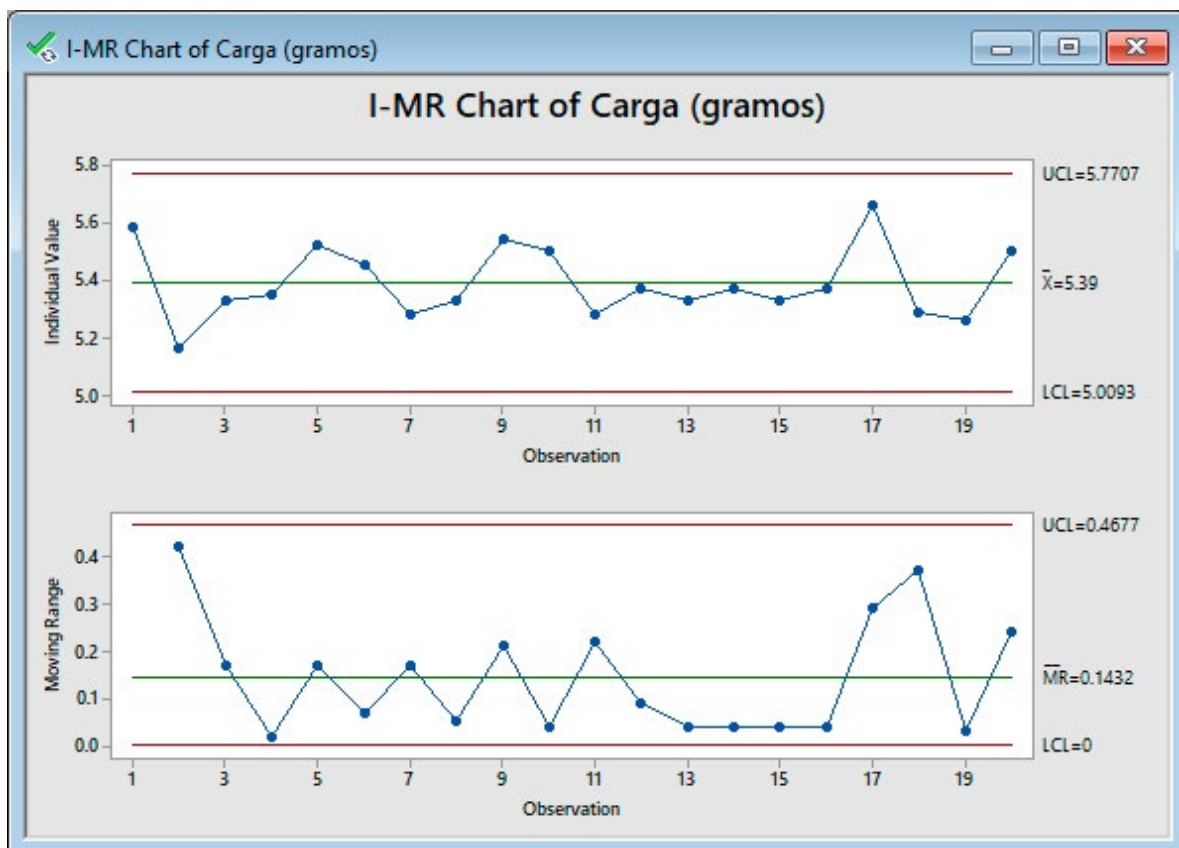


Figura 119. Diagrama de Lecturas Individuales y Rangos Móviles usando Minitab



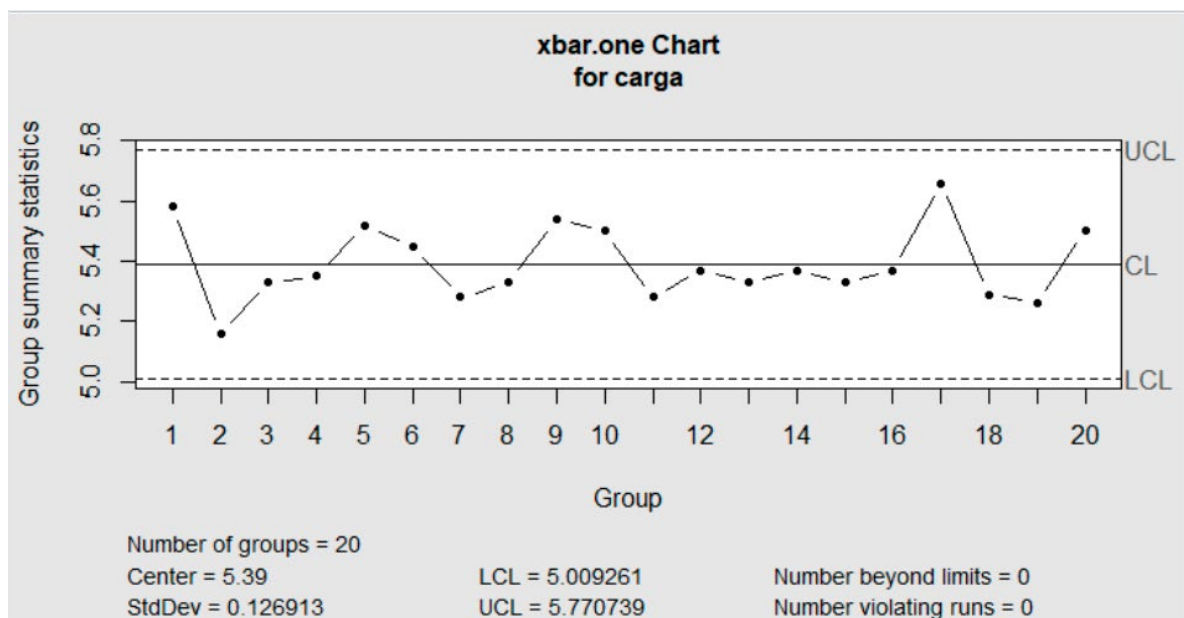
Asimismo, puede ser usado el software R. Para graficar el diagrama de lecturas individuales se teclean las instrucciones:

```
library(qcc)
```

```
carga<-c(5.58,5.16,5.33,5.35,5.52,5.45,5.28,5.33,5.54,5.50,5.28,5.37,5.33,5.37,
5.33,5.37,5.66,5.29,5.26,5.50)
qcc(carga,type="xbar.one")
```

Obteniéndose la gráfica de la figura 120.

Figura 120. Diagrama de Lecturas Individuales usando R



16.3. Diagrama de Sumas Acumuladas CUSUM

Los diagramas de control clásicos de Shewhart son muy utilizados en la fase de cálculo de límites de control y son muy efectivos para detectar cambios en un proceso, cuando la magnitud del cambio es de 1.5 veces o más la desviación estándar. En la fase de aplicación de un diagrama de control, para cambios más pequeños a 1.5 veces la desviación estándar, el diagrama de Shewhart no es tan eficiente para detectar rápidamente dichos cambios, aunque si es persistente, a la larga lo va a detectar.

Para ilustrar las palabras anteriores véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.3. En un proceso de endurecido de un acero austenítico por tratamiento térmico, la especificación establece que la dureza del material debe estar entre 70 y 74 de dureza Rockwell. Suponga que cada hora se extrae una muestra de tamaño $n=5$ y se mide su dureza. Se obtienen 20 muestras a lo largo del día, tal y como se muestran en la tabla 68.

Tabla 68

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 71.26 | 72.65 | 73.25 | 75.61 | 72.26 |
| 2 | 72.45 | 70.1 | 70.85 | 73.37 | 69.82 |
| 3 | 71.87 | 70.75 | 74.73 | 73.45 | 75.4 |
| 4 | 73.75 | 75.31 | 73.71 | 67.51 | 69.24 |
| 5 | 68.89 | 68.28 | 74.95 | 70.18 | 72.86 |
| 6 | 72.75 | 73.32 | 72.62 | 72.21 | 74.98 |
| 7 | 72.46 | 71.07 | 70.89 | 74.4 | 70.56 |
| 8 | 71.86 | 71.52 | 75.03 | 71.6 | 71.58 |
| 9 | 74.65 | 69.46 | 72.53 | 76.11 | 69.77 |
| 10 | 71.72 | 70.76 | 71.13 | 70.24 | 71.15 |
| 11 | 70.19 | 77.13 | 68.5 | 69.62 | 70.34 |
| 12 | 72.67 | 71.11 | 71.36 | 77.04 | 74.09 |
| 13 | 74.61 | 76.62 | 74.34 | 72.99 | 75.57 |
| 14 | 74.95 | 73.08 | 72.63 | 72.52 | 70.88 |
| 15 | 76.29 | 71.26 | 73.44 | 69.23 | 73.07 |
| 16 | 73.94 | 70.47 | 71.84 | 73.42 | 72.76 |
| 17 | 72.79 | 76.63 | 74.18 | 74.31 | 67.41 |
| 18 | 73.39 | 73.85 | 70.61 | 69.68 | 73.63 |
| 19 | 73.4 | 75.49 | 69.93 | 71.89 | 76.57 |
| 20 | 75.98 | 73.81 | 71.27 | 74.61 | 74.31 |

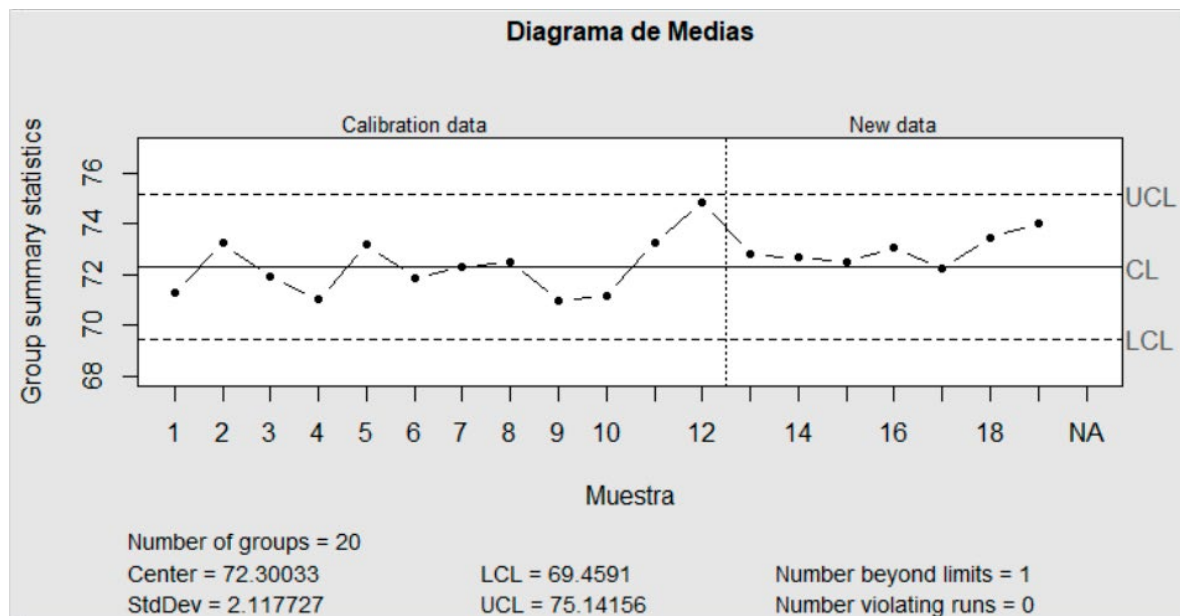
Al margen de que los datos pueden ser reales, se advierte al lector que las primeras 12 muestras fueron generadas usando números pseudoaleatorios, con una distribución normal de media 72 y desviación estándar 2. Las segundas ocho muestras fueron generadas usando números pseudoaleatorios con una

distribución normal de media 73 y desviación estándar 2. Como se ve, se provocó artificialmente un pequeño cambio de una unidad en la media, con la misma desviación estándar, a partir de la muestra 13 y se trata de ilustrar si el diagrama de control X-R detecta el cambio. El cálculo de los límites de control se realiza con las primeras 12 muestras.

El diagrama de medias se muestra en la figura 121 y se realizó con R, a través de las siguientes instrucciones:

```
library(qcc)
datosCusum<- read.csv(file="datosCusum.csv", head=TRUE,sep=";",nrows=20)
qcc(datosCusum[1:12,],type="xbar",sizes=5,newdata=datosCusum[13:20,],-
newsizes=5,title="Diagrama de Medias", xlab="Muestra",nsigmas = 3, plot =
TRUE, ylim=c(68,77))
```

Figura 121



Como se aprecia en el diagrama de la figura 121, ningún punto cae fuera de los límites de control, por lo que aparentemente se encuentra bajo control. Es muy importante visualizar muy bien el diagrama; nótese que después de la muestra 12, seis de siete puntos sucesivos caen por encima de la media

de proceso y aunque no basta para parar el proceso sí está reflejando una tendencia hacia arriba de la media. A la larga, el diagrama de control X-R sí va a detectar que hubo un cambio, aunque no es tan rápido en reflejar estas pequeñas variaciones.

En la fase de aplicación de un diagrama de control, cuando existe mucho interés en detectar más rápido pequeños cambios en el proceso, es más eficiente utilizar el Diagrama de Control de Suma Acumulada (CUSUM por su abreviatura en inglés). El diagrama CUSUM tiene la ventaja de incorporar toda la información histórica en la secuencia de valores de muestra al representar las sumas acumuladas de las desviaciones de los valores de muestra de un valor objetivo. Sin embargo, tiene la desventaja de ser más complicados los cálculos y su interpretación.

Por ejemplo, suponga que se recogen muestras de tamaño $n \geq 1$, y \bar{x}_j es el promedio de la j -ésima muestra. Entonces, si m_0 es el objetivo para la media del proceso, el gráfico de control de la suma acumulada se forma trazando la cantidad

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) \quad \dots (122)$$

contra el número de muestra i . C_i se denomina suma acumulativa hasta i , incluyendo la i -ésima muestra. Debido a que combinan información de las muestras históricas hasta i , los gráficos de suma acumulativa son más efectivos que los gráficos de Shewhart para detectar pequeños cambios en el proceso. Además, son particularmente efectivos con muestras de tamaño $n = 1$. Existen procesos como en Motorola División Comunicaciones en León Guanajuato, en donde el monitoreo de cada micrófono o bocina que ellos producen, se realiza automáticamente por computadora, y este diagrama de sumas acumuladas se desempeñaría mejor para el control del proceso que un diagrama tradicional de Shewhart.

Los diagramas de control de suma acumulativa fueron propuestos por primera vez por Page (1954) y han sido estudiados por muchos autores; en particular, Ewan (1963), Page (1961), Gan (1991), Lucas (1976), Hawkins (1981, 1993)

y Woodall y Adams (1993). En esta sección se analiza el diagrama de suma acumulada para la media del proceso. Es posible diseñar procedimientos de control de sumas acumuladas para otras variables, como fracciones defectuosas con distribución binomial o fracciones de defectos con distribución de Poisson. Más adelante se mostrará cómo se puede usar el diagrama cusum para monitorear la variabilidad del proceso. Observe que si el proceso permanece bajo control en el valor objetivo m_0 , la suma acumulada definida en la ecuación (117) es una caminata aleatoria con cero de promedio. Sin embargo, si la media se desplaza hacia arriba a algún valor $m_1 > m_0$, por ejemplo, entonces se desarrollará una tendencia ascendente o positiva en la suma acumulativa C_i . Por el contrario, si la media se desplaza hacia abajo a algún $m_1 < m_0$, entonces se desarrollará una tendencia hacia abajo o negativa en C_i . Por lo tanto, si se desarrolla una tendencia significativa en los puntos graficados, ya sea hacia arriba o hacia abajo, se debería considerar esto como evidencia de que la media del proceso ha cambiado, y se debe realizar una búsqueda de alguna causa asignable.

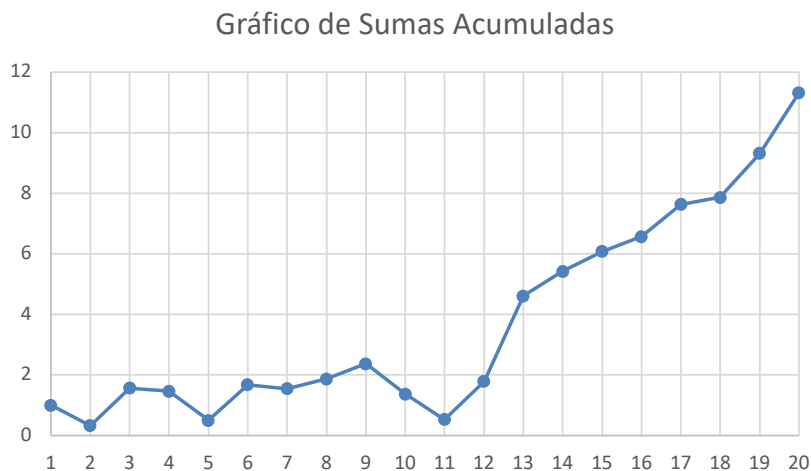
Esta teoría se puede demostrar fácilmente resolviendo el ejemplo 16.3 con el diagrama CUSUM, utilizando para ello nuevamente los datos de la tabla 68 de la página 209, con los cuales se elabora en Excel la tabla 69 que se muestra a continuación.

Tabla 69

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | Media | Media - \bar{x}_0 | C_i |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------------------|--------|
| 1 | 71.26 | 72.65 | 73.25 | 75.61 | 72.26 | 73.006 | 1.006 | 1.006 |
| 2 | 72.45 | 70.1 | 70.85 | 73.37 | 69.82 | 71.318 | -0.682 | 0.324 |
| 3 | 71.87 | 70.75 | 74.73 | 73.45 | 75.4 | 73.24 | 1.24 | 1.564 |
| 4 | 73.75 | 75.31 | 73.71 | 67.51 | 69.24 | 71.904 | -0.096 | 1.468 |
| 5 | 68.89 | 68.28 | 74.95 | 70.18 | 72.86 | 71.032 | -0.968 | 0.5 |
| 6 | 72.75 | 73.32 | 72.62 | 72.21 | 74.98 | 73.176 | 1.176 | 1.676 |
| 7 | 72.46 | 71.07 | 70.89 | 74.4 | 70.56 | 71.876 | -0.124 | 1.552 |
| 8 | 71.86 | 71.52 | 75.03 | 71.6 | 71.58 | 72.318 | 0.318 | 1.87 |
| 9 | 74.65 | 69.46 | 72.53 | 76.11 | 69.77 | 72.504 | 0.504 | 2.374 |
| 10 | 71.72 | 70.76 | 71.13 | 70.24 | 71.15 | 71 | -1 | 1.374 |
| 11 | 70.19 | 77.13 | 68.5 | 69.62 | 70.34 | 71.156 | -0.844 | 0.53 |
| 12 | 72.67 | 71.11 | 71.36 | 77.04 | 74.09 | 73.254 | 1.254 | 1.784 |
| 13 | 74.61 | 76.62 | 74.34 | 72.99 | 75.57 | 74.826 | 2.826 | 4.61 |
| 14 | 74.95 | 73.08 | 72.63 | 72.52 | 70.88 | 72.812 | 0.812 | 5.422 |
| 15 | 76.29 | 71.26 | 73.44 | 69.23 | 73.07 | 72.658 | 0.658 | 6.08 |
| 16 | 73.94 | 70.47 | 71.84 | 73.42 | 72.76 | 72.486 | 0.486 | 6.566 |
| 17 | 72.79 | 76.63 | 74.18 | 74.31 | 67.41 | 73.064 | 1.064 | 7.63 |
| 18 | 73.39 | 73.85 | 70.61 | 69.68 | 73.63 | 72.232 | 0.232 | 7.862 |
| 19 | 73.4 | 75.49 | 69.93 | 71.89 | 76.57 | 73.456 | 1.456 | 9.318 |
| 20 | 75.98 | 73.81 | 71.27 | 74.61 | 74.31 | 73.996 | 1.996 | 11.314 |

Utilizando la primera columna de esta tabla como eje de las x's y la última columna como eje de las y's se obtiene la gráfica de la figura 122.

Figura 122



Como se puede apreciar en la figura 122 las primeras 12 observaciones donde $\mu_0 = 72$, el CUSUM tiende a desplazarse lentamente, en este caso manteniendo valores cercanos a cero. Sin embargo, en las últimas ocho observaciones, donde la media se ha desplazado a $\mu_1 = 73$, se desarrolla una fuerte tendencia ascendente. Por supuesto, el diagrama de sumas acumuladas en la figura 189 no es un gráfico de control porque carece de límites de control estadísticos.

Hay dos formas de representar el diagrama de sumas acumuladas, el CUSUM tabular (o algorítmico) y la forma de máscara en V del CUSUM tradicional. De las dos representaciones, el CUSUM tabular es preferible. En este libro se presentará solo la construcción y el uso del CUSUM tabular.

Para proceder a convertir la gráfica de la figura 122 en un diagrama de control estadístico, se procederá a plantear los límites de control. Estos estarán definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 C_i^+ &= \max\{0, \bar{x}_i - (\mu_0 + k) + C_{i-1}^+\} \\
 C_i^- &= \max\{0, (\mu_0 - k) - \bar{x}_i + C_{i-1}^-\}
 \end{aligned}
 \quad \dots (123)$$

En donde

$$k = \frac{\delta}{2\sigma_{\bar{x}}} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)} \quad \dots (124)$$

También se requiere un valor de decisión contra el cual comparar, al cual se le identifica como H. Generalmente este valor se toma como:

$$H = 5\sigma_{\bar{x}} = 5\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) \quad \dots (125)$$

En las expresiones (124) y (125) se puede tomar como desviación estándar un valor de referencia (por ejemplo, en el ejercicio 16.3 se tomó una desviación estándar de dos para generar aleatoriamente los datos) o utilizar como estimador de la desviación estándar el valor de desviación estándar muestral, el valor de desviación estándar para un diagrama X-R con $n=4, 5, 6$, o el valor de desviación estándar para un diagrama X-S con $n > 10$.

Si C_i^+ ó C_i^- exceden al valor de decisión H, el proceso es considerado fuera de control.

Para el ejemplo 16.3 se realizan los cálculos a continuación para determinar si el proceso se encuentra bajo control o no. De la tabla 68 se obtiene la tabla 70.

Los valores que se toman para calcular esta tabla son:

Desviación estándar muestral= 2.2281

$\delta= 1$

$k=\delta/(2*s/raíz(n))=1/(2*2.2281/raíz(5))=0.5018$

$H=5\sigma/raíz(n)=5*2.2281/raíz(5)=4.9822$

En la tabla 70, los valores que aparecen de N^+ y N^- representan el número de veces en que se mantiene consecutivamente un número positivo en C_j^+ y en C_j^- respectivamente.

En la tabla 70 se puede apreciar que $C_{20}^+ > H$ por lo que el proceso se encuentra fuera de control. El valor $N_{20}^+ = 9$ refleja desde cuando, a partir de la muestra 20 donde se detecta el cambio hacia atrás, la C_j empezó a tener un comportamiento creciente, por lo cual se deduce que el cambio en la media se dio después de la muestra 11 ó 12.

Tabla 70

| Muestra | Media | Media- μ_0 | C_j | C_j^- | N^- | C_j^+ | N^+ |
|---------|--------|----------------|--------|------------|-------|------------|-------|
| 1 | 73.006 | 1.006 | 1.006 | 0 | 0 | 0.50420903 | 1 |
| 2 | 71.318 | -0.682 | 0.324 | 0.18020903 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 73.24 | 1.24 | 1.564 | 0 | 0 | 0.73820903 | 1 |
| 4 | 71.904 | -0.096 | 1.468 | 0 | 0 | 0.14041807 | 2 |
| 5 | 71.032 | -0.968 | 0.5 | 0.46620903 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 73.176 | 1.176 | 1.676 | 0 | 0 | 0.67420903 | 1 |
| 7 | 71.876 | -0.124 | 1.552 | 0 | 0 | 0.04841807 | 2 |
| 8 | 72.318 | 0.318 | 1.87 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 72.504 | 0.504 | 2.374 | 0 | 0 | 0.00220903 | 0 |
| 10 | 71 | -1 | 1.374 | 0.49820903 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 71.156 | -0.844 | 0.53 | 0.84041807 | 2 | 0 | 0 |
| 12 | 73.254 | 1.254 | 1.784 | 0 | 0 | 0.75220903 | 1 |
| 13 | 74.826 | 2.826 | 4.61 | 0 | 0 | 3.07641807 | 2 |
| 14 | 72.812 | 0.812 | 5.422 | 0 | 0 | 3.3866271 | 3 |
| 15 | 72.658 | 0.658 | 6.08 | 0 | 0 | 3.54283614 | 4 |
| 16 | 72.486 | 0.486 | 6.566 | 0 | 0 | 3.52704517 | 5 |
| 17 | 73.064 | 1.064 | 7.63 | 0 | 0 | 4.08925421 | 6 |
| 18 | 72.232 | 0.232 | 7.862 | 0 | 0 | 3.81946324 | 7 |
| 19 | 73.456 | 1.456 | 9.318 | 0 | 0 | 4.77367228 | 8 |
| 20 | 73.996 | 1.996 | 11.314 | 0 | 0 | 6.26788131 | 9 |

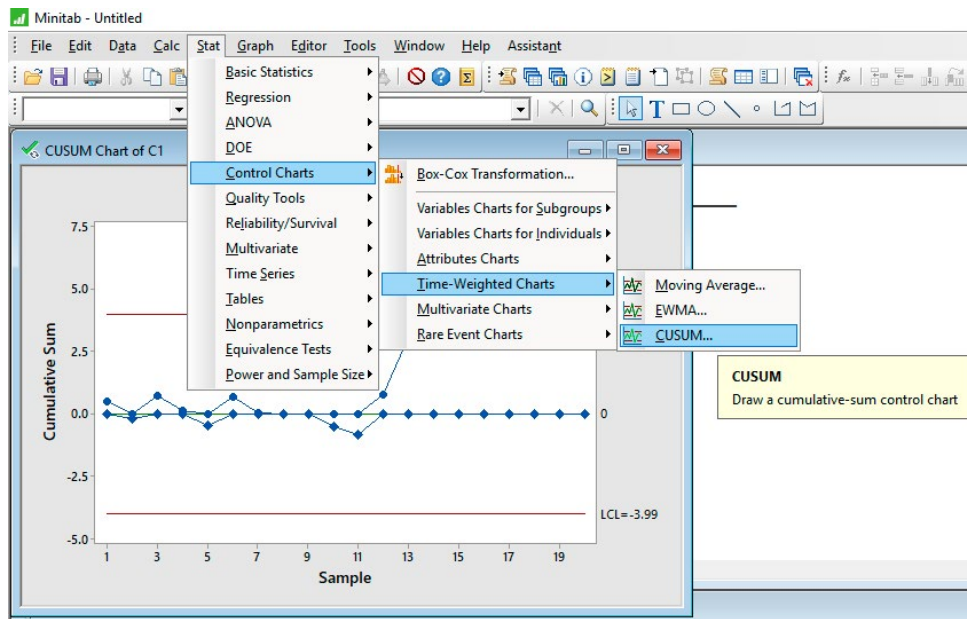
Con Minitab el valor de C_j^- se calcula con el negativo de la expresión usada en las expresiones 123, es decir:

$$C_i^- = \min\{0, \bar{x}_i - \mu_0 + k + C_{i-1}^+\} \quad \dots (126)$$

Para aplicar el diagrama CUSUM con Minitab, en el ejercicio 16.3, se capturan los datos de la tabla 68 en una sola columna, primero las cinco lecturas de la primera muestra, luego las cinco lecturas de la segunda muestra y así sucesivamente hasta capturar el total de los cien datos dados.

Posteriormente entra al menú “Stats”, luego al submenú “Control Charts”, después al submenú “Time-Weighted Charts” y finalmente al submenú “CUSUM”, como se muestra en la figura 123.

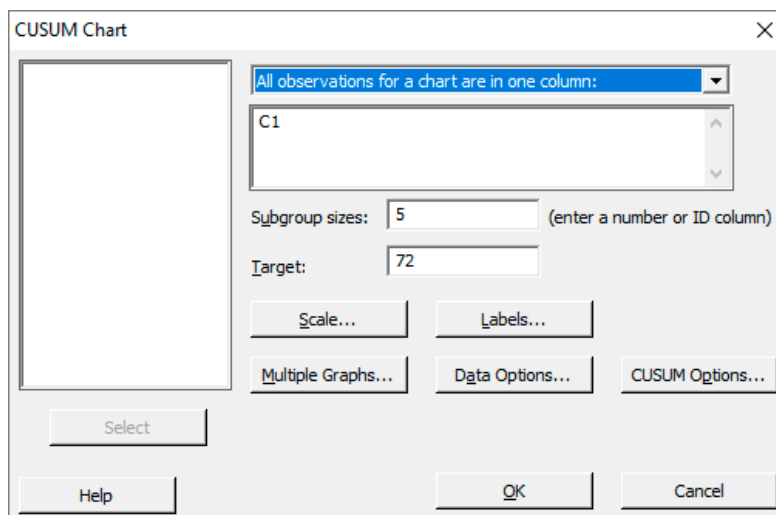
Figura 123



Aparece la pantalla de la figura 124.

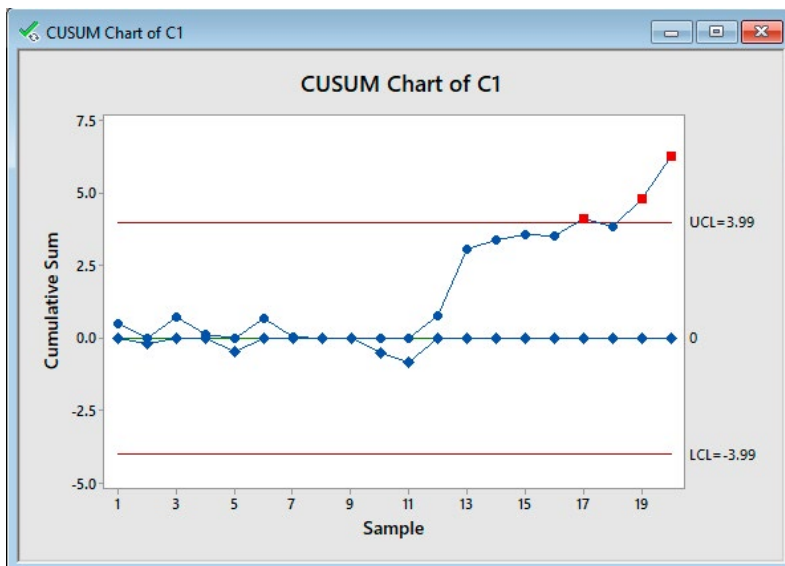
Después de capturar los datos que se solicitan y se muestran en la figura 124, y dar click en Ok, aparece el Diagrama de Sumas Acumuladas de la figura 125.

Figura 124



Como se puede observar en la figura 125, el diagrama se encuentra fuera de control.

Figura 125. Diagrama de Control de Sumas Acumuladas con Minitab

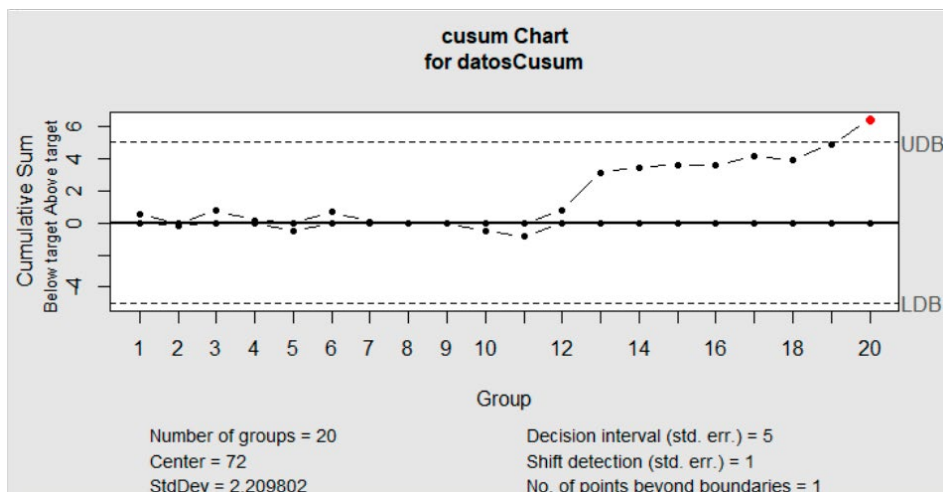


Con el software R se capturan las siguientes instrucciones:

```
library(qcc)
datosCusum<-read.csv(file="datosCusum.csv",head=FALSE,sep=";",nrows=20)
cusum(datosCusum, sizes=5,center=72,head.start=0)
```

Al compilar estas instrucciones se obtiene la gráfica de la figura 126.

Figura 126. Diagrama CUSUM usando R



También se pueden usar los diagramas CUSUM estandarizados, para lo cual se utiliza la siguiente expresión:

$$z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \quad \dots (127)$$

Con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max \{0, z_i - k + C_{i-1}^+\} \\ C_i^- &= \max \{0, -k - z_i + C_{i-1}^-\} \end{aligned} \quad \dots (128)$$

Hawkins en 1981 dedujo algoritmos para trazar un diagrama de control CUSUM para la desviación estándar, con la siguiente expresión:

$$v_i = \frac{\sqrt{|z_i|} - 0.822}{0.349} \quad \dots (129)$$

Con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \max \{0, v_i - k + S_{i-1}^+\} \\ S_i^- &= \max \{0, -k - v_i + S_{i-1}^-\} \end{aligned} \quad \dots (130)$$

16.4. Diagrama de Medias Móviles Exponencialmente Ponderadas EWMA

En forma similar a los diagramas CUSUM, los Diagramas de Medias Móviles Exponencialmente Ponderadas EWMA (por sus iniciales en inglés) también representan una buena alternativa a los gráficos de control tradicionales de Shewhart, cuando se está interesado en detectar cambios pequeños en un proceso. El rendimiento del gráfico EWMA es aproximadamente equivalente al del CUSUM y de alguna manera es más fácil de configurar y operar.

El Diagrama de Control por Variables de Medias Móviles Ponderadas EWMA para monitorear la media del proceso fue desarrollado por Roberts en 1959.

La media móvil ponderada exponencialmente se define como:

$$z_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad \dots (131)$$

donde $0 < \lambda \leq 1$ es una constante y el valor inicial $z_0 = m_0$ (requerido con la primera muestra en $i = 1$) es la media de diseño, aunque algunas veces se utiliza como el valor inicial de EWMA la media aritmética de los datos preliminares.

Si $\lambda = 0.2$, entonces el peso asignado a la media de la muestra actual es 0.2 y los pesos dados a las medias anteriores son 0.16, 0.128, 0.1024, y así sucesivamente. Debido a que estos pesos disminuyen geoméricamente cuando están conectados por una curva suave, el EWMA a veces se denomina Media Móvil Geométrica (GMA). La EWMA puede ser vista como un promedio ponderado de todas las medias pasadas y actuales, y es muy insensible a la suposición de normalidad, por lo que representa un diagrama de control ideal para lecturas individuales.

Si la media de cada muestra \bar{x}_i representa una variable aleatoria estadísticamente independiente de todas las otras, con varianza σ^2 , entonces la varianza de z_i está dada por la siguiente expresión:

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma_{\bar{x}_i}^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right] \quad \dots (132)$$

Por lo que el gráfico de control de EWMA se construiría trazando como abscisa el número de muestra i contra z_i como ordenada. La línea central y los límites de control para el diagrama de control EWMA se calculan con las siguientes expresiones:

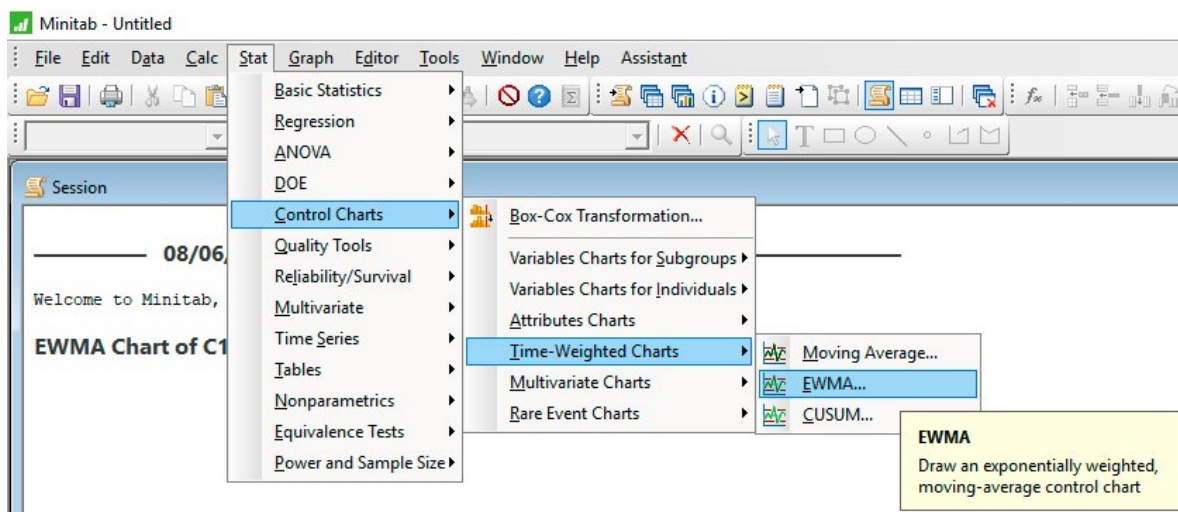
$$\begin{aligned} LIC_{EWMA} &= \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right]} \\ LMC_{EWMA} &= \mu_0 \\ LSC_{EWMA} &= \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right]} \end{aligned} \quad \dots (133)$$

En las expresiones (133), el factor L es el ancho de los límites de control.

Para resolver el problema 6.3 de la página 209 se utilizará Minitab. Se capturan los datos de la tabla de la figura 68 en una sola columna, primero las cinco lecturas de la primera muestra, luego las cinco lecturas de la segunda muestra y así sucesivamente hasta capturar el total de los cien datos dados.

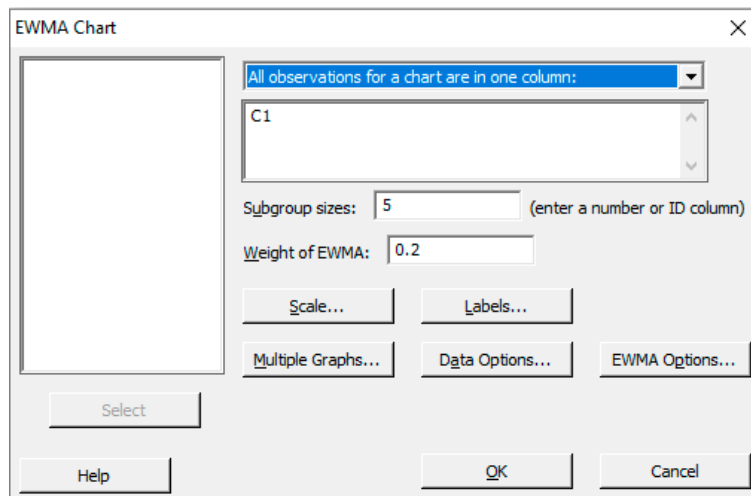
Posteriormente entra al menú Stats, luego al submenú Control Charts, después al submenú Time-Weighted Charts y finalmente al submenú EWMA, como se muestra en la figura 127.

Figura 127



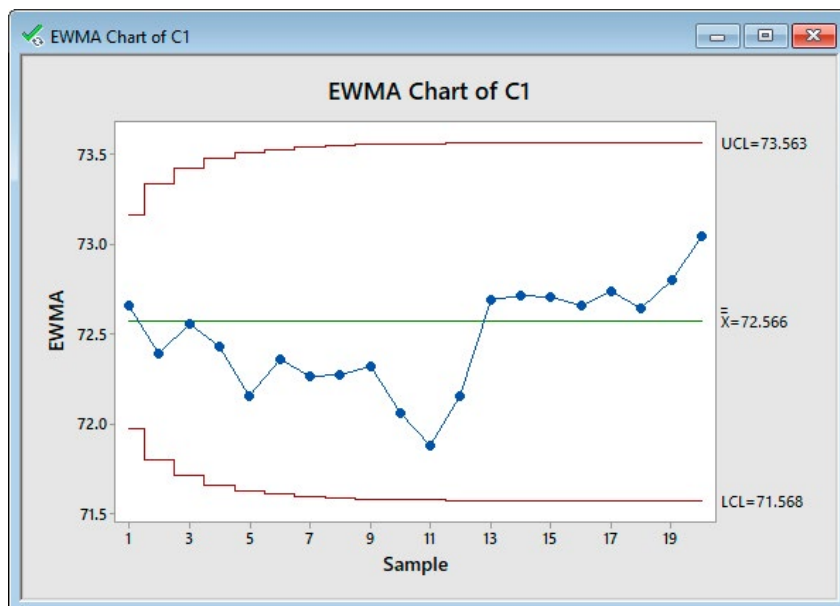
Aparece la pantalla de la Figura 128.

Figura 128



Después de capturar los datos que se solicitan y se muestran en la figura 128, y dar click en Ok, aparece el Diagrama EWMA de la figura 129.

Figura 129. Diagrama EWMA utilizando Minitab

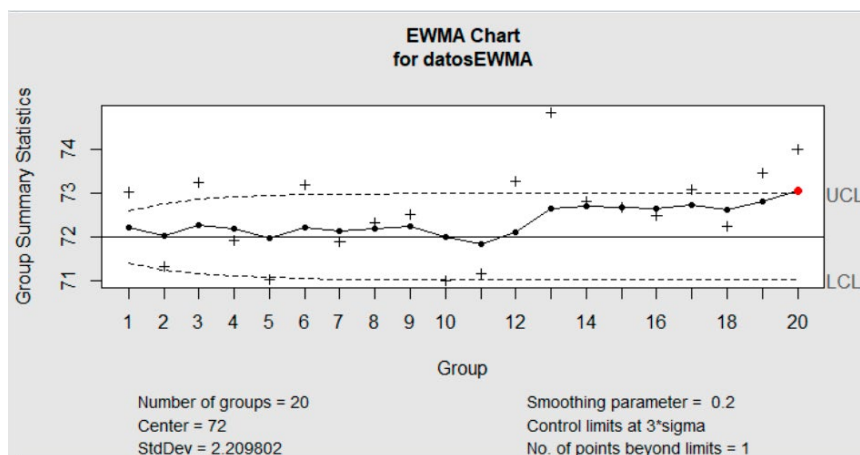


Con el software R se capturan las siguientes instrucciones:

```
library(qcc)
datosEWMA<-read.csv(file="datosCusum.csv",head=FALSE,sep=";",nrows=20)
ewma(datosEWMA, sizes=5,center=72,lambda=0.2)
```

Al compilar estas instrucciones se obtiene la gráfica de la figura 130.

Figura 130. Diagrama EWMA usando R



Como se puede apreciar en este diagrama, el proceso se encuentra fuera de control, detectado en la muestra 20.

16.5. Diagramas de control estadístico de la calidad tipo “g” y tipo “h”

Los eventos raros ocurren intrínsecamente en todo tipo de procesos. Por ejemplo, en los hospitales, hay errores de medicación, infecciones, caídas de pacientes, neumonías asociadas a respirador y otros eventos adversos raros que causan estadías prolongadas en el hospital y aumentan los costos de atención médica. Estos eventos raros también ocurren en muchos otros contextos. Los desarrolladores de software pueden necesitar rastrear errores en las líneas de código de programación, o un profesional de la calidad puede necesitar monitorear un proceso con una fracción defectuosa muy baja en un entorno de fabricación de alto rendimiento. Los accidentes que ocurren en el taller y las fallas de los motores de las aeronaves también son eventos excepcionalmente raros, idealmente.

Ya sea que esté en el cuidado de la salud, el desarrollo de software, la fabricación o alguna otra industria, el control estadístico del proceso es un componente importante de la mejora de la calidad. Mediante gráficos de control, se pueden graficar estos eventos raros y monitorear un proceso para determinar si es estable o si está fuera de control y, por lo tanto, es impredecible y necesita atención.

Ya se ha visto una cantidad considerable de gráficos de control disponibles, pero en el caso de eventos raros, se puede usar el gráfico g para evaluar la estabilidad de los procesos donde ocurren. El gráfico g, basado en la distribución geométrica, es un gráfico de control diseñado específicamente para monitorear eventos raros.

Los gráficos g se usan generalmente para trazar el número de días entre eventos raros. También se pueden usar para trazar el número de oportunidades entre eventos raros.

Por ejemplo, suponga que se quieren controlar las complicaciones de la cirugía cardíaca. Se puede usar un diagrama tipo g para graficar la cantidad de cirugías exitosas que se realizaron entre las que involucraron complicaciones.

El diagrama g es simple de crear y usar. Para producir un diagrama tipo g, todo lo que se necesita son las fechas en que ocurrieron los eventos raros o el número de oportunidades entre las ocurrencias de eventos raros.

Además de su simplicidad, este gráfico de control también ofrece una mayor sensibilidad estadística para monitorear eventos raros que sus contrapartes tradicionales.

Debido a que los eventos raros ocurren a tasas muy bajas, los gráficos de control por atributos tradicionales, como el gráfico np, p, c o u, generalmente, no son tan efectivos para detectar cambios en las tasas de eventos de manera oportuna. Debido a que la probabilidad de que ocurra un evento raro es muy baja, se requieren tamaños de subgrupo considerablemente mayores para crear diagramas tipo np, p, c o u y cumplir con las reglas generales típicas. Además de la ardua tarea de recopilar más datos, esto crea la desafortunada circunstancia de tener que esperar más tiempo para detectar un cambio en el proceso. Afortunadamente, los diagramas g no requieren grandes cantidades de datos para detectar efectivamente un cambio en un proceso de eventos raros.

Otra ventaja de usar el diagrama tipo g para monitorear sus eventos raros es que no requiere que recopile y registre datos sobre el número total de oportunidades, mientras que los gráficos np, p, c o u sí lo hacen.

Por ejemplo, si está monitoreando errores de medicación usando un gráfico p, debe contar la cantidad total de medicamentos administrados a cada paciente para calcular y graficar la proporción de errores de medicación. Sin embargo, para crear un diagrama tipo g, solo se necesita registrar las fechas en que ocurrieron los errores de medicación. Considere que el diagrama g supone que las oportunidades, o los medicamentos administrados en este ejemplo, son razonablemente constantes.

En un diagrama de control tipo g, cuando se traza el número de días entre infecciones, los puntos por encima del límite superior de control (LSC) son deseables ya que indican un período de tiempo prolongado entre los eventos. Los puntos cercanos o inferiores al límite inferior de control (LIC) son indeseables e indicativos de un período de tiempo reducido entre los eventos.

Los límites de control de un diagrama tipo g fueron deducidos por Benneyan, James C. (Kaminsky Frank C; Benneyan, James C; Davis Robert C y Burke Richard J. Statistical Control Charts Based on a Geometric Distribution. Journal of Quality Technology, Vol 24 No 2, april 1992). Las expresiones para calcularlos están dadas por

(http://www1.coe.neu.edu/~benneyan/papers/jqt_gchart.pdf):

Para p conocida, Diagrama tipo g:

$$\begin{aligned}
 LICg &= n\left(\frac{1-p}{p} + a\right) - k\sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}} \\
 LMCg &= n\left(\frac{1-p}{p} + a\right) \quad \dots (134) \\
 LSCg &= n\left(\frac{1-p}{p} + a\right) + k\sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}
 \end{aligned}$$

Para p conocida, Diagrama tipo h:

$$\begin{aligned}
 LICh &= \left(\frac{1-p}{p} + a\right) - \frac{k}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}} \\
 LMCh &= \left(\frac{1-p}{p} + a\right) \quad \dots (135) \\
 LSC h &= \left(\frac{1-p}{p} + a\right) + \frac{k}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}}
 \end{aligned}$$

Para p desconocida y en términos de tiempo transcurrido entre eventos raros, el Diagrama tipo g presenta los siguientes límites de control:

$$\begin{aligned}
 LICg &= \bar{t} - k\sqrt{n\left(\frac{\bar{t}}{n} - a\right)\left(\frac{\bar{t}}{n} - a + 1\right)} \\
 LMCg &= \bar{t} \quad \dots (136) \\
 LSCg &= \bar{t} + k\sqrt{n\left(\frac{\bar{t}}{n} - a\right)\left(\frac{\bar{t}}{n} - a + 1\right)}
 \end{aligned}$$

En términos de tiempo transcurrido entre eventos raros, el diagrama tipo h presenta los siguientes límites de control:

$$\begin{aligned}
 LICh &= \frac{\bar{t}}{n} - \frac{k}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\bar{t}}{n} - a\right)\left(\frac{\bar{t}}{n} - a + 1\right)} \\
 LMCh &= \frac{\bar{t}}{n} \\
 LSCh &= \frac{\bar{t}}{n} + \frac{k}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\bar{t}}{n} - a\right)\left(\frac{\bar{t}}{n} - a + 1\right)}
 \end{aligned}
 \quad \dots (137)$$

En donde \bar{t} es el número promedio de días o de oportunidades entre eventos raros; p es la probabilidad de lograr un evento raro en cada oportunidad; k es el número de desviaciones estándar usadas en los límites de control.

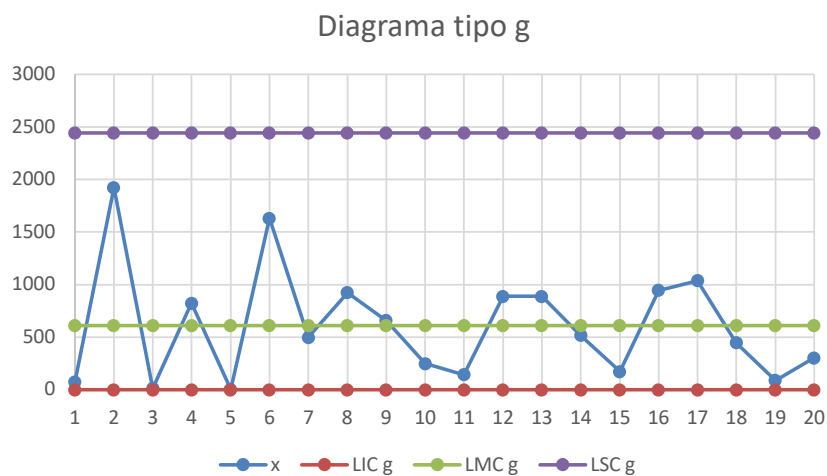
Ejemplo 16.4. Un hospital lleva un registro de los partos asistidos y cuenta el número de partos exitosos entre dos en donde hubo fallecimiento de la madre y/o del bebé, obteniéndose los siguientes registros: 75, 1923, 14, 822, 3, 1630, 498, 924, 659, 249, 144, 887, 889, 516, 172, 946, 1036, 447, 89, 303. Obtenga un diagrama de control tipo g y establezca cómo se encuentra el proceso.

Para resolver el problema con Excel, se debe constituir una tabla de datos como la que se muestra en la Tabla 71. En esta tabla, el valor aproximado de p , se obtiene como el recíproco de la media de los datos proporcionados, $p^{\wedge} = 1/611.3 = 0.001636$. El valor central del diagrama será $(1-p^{\wedge})/p^{\wedge} = 610.3$. Los límites LIC $g = (1-p^{\wedge})/p^{\wedge} - 3 \cdot \text{raíz}((1-p^{\wedge})/p^{\wedge 2}) = -1,222.1$ que se toma como cero; LSC $g = (1-p^{\wedge})/p^{\wedge} + 3 \cdot \text{raíz}((1-p^{\wedge})/p^{\wedge 2}) = 2,442.7$.

Tabla 71

| Muestra | x | LIC g | LMC g | LSC g |
|---------|------|-------|-------|---------|
| 1 | 75 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 2 | 1923 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 3 | 14 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 4 | 822 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 5 | 3 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 6 | 1630 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 7 | 498 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 8 | 924 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 9 | 659 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 10 | 249 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 11 | 144 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 12 | 887 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 13 | 889 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 14 | 516 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 15 | 172 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 16 | 946 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 17 | 1036 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 18 | 447 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 19 | 89 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |
| 20 | 303 | 0 | 610.3 | 2,442.7 |

Con esta tabla 71 se traza el diagrama tipo g que se muestra en la figura 131.

Figura 131


Los diagramas tipo g no deben interpretarse como los diagramas clásicos de Shewhart; son diferentes conceptualmente. En los diagramas tipo g los puntos que estén por arriba del límite superior pueden considerarse como

deseables ya que indican muchos casos de éxito entre los casos raros indeseables. Los puntos cercanos o inferiores al límite inferior de control (LIC) son indeseables e indicativos de casos de éxito reducidos entre los eventos raros indeseables. Para el caso de la figura 200 los puntos de las muestras 1, 3, 5, 11, 15 y 19 son preocupantes.

Se utilizará ahora el software Minitab. Los datos se capturan en la primera columna de la pantalla de Minitab. Posteriormente, se accesa al menú “Stat”, luego “Control Charts”, después “Rare Events Charts” y por último a “G...”, como se muestra en la figura 132, apareciendo la pantalla que se muestra en la figura 133. Después de proporcionar los datos necesarios y dar un “Ok”, se obtiene la gráfica tipo g de la figura 134.

Figura 132

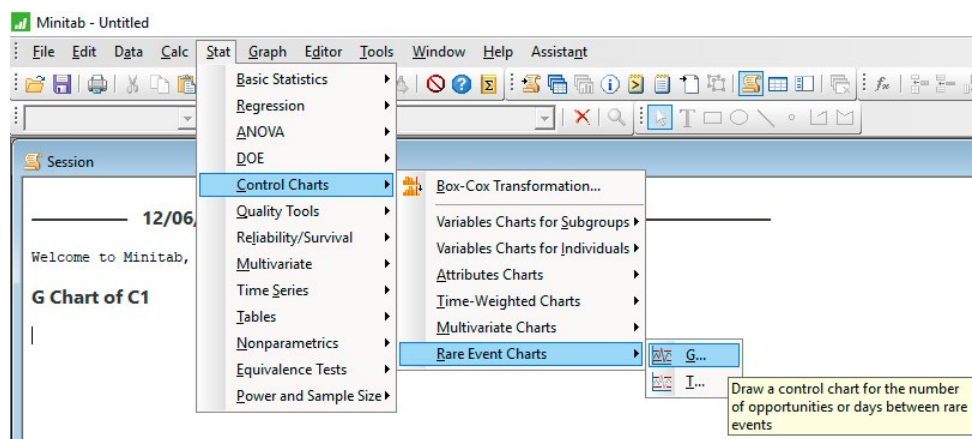


Figura 133

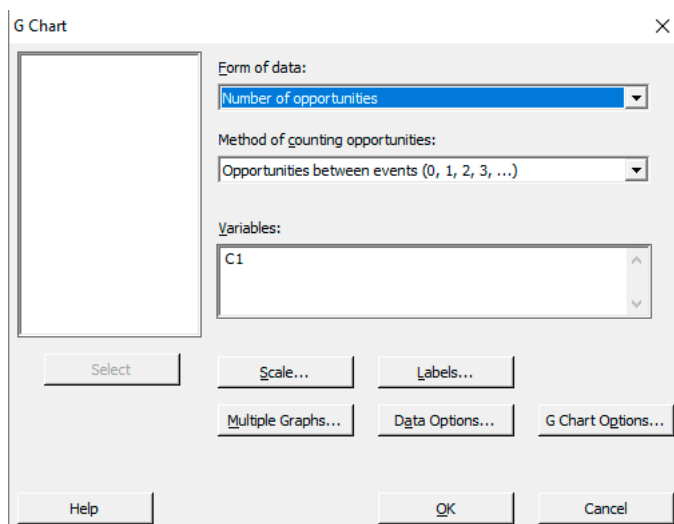
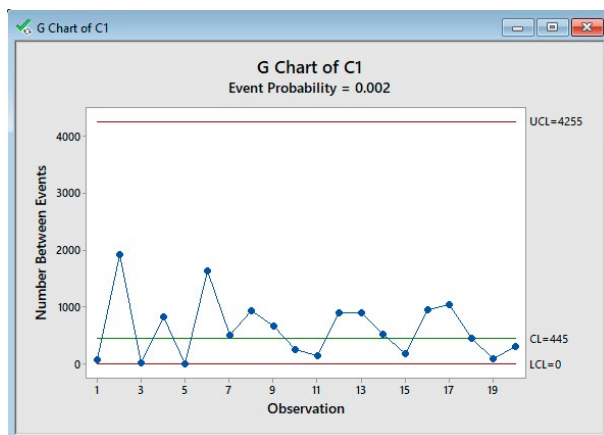


Figura 134. Diagrama de Control Estadístico tipo g con Minitab



Nótese que en este caso los límites de control, el superior, se encuentra casi al doble arriba del calculado con Excel. También puede usarse el software R para trazar este diagrama, con las siguientes instrucciones:

```
library(qcc)
```

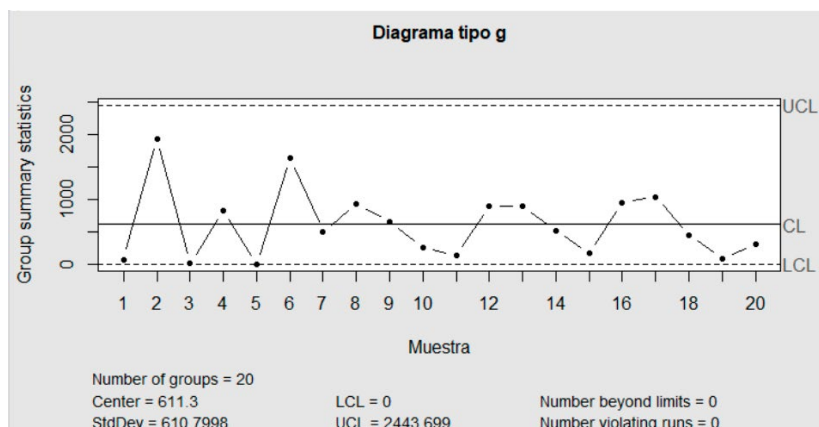
```
datosg<- c(75,1923,14,822,3,1630,498,924,659,249,144,887,889,516,172,946,103  
6,447,89,303)
```

```
qcc(datosg,type="g",title="Diagrama tipo g",xlab="Muestra")
```

Obteniéndose la gráfica que se muestra en la figura 135.

El gráfico que se muestra en la figura 135 corresponde con el número de oportunidades que se requieren para obtener un evento raro. En este diagrama, a la hora de calcular el límite inferior se obtiene un valor negativo el cual se sitúa en cero debido a que no puede haber oportunidades negativas.

Figura 135. Diagrama tipo g con el software R



Problemas propuestos

1. Explique qué es la variabilidad de procesos.
2. Proporcione cinco ejemplos de mapeo de procesos.
3. Explique qué es un plan de inspección en proceso.
4. Proporcione tres ejemplos prácticos de plan de inspección.
5. ¿Cómo se elabora un balón para balero?, ¿Qué características de calidad deben controlarse en el proceso de elaboración de un balón?
6. ¿Qué pasos se siguen para aplicar el control estadístico de calidad de procesos?
7. Elabore un cuadro resumen de los tipos de diagramas de control estadístico de calidad de procesos que existen, anexando las características de cada uno de ellos, ¿qué controla?, ¿cómo se muestrea?, ¿de qué tamaño deben ser las muestras?, ¿con qué frecuencia deben recolectarse las muestras?, ¿cómo se interpretan?
8. Trace tres gráficas de cada una de las distribuciones de probabilidad discretas enumeradas en el cuadro resumen de la tabla 6 de la página 31, proporcionando su media, desviación estándar, función de probabilidad acumulada y función generatriz de momentos.
9. Trace tres gráficas de cada una de las distribuciones de probabilidad continuas, enumeradas en el cuadro resumen de la tabla 7 de la página 37, proporcionando su media, desviación estándar, función de probabilidad acumulada y función generatriz de momentos.
10. Trace tres gráficas de cada una de las distribuciones de probabilidad muestrales enumeradas en el cuadro resumen de la tabla 8 de la página 38, proporcionando su media, desviación estándar, función de probabilidad acumulada y función generatriz de momentos.
11. (Problema 7-15, página 203, Hines et al, Probabilidad y Estadística para Ingeniería, 4ª Ed. Patria, 2013). Las especificaciones para un capacitor indican que la vida útil del mismo debe estar entre 1000 y 5000 horas. Se sabe que la vida útil se distribuye normalmente con media de 3000 horas. El ingreso aceptado por cada capacitor es de \$9.00; sin embargo, una unidad con fallas debe reemplazarse a un costo de \$3.00 para la compañía. Dos procesos de manufactura pueden producir capacitores que tengan una media de vida útil satisfactoria. La desviación estándar para el proceso A es de 1000 horas, y para el proceso B es de 500 horas. Sin embargo,

los costos de manufactura del proceso A son solo la mitad de los del proceso B, ¿qué valor del costo del proceso de manufactura es crítico, al grado de imponer el uso del proceso A o del proceso B?

12. En el ejercicio en un gimnasio se aplican tres rondas de cuatro diferentes ejercicios con un tiempo de duración con distribución normal de media cuatro minutos y una desviación estándar de 0.25 minutos, cada uno de ellos; al terminar cada ronda se realiza un descanso con una media de un minuto y una desviación estándar de 0.25 minutos y se sigue inmediatamente con la siguiente ronda.

- a. ¿Qué distribución de probabilidad presenta el tiempo total de ejercicio incluyendo las pausas entre rondas? Fundamente su respuesta.
- b. ¿Cuál es el promedio de tiempo de ejercicio total realizado incluyendo las pausas entre rondas?
- c. ¿Cuál es la varianza del tiempo de ejercicio total incluyendo las pausas entre rondas?
- d. ¿Cuál es la probabilidad de realizar la práctica en menos de 55 minutos?
- e. ¿Cuál es la probabilidad de que la práctica total se realice en más de una hora?
- f. ¿Cuál es la probabilidad de que la práctica total se realice entre 50 y 57 minutos?

13. Para ir de la Ciudad de México a Cosamaloapan Veracruz, un autobús foráneo debe detenerse en ciudades intermedias en su ruta. Suponga que en cada ciudad intermedia se detiene en promedio 10 minutos con una desviación estándar de un minuto. Los tiempos medios de viaje de una ciudad a otra, así como su desviación estándar se proporcionan en la siguiente tabla.

| Origen | Destino | Media (h:min) | Desv Est (h:min) |
|------------------|---------------|---------------|------------------|
| Ciudad de México | Puebla | 02:14 | 00:25 |
| Puebla | Orizaba | 02:06 | 00:20 |
| Orizaba | Córdoba | 00:36 | 00:10 |
| Córdoba | La Tinaja | 01:03 | 00:15 |
| La Tinaja | Tierra Blanca | 01:00 | 00:12 |
| Tierra Blanca | Tres Valles | 00:39 | 00:06 |
| Tres Valles | Cosamaloapan | 01:03 | 00:18 |

- a. ¿Cuál es el tiempo total promedio de viaje de la Ciudad de México a Cosamaloapan Veracruz?, incluyendo los tiempos de espera en cada ciudad intermedia.
- b. ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo total de viaje de la Ciudad de México a Cosamaloapan Veracruz?, incluyendo los tiempos de espera en cada ciudad intermedia.
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total de viaje sea menor a 10 horas?
- d. ¿Cuál es la probabilidad de que haga más de 12 horas?
- e. ¿Cuál es la probabilidad de que haga entre 9 y 12 horas de viaje?

14. Los siguientes datos que se muestran a continuación, corresponden con el tiempo que se lleva la instrumentación o alistamiento de una línea de producción en minutos. La especificación establece que el tiempo de alistamiento debe estar entre 4.75 y 6.25 min.

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 5.47 | 5.54 | 5.28 | 5.52 | 5.5 | 5.9 | 5.84 | 5.93 | 5.79 | 5.74 |
| 5.4 | 5.3 | 5.3 | 5.56 | 5.41 | 5.69 | 5.7 | 5.93 | 5.93 | 5.69 |
| 5.53 | 5.31 | 5.32 | 5.47 | 5.36 | 5.94 | 5.87 | 5.91 | 5.74 | 5.78 |
| 5.3 | 5.41 | 5.42 | 5.42 | 5.31 | 5.73 | 5.75 | 5.67 | 5.87 | 5.76 |
| 5.56 | 6.46 | 5.35 | 5.55 | 5.49 | 5.88 | 5.95 | 5.98 | 5.93 | 5.74 |
| 5.3 | 5.29 | 5.26 | 5.41 | 5.51 | 5.7 | 5.76 | 5.95 | 5.86 | 5.88 |
| 5.43 | 5.49 | 5.35 | 5.37 | 5.4 | 5.98 | 5.76 | 5.74 | 5.92 | 5.76 |
| 5.47 | 5.26 | 5.29 | 5.37 | 5.45 | 5.83 | 5.67 | 5.92 | 5.81 | 5.83 |
| 5.25 | 5.43 | 5.35 | 5.57 | 5.29 | 5.85 | 5.98 | 5.78 | 5.74 | 5.81 |
| 5.57 | 5.56 | 5.38 | 5.43 | 5.42 | 5.7 | 5.85 | 5.82 | 5.78 | 5.74 |

- a. Elabore un diagrama de caja sobre el conjunto de datos y determine si existe algún dato que se salga de lo común. Si es así, sustitúyalo por el promedio de los otros datos en el renglón donde se encuentre y use la nueva tabla para todos los demás incisos.
- b. ¿Considera usted que los datos se comportan aleatoriamente con distribución normal?. Utilice para ello diferentes métodos: papel probabilístico normal, Ji-Cuadrada, D de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Ryan-Joiner, Shapiro Wilk, Cramer-Von Mises, Pearson y Shapiro-Francia, usando para ello Excel, Minitab y R.

- c. Pruebe la hipótesis de que la población se comporta como una distribución gama.
- d. Calcule los parámetros muestrales de tendencia central: media aritmética, media geométrica, media armónica, mediana, moda, semirango; de dispersión: rango, variancia, desviación promedio, desviación estándar, coeficiente de variación; de asimetría: diferencias entre media, mediana y moda, así como coeficiente de asimetría; de aplanamiento: coeficiente de curtosis.
- e. Obtenga una tabla de frecuencias de los datos, con diez subintervalos o clases.
- f. Trace su histograma y compárelo con un histograma de distribución normal con la misma media y desviación estándar que la media y la desviación estándar muestrales calculadas de los datos.
- g. Trace su polígono de frecuencias relativas y su ojiva.
- h. Obtenga intervalos de confianza al 95% y al 99% de nivel de confianza de la media muestral, de la varianza muestral y de la fracción de defectuosos con respecto a las especificaciones.
- i. Calcule todos los indicadores de capacidad o habilidad de proceso.
- j. Suponga que, si el tiempo de alistamiento es menor al límite inferior de especificación, el costo por ello es de \$7.00 y si el tiempo de alistamiento es mayor al límite superior de especificación, el costo por ello es de \$19.00. Obtenga la función de pérdida de Taguchi y calcule cuál sería el costo de pérdida en promedio por cada alistamiento realizado.
15. Los siguientes datos que se muestran, corresponden con el tiempo hasta la falla de un dispositivo en una línea de producción en horas. La garantía establece que el tiempo de falla debe estar por arriba de 50 horas, de lo contrario deberán reponer el dispositivo.

| | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 38.52 | 240.00 | 11.98 | 125.03 | 124.17 | 12.77 | 140.63 | 79.19 | 7.43 | 25.20 | 16.06 |
| 53.04 | 33.07 | 75.80 | 184.72 | 11.05 | 14.81 | 60.97 | 42.07 | 62.28 | 235.68 | 43.21 |
| 68.48 | 9.18 | 39.70 | 70.27 | 338.17 | 64.93 | 55.32 | 5.78 | 14.23 | 57.15 | 111.43 |
| 116.23 | 4.19 | 4.13 | 6.45 | 28.88 | 29.57 | 73.89 | 137.92 | 6.59 | 99.17 | 59.93 |
| 53.14 | 52.77 | 14.64 | 93.10 | 86.12 | 10.18 | 1.47 | 100.10 | 86.09 | 155.76 | 97.86 |
| 123.23 | 198.51 | 157.51 | 138.60 | 98.13 | 31.51 | 102.68 | 18.72 | 131.08 | 263.81 | 10.86 |
| 271.19 | 104.49 | 337.74 | 111.52 | 13.34 | 6.65 | 141.91 | 8.51 | 31.77 | 167.29 | 18.21 |
| 29.72 | 234.67 | 50.69 | 14.10 | 125.20 | 115.80 | 277.17 | 70.22 | 156.81 | 56.53 | 12.42 |
| 31.65 | 35.53 | 39.33 | 72.79 | 244.02 | 242.48 | 96.44 | 21.04 | 60.98 | 293.16 | 128.84 |
| 14.52 | 3.73 | 119.06 | 73.48 | 25.48 | 157.08 | 32.00 | 238.88 | 67.33 | 65.42 | 126.56 |
| 30.23 | 83.89 | 107.86 | 47.61 | 35.24 | 25.77 | 3.54 | 151.00 | 18.73 | 63.20 | 63.63 |

- a. Suponga que cada fila representa un subgrupo racional. Elabore un diagrama de caja múltiple que muestre las cajas de cada subgrupo racional.
- b. ¿Considera usted que los datos en forma conjunta se comportan aleatoriamente con distribución normal? Utilice para ello diferentes métodos: papel probabilístico normal, Ji-Cuadrada, D de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Ryan-Joiner, Shapiro Wilk, Cramer-Von Mises, Pearson y Shapiro-Francia, usando para ello Excel, Minitab y R.
- c. Pruebe la hipótesis de que la población se comporta como una distribución exponencial negativa.
- d. Calcule los parámetros muestrales de tendencia central: media aritmética, media geométrica, media armónica, mediana, moda, semirango; de dispersión: rango, variancia, desviación promedio, desviación estándar, coeficiente de variación; de asimetría: diferencias entre media, mediana y moda, así como coeficiente de asimetría; de aplanamiento: coeficiente de curtosis de cada subgrupo racional.
- e. Obtenga intervalos de confianza al 95% y al 99% de nivel de confianza de la media muestral, de la varianza muestral y de la fracción de defectuosos con respecto a la garantía.
- f. Pruebe la hipótesis de que la varianza de la fila tres es igual a la varianza de la fila cinco. Pruebe la hipótesis de que la media de la fila tres es igual a la media de la fila cinco.
- g. Pruebe la hipótesis de que la varianza de la fila siete es igual a la varianza de la fila once. Pruebe la hipótesis de que la media de la fila siete es igual a la media de la fila once.
- h. Pruebe la hipótesis de que la fracción defectuosa, de acuerdo a la garantía, de las primeras cinco filas es igual a la fracción defectuosa de las últimas seis filas.
- i. Calcule los indicadores de capacidad o habilidad de proceso pertinentes.
- j. Suponga que, si el tiempo de falla es menor al tiempo de garantía, el costo de reposición es de \$1,000.00. Obtenga la función de pérdida de Taguchi y calcule cuál sería el costo de pérdida en promedio por cada dispositivo fallado.

- 16.** El Bar Salsipuedes decide demostrarle a sus clientes que cumple con la cantidad de tequila que les sirve en cada una de sus copas a cada uno de sus clientes. Para ello, usa un caballito de 2 onzas. La especificación establece que debe servirles al menos 1.8 onzas en cada copa. Explique cómo sería aplicar el diagrama de precontrol.
- 17.** Ejemplifique la aplicación de un diagrama de precontrol en una actividad que usted tenga que realizar en forma rutinaria.
- 18.** El equipo de fútbol Pumas UNAM, desde el 2010 al 2017, ha presentado el desempeño que se muestra a continuación.

| Temporada | Posición | Ganados | Puntos | Goles Favor | Goles Contra |
|-----------|----------|---------|--------|-------------|--------------|
| 2010 A | 3 | 7 | 25 | 23 | 24 |
| 2010 C | 1 | 10 | 35 | 27 | 13 |
| 2011 A | 9 | 7 | 25 | 19 | 25 |
| 2011 C | 13 | 3 | 16 | 13 | 18 |
| 2012 A | 10 | 7 | 23 | 18 | 23 |
| 2012 C | 7 | 8 | 29 | 19 | 14 |
| 2013 A | 18 | 1 | 11 | 8 | 21 |
| 2013 C | 3 | 7 | 25 | 26 | 20 |
| 2014 A | 8 | 6 | 24 | 24 | 20 |
| 2014 C | 13 | 6 | 22 | 22 | 27 |
| 2015 A | 1 | 11 | 35 | 37 | 20 |
| 2015 C | 10 | 5 | 22 | 23 | 24 |
| 2016 A | 6 | 8 | 27 | 28 | 22 |
| 2016 C | 17 | 5 | 18 | 21 | 30 |
| 2017 A | 18 | 3 | 13 | 14 | 25 |
| 2017 C | 7 | 6 | 24 | 24 | 24 |

Fuente: <http://es.fcstats.com/club,estadistica,pumas-unam,1095,39093.php>

El número de partidos que cada equipo juega en cada torneo es 17. Cada año hay dos torneos: Apertura y Clausura. No se tomaron en cuenta otro tipo de torneos donde participa el Pumas.

- a.** Calcule estadísticas de tendencia central, de dispersión, de asimetría y de curtosis, de la muestra dada para cada una de sus características (Posición, Partidos Ganados, Puntos Obtenidos, Goles a Favor, Goles en contra).

- b.** Pruebe la hipótesis de si el número de partidos ganados presenta distribución binomial.
 - c.** Pruebe la hipótesis de si el número de puntos obtenidos presenta distribución normal.
 - d.** Calcule intervalos de confianza al 95% y al 99% de la media de los partidos ganados y de su varianza.
 - e.** Calcule intervalos de confianza al 95% y al 99% de la media de los puntos obtenidos y de su varianza.
 - f.** Elabore una regresión entre el número de partidos ganados y el número de puntos obtenidos. ¿Existe correlación entre ellos?
 - g.** Suponga que el presidente del Club desea establecer un diagrama de control para el número de partidos ganados en cada torneo. ¿Qué tipo de diagrama de control le recomendaría aplicar? Fundamente su respuesta.
 - h.** Suponga que el presidente del Club desea establecer un diagrama de control para el número de puntos obtenidos en cada torneo. ¿Qué tipo de diagrama de control le recomendaría aplicar? Fundamente su respuesta.
 - i.** Calcule los límites de control del diagrama elegido en los incisos g y h.
 - j.** Trace los diagramas de control de los incisos g y h.
 - k.** Considera usted que el proceso de los incisos g y h se encuentra bajo control.
 - l.** Suponga que el Presidente del Club establece que el Pumas debe ganar al menos ocho partidos en cada torneo. Calcule la capacidad de proceso.
 - m.** Suponga que el Presidente del Club establece que el Pumas debe hacer al menos 15 puntos en cada torneo. Calcule la capacidad de proceso.
- 19.** La Piccola Trattoria es un restaurante típico italiano de Polanco, cuyo principal producto son las pizzas. Durante un mes lleva el registro de pizzas vendidas diariamente. A cada cliente que consume una pizza le pregunta si le gustó o no le gustó, obteniendo los siguientes datos.

| Día | No. Pizzas | No gustaron |
|-----|------------|-------------|
| 1 | 100 | 0 |
| 2 | 96 | 2 |
| 3 | 98 | 4 |
| 4 | 103 | 5 |
| 5 | 97 | 6 |
| 6 | 102 | 4 |
| 7 | 100 | 2 |
| 8 | 91 | 2 |
| 9 | 102 | 3 |
| 10 | 101 | 6 |
| 11 | 100 | 3 |
| 12 | 97 | 10 |
| 13 | 99 | 4 |
| 14 | 99 | 5 |
| 15 | 101 | 4 |
| 16 | 94 | 2 |
| 17 | 99 | 6 |
| 18 | 106 | 2 |
| 19 | 102 | 1 |
| 20 | 103 | 2 |
| 21 | 99 | 2 |
| 22 | 100 | 3 |
| 23 | 95 | 2 |
| 24 | 94 | 4 |

- a. ¿Qué tipo de diagrama de control aplicaría? Justifique su respuesta.
- b. Calcule los límites de control revisados del diagrama elegido.
- c. Trace su gráfica de control.
- d. Determine si el proceso se encuentra bajo control.
- e. Con los límites de control estimados suponga que se obtienen 15 muestras más, las cuales se muestran a continuación. Trace el diagrama de control de estos puntos con los límites obtenidos previamente, con base en el diagrama, considere que el proceso sigue igual o piensa que el proceso ya cambió. ¿Mejóro o empeoró el proceso?

| Día | No. Pizzas | No gustaron |
|-----|------------|-------------|
| 25 | 101 | 2 |
| 26 | 104 | 1 |
| 27 | 100 | 3 |
| 28 | 100 | 1 |
| 29 | 105 | 6 |
| 30 | 100 | 2 |
| 31 | 100 | 4 |
| 32 | 102 | 6 |
| 33 | 104 | 4 |
| 34 | 96 | 6 |
| 35 | 103 | 1 |
| 36 | 99 | 0 |
| 37 | 94 | 6 |
| 38 | 97 | 6 |
| 39 | 99 | 2 |

20. Una empresa fabricante de escritorios del pueblo de San Pedro Totolpec, Estado de México, fabrica alrededor de 100 escritorios en promedio mensualmente y los revisa para detectar imperfecciones. A continuación se muestra el resultado de hacerlo durante 20 meses.

| No. Lote | No. Escritorios | No. Errores |
|----------|-----------------|-------------|
| 1 | 102 | 3 |
| 2 | 99 | 4 |
| 3 | 101 | 0 |
| 4 | 96 | 0 |
| 5 | 100 | 1 |
| 6 | 99 | 2 |
| 7 | 105 | 3 |
| 8 | 102 | 5 |
| 9 | 98 | 7 |
| 10 | 98 | 4 |
| 11 | 97 | 2 |
| 12 | 99 | 10 |
| 13 | 97 | 2 |
| 14 | 99 | 6 |
| 15 | 97 | 9 |
| 16 | 98 | 7 |
| 17 | 102 | 8 |
| 18 | 98 | 9 |
| 19 | 99 | 8 |
| 20 | 99 | 7 |

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 2987 | 3008 | 2972 | 3041 | 3008 |
| 2 | 3062 | 2961 | 2986 | 2971 | 3080 |
| 3 | 2965 | 2938 | 3040 | 3003 | 2994 |
| 4 | 2900 | 3019 | 3037 | 3004 | 3037 |
| 5 | 2987 | 2930 | 3098 | 2986 | 2993 |
| 6 | 3000 | 3022 | 3053 | 2981 | 2989 |
| 7 | 3003 | 3008 | 3036 | 2968 | 3026 |
| 8 | 3007 | 2973 | 3049 | 2992 | 3039 |
| 9 | 3070 | 2998 | 3021 | 3032 | 2988 |
| 10 | 3002 | 2956 | 3007 | 2950 | 2989 |
| 11 | 2987 | 3031 | 3041 | 2989 | 2993 |
| 12 | 2947 | 3004 | 3009 | 3009 | 2950 |
| 13 | 2900 | 3072 | 2952 | 2952 | 2938 |
| 14 | 2932 | 2952 | 2990 | 3034 | 2975 |
| 15 | 3042 | 3010 | 2981 | 3004 | 2974 |
| 16 | 3022 | 2975 | 3011 | 2992 | 2993 |
| 17 | 3040 | 3008 | 3012 | 2963 | 2991 |
| 18 | 3018 | 3013 | 3016 | 3003 | 3005 |
| 19 | 2939 | 2988 | 2958 | 3001 | 3023 |
| 20 | 3003 | 2972 | 2985 | 2960 | 3036 |
| 21 | 3062 | 2984 | 3011 | 3021 | 2967 |
| 22 | 2960 | 2962 | 3059 | 3034 | 3088 |
| 23 | 2931 | 2987 | 3038 | 2975 | 3005 |
| 24 | 3043 | 3041 | 3001 | 2988 | 3009 |
| 25 | 3056 | 3006 | 3032 | 2946 | 2988 |

- Realice una prueba de hipótesis sobre si los datos presentan distribución uniforme con $a = 2950$ y $b = 3050$.
- Considera usted que los datos pueden suponerse normales.
- ¿Qué tipo de diagrama de control aplicaría? Justifique su respuesta.
- Calcule los límites de control del diagrama elegido.
- Trace su gráfica de control.
- Determine si el proceso se encuentra bajo control.
- Calcule la media y la desviación estándar de proceso.
- Determine la fracción defectuosa de proceso por debajo del límite inferior de proceso, la fracción defectuosa por encima del límite superior de proceso y la fracción defectuosa total.

- i. Obtenga los indicadores de análisis de capacidad y/o habilidad de proceso y determine si el proceso es capaz.
- j. ¿Cuál es la primera acción que emprendería para mejorar el proceso?
- k. ¿Cuál sería el mejoramiento si se logra centrar la media de proceso en la media de diseño?
- l. Con los límites de control estimados suponga que se obtienen 15 muestras más, las cuales se muestran a continuación. Trace el diagrama de control de estos puntos con los límites obtenidos previamente, con base en el diagrama, considera que el proceso sigue igual o piensa que el proceso ya cambió. ¿Mejóro o empeoró el proceso?

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 26 | 3019 | 2977 | 2933 | 3000 | 2983 |
| 27 | 3000 | 2954 | 2941 | 2932 | 2932 |
| 28 | 3006 | 3017 | 2981 | 2998 | 2995 |
| 29 | 2936 | 3018 | 2989 | 3019 | 3009 |
| 30 | 2969 | 2952 | 3011 | 2934 | 3002 |
| 31 | 2954 | 2970 | 2937 | 2942 | 3016 |
| 32 | 3000 | 2965 | 2977 | 2943 | 2955 |
| 33 | 2998 | 2947 | 2983 | 2951 | 2972 |
| 34 | 2989 | 2968 | 3024 | 2963 | 2926 |
| 35 | 2968 | 2930 | 2965 | 2956 | 2992 |
| 36 | 3013 | 2997 | 3013 | 2928 | 2978 |
| 37 | 2951 | 2996 | 2983 | 2939 | 2953 |
| 38 | 2935 | 3011 | 2976 | 2980 | 3009 |
| 39 | 2996 | 3015 | 2978 | 2993 | 2925 |
| 40 | 2995 | 3003 | 2946 | 3014 | 2976 |

22. Una empresa necesita controlar el tiempo hasta la falla de un dispositivo en una línea de producción en horas. Con el objeto de diseñar un diagrama de control, se tomaron 10 muestras de tamaño $n= 11$ cada una. La garantía establece que el tiempo de falla debe estar por arriba de 50 horas, de lo contrario deberán reponer el dispositivo.

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | x_{10} | x_{11} |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|----------|
| 1 | 38.52 | 240.00 | 11.98 | 125.03 | 124.17 | 12.77 | 140.63 | 79.19 | 7.43 | 25.20 | 16.06 |
| 2 | 53.04 | 33.07 | 75.80 | 184.72 | 11.05 | 14.81 | 60.97 | 42.07 | 62.28 | 235.68 | 43.21 |
| 3 | 68.48 | 9.18 | 39.70 | 70.27 | 338.17 | 64.93 | 55.32 | 5.78 | 14.23 | 57.15 | 111.43 |
| 4 | 116.23 | 4.19 | 4.13 | 6.45 | 28.88 | 29.57 | 73.89 | 137.92 | 6.59 | 99.17 | 59.93 |
| 5 | 53.14 | 52.77 | 14.64 | 93.10 | 86.12 | 10.18 | 1.47 | 100.10 | 86.09 | 155.76 | 97.86 |
| 6 | 123.23 | 198.51 | 157.51 | 138.60 | 98.13 | 31.51 | 102.68 | 18.72 | 131.08 | 263.81 | 10.86 |
| 7 | 271.19 | 104.49 | 337.74 | 111.52 | 13.34 | 6.65 | 141.91 | 8.51 | 31.77 | 167.29 | 18.21 |
| 8 | 29.72 | 234.67 | 50.69 | 14.10 | 125.20 | 115.80 | 277.17 | 70.22 | 156.81 | 56.53 | 12.42 |
| 9 | 31.65 | 35.53 | 39.33 | 72.79 | 244.02 | 242.48 | 96.44 | 21.04 | 60.98 | 293.16 | 128.84 |
| 10 | 14.52 | 3.73 | 119.06 | 73.48 | 25.48 | 157.08 | 32.00 | 238.88 | 67.33 | 65.42 | 126.56 |

- ¿Qué tipo de diagrama de control aplicaría? Justifique su respuesta.
- Calcule los límites de control del diagrama elegido.
- Trace su gráfica de control.
- Determine si el proceso se encuentra bajo control.
- Calcule la media y la desviación estándar de proceso.
- Determine la fracción defectuosa de proceso por debajo del límite inferior de proceso.
- Obtenga los indicadores de análisis de capacidad y/o habilidad de proceso y determine si el proceso es capaz.
- Con los límites de control estimados suponga que se obtienen 10 muestras más, las cuales se muestran a continuación. Trace el diagrama de control de estos puntos con los límites obtenidos previamente, con base en el diagrama, considere que el proceso sigue igual o piensa que el proceso ya cambió. ¿Mejóro o empeoró el proceso?

| Muestra | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | x_{10} | x_{11} |
|---------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|----------|----------|
| 1 | 30.23 | 83.89 | 107.86 | 47.61 | 35.24 | 25.77 | 3.54 | 151.00 | 18.73 | 63.20 | 63.63 |
| 2 | 44.56 | 10 | 7.61 | 1.11 | 1.18 | 15.68 | 39.84 | 13.86 | 5.6 | 1.86 | 68.25 |
| 3 | 1.74 | 7.75 | 3.67 | 9.7 | 9.69 | 3.83 | 13.46 | 12.3 | 1.16 | 11.93 | 6.6 |
| 4 | 36.59 | 25.27 | 3.15 | 29.15 | 85.03 | 17.68 | 12.85 | 25.19 | 1.94 | 32.21 | 10.22 |
| 5 | 19.25 | 1.62 | 45.5 | 14.07 | 23.62 | 69.69 | 22.19 | 34.19 | 30.61 | 49.82 | 0.77 |
| 6 | 30.28 | 34.03 | 0.2 | 54.22 | 20.81 | 14.79 | 19.3 | 11.81 | 5.11 | 52.57 | 2.31 |
| 7 | 3.25 | 94.74 | 2.12 | 0.44 | 3.35 | 1 | 6.15 | 46.33 | 14.8 | 16.84 | 5.61 |
| 8 | 7.02 | 54.57 | 10.67 | 3.83 | 26.25 | 8.71 | 19.66 | 23.12 | 18.37 | 26.1 | 16.64 |
| 9 | 10.91 | 52.99 | 59.95 | 26.44 | 2.89 | 4.65 | 10.83 | 12.16 | 43.75 | 12.3 | 42.48 |
| 10 | 26.81 | 4.75 | 23.24 | 56.42 | 1.81 | 1.85 | 3.2 | 48.67 | 51.11 | 11.31 | 51.9 |

- Para los datos iniciales del ejercicio 21, obtenga un gráfico de control para la varianza muestral.
- Para los datos iniciales del ejercicio 22, obtenga un gráfico de control para la varianza muestral.

25. Para los partidos ganados por el equipo Pumas en el ejercicio 18, obtenga un diagrama de control de valores individuales y de rangos móviles.
26. Para los puntos obtenidos por el equipo Pumas en el ejercicio 18, obtenga un diagrama de control de valores individuales y de rangos móviles.
27. Para los datos iniciales del ejercicio 21 obtenga un diagrama de control CUSUM de medias y un diagrama de control CUSUM de desviaciones estándar.
28. Para los datos iniciales del ejercicio 22 obtenga un diagrama de control CUSUM de medias y un diagrama de control CUSUM de desviaciones estándar.
29. Para los datos iniciales del ejercicio 21 obtenga un diagrama de control EWMA de medias y un diagrama de control EWMA de desviaciones estándar.
30. Para los datos iniciales del ejercicio 22 obtenga un diagrama de control EWMA de medias y un diagrama de control EWMA de desviaciones estándar.
31. Los datos iniciales del ejercicio 22 presentan distribución geométrica. Determine un diagrama de control tipo g.

Bibliografía

1. Bisham C. Gupta (2021). Statistical Quality Control using Minitab, R, JMP and Phyton.
2. Knoth S, et al (2021). Frontiers in Statistical Quality Control 13. Springer.
3. Montgomery Douglas C (2020). Introduction to Statistical Quality Control, 8ª Edition, John Wiley and Sons.
4. Shewhart Walter A. The Economic Control of Quality of Manufactured Product. Van Nostrand Company, 1931.
5. J. M. Juran and F. M. Gryna. Quality Control Handbook. McGraw-Hill, 1951 (4ª edición 1988).
6. Duncan Acheson Jonhston. Control de Calidad y Estadística Industrial. Ed. Alfaomega, México.
7. DeVor Richard E., Chang Tsong-How and Sutherland John W. Statistical Quality Design and Control. Maxwell Macmillan International Edition, 1992.
8. Grant, E. L. y Leavenworth, R. S. Control Estadístico de Calidad. 6ª Edición. Editorial CECSA, 2006.
9. Hayes, Glen E. y Romig Harry G. Modern Quality Control. Benziger Bruce & Glencoe Inc. 1997

Revistas

1. Quality Progress. American Society for Quality (ASQ). Publicación mensual.
2. Journal of Quality Technology. American Society for Quality (ASQ). Publicación trimestral.
3. Quality Engineering. American Society for Quality (ASQ). Publicación trimestral.
4. Quality Management Journal. American Society for Quality (ASQ). Publicación mensual.
5. Technometrics. American Society for Quality (ASQ). Publicación trimestral.



SERIE DE CALIDAD Y ESTADÍSTICA INDUSTRIAL
Control estadístico de calidad de procesos

se publicó digitalmente en el repositorio de
la Facultad de Ingeniería
en noviembre de 2025. Primera edición
electrónica de un ejemplar
(14 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño
estuvieron a cargo de la Unidad de Apoyo
Editorial de la Facultad de Ingeniería.

La familia tipográfica utilizada fue
Source Serif Pro para títulos y textos con sus
respectivas variantes.