



**Guía de estudio**  
para preparar exámenes de

# Ecuaciones Diferenciales

**Coordinación de Ciencias Aplicadas**





Cortés Rosas Jesús Javier  
Cuadros Mendoza Ivan Manuel  
García Casanova Verónica Hikra  
Godínez Rojano Francisco Antonio  
González Cárdenas Miguel Eduardo  
Guevara Corona Erik Norman  
Gutiérrez Arenas Rodrigo Alejandro  
Guzmán González Roberto  
Hernández Vargas Roberto  
López Domínguez Gabriel  
Martínez Alavez Jacquelyn  
Martínez Ávalos Raquel  
Patiño Ramírez Jesús Antonio  
Ruiz Medina Jesús Edmundo  
Salazar Guerrero Evelyn  
Vázquez Lorenzana César  
Zárraga Martínez Jesús Alfredo



Para una correcta visualización  
del libro te sugerimos

Acrobat Reader  
Haz Click

*Guía de estudio para preparar exámenes  
de Ecuaciones Diferenciales*  
Salazar Guerrero, Evelyn, et al.  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería  
2024, 372 págs.

---

*Guía de estudio para preparar exámenes  
de Ecuaciones Diferenciales*

Primera edición electrónica provisional  
de un ejemplar (5 MB) en formato PDF  
Publicado en línea: noviembre de 2024

D.R. © 2024, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de  
México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán,  
Ciudad de México, C.P. 04510

FACULTAD DE INGENIERÍA  
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad  
Nacional Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión  
total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de  
los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

---

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL  
Cuidado de la edición: Elvia Angélica Torres Rojas  
Formación editorial y vectores de portada: Nismet Díaz Ferro

ÍNDICE

TEMA 1

TEMA 2

TEMA 3

TEMA 4

APLICACIONES

III

# Índice

**Introducción**

**1**

**¿Cómo se prepara un examen?**

**3**

## **Tema 1**

Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

**10**

## **Tema 2**

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

**109**

## **Tema 3**

Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

**214**

## **Tema 4**

Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

**301**

**Aplicaciones de ecuaciones diferenciales**

**362**

# Introducción

El proceso de ser estudiante conlleva varias situaciones muy emocionantes, algunas de ellas comienzan desde el primer día cuando llegas al salón de clases, el nerviosismo que se siente al conocer a tus nuevos compañeros y profesores, conocer el plantel, los contenidos de las asignaturas, de hecho, desde el haberte sabido aceptado en la Facultad, en fin, cada uno de nosotros podríamos al menos mencionar una situación muy particular vivida como estudiante.

Otra situación que está muy relacionada con ser estudiante es el presentar evaluaciones, que en la mayoría de los casos se relacionan con EXÁMENES, palabra que, comúnmente, además de emoción causa incertidumbre, ansiedad, nervios, provoca síntomas corporales, como sudor, aceleración del ritmo cardíaco y de la respiración. Es muy normal, sin embargo, en ocasiones, el no poder controlar las emociones adecuadamente nos lleva a obtener resultados no satisfactorios.

Varias de esas sintomatologías se pueden mitigar o disminuir si estamos conscientes del grado de capacitación o preparación que hemos invertido para presentar el examen, por ello, ponemos a tu disposición el siguiente material que podrías utilizar para preparar tus evaluaciones de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, cuenta con más de 160 ejercicios resueltos paso a paso, describiendo detalladamente cada uno de ellos, tal como te lo explicaría tu profesor en el salón de clases, además de que al principio de cada uno de ellos te mencionamos qué concepto o conceptos están involucrados en la resolución del ejercicio, así como también los conceptos antecedentes que requerirás saber para entender algunos de los pasos algebraicos u operaciones matemáticas que se realizan para resolverlo.

También incluye algunos ejemplos de aplicación que te servirán para identificar en dónde podrías encontrarte una ecuación diferencial como modelo matemático de algún fenómeno físico.

Te sugerimos que leas desde el principio de la guía, ya que incorporamos unos breves consejos que te ayudarán a mejorar la forma en la que te preparas para las evaluaciones de todas tus asignaturas.

Todos los profesores de esta guía deseamos que en verdad te ayude a mejorar tu desempeño en los exámenes, ya que estamos seguros de que la capacidad la tienes, solo debes que prepararte lo suficiente para poder demostrarlo.

# ¿Cómo se prepara un examen?

Antes que nada, empezaremos por recordar que el preparar un examen no es algo fácil; no existen pastillas, ni métodos mágicos para aprobar. Se requiere de un gran esfuerzo de nuestra parte.

Hay un gran número de personas que les cuesta mucho concentrarse y estudiar. La mayoría de ellos conoce varias técnicas de estudio, sin embargo, pocas las aplican en su vida de estudiante. Después de tantos años de estudio, imagino que debes conocer bastantes técnicas de estudio y ya has probado cuál es la técnica que se te acomoda mejor.

Puede que varios de estos consejos ya sean conocidos, te parezcan obvios y sepas de lo que te estamos hablando, pero lo importante es aplicar lo siguiente en tu vida de estudiante, es decir, no solo te quedes en conocer y leer lo que dice esta guía sino también aplícalos, ten por seguro que si sigues estos consejos te ira mejor en tus estudios.

## Entrenamiento para el examen

### **1** Ten motivación y fuerza de voluntad.

Sabemos que puedes repetirte frases como: “soy el mejor”, “puedo con todo”, “voy a conseguirlo”, “confío en mí”, etc. Por supuesto que esto sirve como una gran motivación, sin embargo, esto no es suficiente, “debemos ponernos a trabajar”.

Quizá sientas como una obligación estudiar algo que detestas, ya que debemos aceptar que no todos somos buenos para ciertos temas. Seguramente has pensado cosas como: ¿para qué voy a estudiar estas cosas si no me sirven de nada?. Nadie dijo que estudiar fuera sencillo, ni divertido todo el tiempo, ni siempre estimulante y en este caso debes ser lo más positivo posible.

Si empiezas con mala gana y con el pensamiento de no quererlo estudiar, ¿te digo algo?, esto te va a costar el doble o el triple de trabajo. Piensa que todo lo que estudies te va a ayudar de una forma o de otra.

Pon en una balanza lo bueno y lo malo y verás que la balanza siempre se inclinará hacia lo bueno.

Aquí algunos ejemplos:

- a.** Si estudias dedicadamente te olvidarás por fin de presentar esta materia que tanto trabajo te ha costado.
- b.** El simple hecho de estudiar y meter información en el cerebro hace que se entrene la memoria. Estudies lo que estudies siempre te va a ayudar a ser más inteligente, más rápido y estar más “despierto” en cualquier tema, no solo escolar.
- c.** Si realmente comprendes los temas que estudias te será más fácil entender y aprobar las materias de semestres posteriores que se relacionen con la materia que deseas aprobar.

Organízate con compañeros que tengan el mismo fin, elaboren en conjunto un calendario de estudios, sigan una estrategia y motívense entre ustedes. Sean positivos, piensen en todos los beneficios que les traerá el estudiar correctamente.

## **2 Elige bien el lugar donde estudias.**

Tener un lugar cómodo con buena iluminación, sin ruido de fondo, ordenado y que no haya distracciones mejora notablemente el aprendizaje.

Mantén siempre una mesa limpia y sin muchas cosas sobre ella. Es recomendable estudiar con una luz blanca y fría para que no te moleste el calor de la luz amarilla.

Trata de encontrar un lugar donde puedas concentrarte y no haya interrupciones ni ruidos externos que te distraigan. Busca un sitio cómodo (pero no tan cómodo), no vayas a quedarte dormido.

## **3 Descansa y despeja tu mente de vez en cuando.**

Los descansos son muy importantes tanto como dormir bien, cada media hora o quizás cada hora dependiendo de cómo seas.

Recuerda, un descanso no significa ir a ver la televisión, ponerse a jugar con el teléfono o la computadora ni mucho menos estar escribiendo mensajes.

Descansa el cerebro, intenta relajarte en una cama, no te vayas a quedar dormido, solo si el tiempo te lo permite puedes dormir media hora o una hora para relajarte.

Descansa preferentemente en la oscuridad y sin ningún estímulo o ruido.

Desconéctate completamente y trata de no pensar en nada, de lo que se trata es que tu cerebro descanse un poco y que las ideas que ya has aprendido previamente se vayan fijando poco a poco en tu cerebro.

## **4 Recapacita sobre lo que estudias para asimilar y recordar mejor.**

Debes estar enfocado en lo que vas a estudiar, si estás pensando en otra cosa de nada te va a servir y solo desperdiciarás tiempo. Es necesario que estés relajado para estudiar, trata de pensar solo en una materia a la vez y no tengas otros pensamientos. ¿Cuántas veces te ha pasado que estás leyendo algo, pero tu mente está viajando en otras cosas y al terminar de leer...? ¡Ooops! No recuerdas nada de lo que hemos leído.

Estar pensando y concentrado en lo que estás leyendo o estudiando, haciendo un esquema y poniendo puntos clave ayuda mucho a fijar lo que quieres aprender.

Analizar lo que estudias y preguntarte siempre el porqué de lo que estudias.

Nunca te quedes con lo que dice el profesor, pregunta todas las dudas que tengas desde la clase o busca asesorías. Pregúntate a ti mismo todo lo que creas que es posible te pregunten en un examen.

Organiza sesiones de preguntas y respuestas en grupo para repasar lo aprendido y resolver dudas. Resuelvan en conjunto todos los exámenes pasados a los que tengas acceso y nuevamente recuerda, si hay algo que no entiendas, acércate con tu profesor o un asesor para que te resuelva la duda.

Haz un resumen de los conceptos más importantes para repasar un día antes del examen y así no tengas que cargar con todos los libros.

## **5 Mantén una dieta equilibrada, ejercítate constantemente y no dejes de dormir.**

El cuerpo es como una máquina, si no tiene combustible suficiente no puede funcionar bien. El cerebro realmente necesita una cantidad de energía para funcionar correctamente.

Lo primero es hidratarte correctamente durante el día, no malinterpretes con tomar quince litros de agua al día y tengas que pararte al baño cada 10 minutos. El cerebro necesita estar húmedo. Te aconsejamos no tomes café en exceso, puedes tomarte una o dos tazas, pero no más, ya que esto va a hacer que te pongas más nervioso y las ideas se mezclen.

Mantén una dieta equilibrada con frutos secos, frutas, verduras y trata de evitar la “comida chatarra”.

Aunque no lo creas, el tener los nutrientes necesarios ayuda a fijar mejor las ideas.

No comas demasiado cuando estás estudiando, ya que la sangre se va a concentrar en tu estómago para hacer digestión; come ligero, pero bien, para que la sangre también llegue al cerebro.

Duerme bien los días previos al examen y si cuando estés estudiando estás agotado de tanto estudio y el tiempo te lo permite, toma una siesta de media hora o una hora. Come un poco de chocolate oscuro (solo un poco), ya que la glucosa ayudará a tu cerebro, pero si comes en exceso te provocará sueño.

El ejercicio también es importante, no lo dejes a un lado, además de ayudarte a estar en forma, ayuda a deshacerte de las toxinas del cuerpo, estar relajado, pensar en otras cosas y relajar tu mente.

### **Días previos y antes de entrar al examen:**

- 1. Duerme lo suficiente en días previos y una noche antes del examen.**  
Como ya se comentó en los consejos anteriores. Tu cuerpo necesita descansar para poder fijar mejor las ideas y tu cerebro funcione de manera correcta.

## 2. No dejes todo para el último momento.

Si lo haces, no le das tiempo a la memoria para asentar la información que recibe, la memoria necesita reposo y el recuerdo será más fácil si existe orden.

## 3. Pierde los nervios.

Los nervios no sirven para nada, solo estorban, así que procura relajarte. No quieras terminarte los libros antes del examen, ni hables mucho con tus compañeros minutos antes de realizarlo, ya que te parecerá que no recuerdas nada, que te faltó mucho por estudiar y aumentará tu nerviosismo. No intentes ponerte a prueba de que recuerdas todos los temas, justo antes de un examen tu mente está en tensión, ya no puedes reforzar tu memoria, así que concéntrate en lo aprendido y confía en el esfuerzo que has hecho en todas esas semanas. Deja los nervios en el pasillo.

### En el examen:

1. Tómate tu tiempo para leer bien las preguntas de principio a fin. A veces, puede haber más de una que haga referencia al mismo tema, y tendrás que decidir el enfoque y el contenido para cada una.
2. Si cuando las has visto todas, alguna no es muy clara, no tengas miedo, pregunta al profesor y con gusto te las aclarará.
3. Antes de contestar cada pregunta en particular, léela varias veces, hasta que te asegures de su comprensión. Busca la palabra clave que te indica qué hacer: explica, demuestra, define, calcula, encuentra, resuelve, etc.
4. Después de contestar, lee nuevamente la pregunta y la respuesta que has escrito. Asegúrate que efectivamente responde lo que te preguntan.
5. No te preocupes desde un principio por el tiempo. Recuerda que un examen está diseñado para que tengas el tiempo suficiente para responder el total de las preguntas.

Calcula dejar un tiempo para darle un último repaso al examen cuando ya esté terminado.

6. Comienza por las preguntas que mejor conoces del tema y con las de mayor puntuación. La mejor forma de contestar es haciendo al principio, un esquema o estrategia que nos guíe durante el examen.
7. Cuando por alguna razón ya no hay tiempo para responder alguna pregunta expresa las ideas básicas, aunque sea de manera superficial. Así demostrarás que efectivamente sabes lo que debes contestar, pero por cuestión de tiempo no lo hiciste.
8. Procura ser claro y breve. Hacer bien un examen no consiste en escribir mucho procedimiento, sino contestar con precisión a lo que se te pregunta.

### Antes de entregar el examen revisa:

1. **El contenido.** Asegúrate de que has contestado todas las preguntas y que las respuestas estén completas, que no haya errores de contenido y de que no hayas olvidado escribir algo. Si recuerdas algo más que ayude a complementar tu respuesta, es el momento de escribirlo.
2. **La forma:** la presentación (que esté en la medida de lo posible sin borrones, ni tachaduras), la letra y números claros y legibles. Procura dejar un espacio en blanco al terminar cada respuesta, por si al repasar surgen ideas nuevas. Corrige las faltas de ortografía y los posibles errores de estilo.

Sigue estos consejos básicos desde el momento que te enteres que debes presentar un examen y ten por seguro que tu desempeño mejorará notablemente.

# TEMA 1

## Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

## Problema 1

Obtenga la ecuación diferencial que tiene como solución general a la representación analítica de todas las parábolas con eje focal paralelo al eje Y, vértice sobre la recta  $y = 3x$  y longitud del lado recto igual a ocho unidades, es decir  $4p = 8$ .

### Antecedentes

- Geometría Analítica: Representación analítica de las parábolas verticales. Ecuación de una recta.
- Cálculo Diferencial: Derivación de funciones compuestas empleando regla de la cadena. Derivación implícita.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Obtención de una ecuación diferencial a partir de la familia de soluciones.

### Solución

La representación analítica de una parábola vertical es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \dots (1)$$

donde  $p$  es la distancia del vértice al foco y del vértice a la recta directriz. Para este ejercicio  $4p = 8$ , por lo que la expresión (1) se escribe de la siguiente forma

$$(x - h)^2 = 8(y - k) \quad \dots (2)$$

Como se desea obtener una familia de soluciones (debido a que en el ejercicio se menciona como Solución General), se utilizarán constantes esenciales y arbitrarias para definir la representación genérica del vértice. Siguiendo la consideración de que el vértice de las parábolas se encuentra sobre la recta  $y = 3x$ , entonces  $v = (C, 3C)$  y la expresión (2) se puede reescribir como sigue

$$(x - C)^2 = 8(y - 3C) \quad \dots (3)$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial que se obtendrá. Para ello, se deriva una vez a la expresión (3) ya que solo hay una constante esencial y arbitraria

$$2(x - C) = 8yy'$$

y se despeja la constante  $C$

$$2x - 2C = 8yy' \rightarrow x - C = 4yy'$$

$$C = x - 4yy' \dots (4)$$

como se observa, la constante está en función de las variables independiente, dependiente y de su derivada, por lo que al sustituir la expresión (4) en (3) se obtiene la ecuación diferencial

$$[x - (x - 4yy')]^2 = 8[y - 3(x - 4yy')]$$

Simplificando se tiene la ecuación diferencial solicitada

$$16(yy')^2 = 8y - 24x + 96yy' \rightarrow 2(yy')^2 - 12yy' - y = -3x$$

$$\boxed{16(yy')^2 - 96yy' - 8y = -24x}$$

## Problema 2

Obtenga la ecuación diferencial que tiene por solución general a la familia de rectas con ordenada al origen  $b = 8$  y de cualquier pendiente.

### Antecedentes

- Geometría Analítica: Ecuación de una recta pendiente y ordenada al origen.
- Cálculo Diferencial: Derivación.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Obtención de una ecuación diferencial a partir de la familia de soluciones.

### Solución

La ecuación de una recta con pendiente y ordenada al origen es

$$y = mx + b$$

De donde sustituimos el valor de  $b = 8$  y a la pendiente se le asigna una constante  $m = C$

$$y = Cx + 8 \quad \dots (1)$$

Derivando esta expresión

$$y' = C \quad \dots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene la ecuación diferencial solicitada

$$\boxed{y = y'x + 8}$$

## Problema 3

Obtenga la ecuación diferencial que tiene por solución general a la familia de circunferencias con centro en la recta  $x = -4$  y radio 10 unidades.

### Antecedentes

- Geometría Analítica: Ecuación general de una circunferencia con centro fuera del origen.
- Cálculo Diferencial: Derivación. Derivación implícita.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Obtención de una ecuación diferencial a partir de la familia de soluciones.

### Solución

La ecuación general de una circunferencia con centro fuera del origen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Sustituyendo los valores proporcionados en el problema  $h = -4$ ,  $r = 10$  y haciendo  $k = C$

$$(x + 4)^2 + (y - C)^2 = 100 \quad \dots (1)$$

Derivando con respecto a  $x$  sabiendo que  $y$  está en función de  $x$  como  $y(x)$

$$2(x + 4) + 2(y - C)y' = 0$$

$$(x + 4) + (y - C)y' = 0$$

$$y - C = -\frac{(x + 4)}{y'} \quad \dots (2)$$

Sustituyendo ecuación (2) en (1) y simplificando

$$(x + 4)^2 + \left(-\frac{x + 4}{y'}\right)^2 = 100 \quad \rightarrow \quad (x + 4)^2 + \frac{(x + 4)^2}{(y')^2} = 100$$

$$(x + 4)^2(y')^2 + (x + 4)^2 = 100(y')^2$$

Por lo que, la ecuación diferencial en forma implícita es

$$\boxed{(x + 4)^2((y')^2 + 1) = 100(y')^2}$$

## Problema 4

Demuestre que

$$\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\varphi = 0$$

en el intervalo  $x \neq 0$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivación.

### Concepto básico para destacar

- Solución de una ecuación diferencial.

### Solución

Obteniendo la segunda derivada de la expresión  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$\varphi''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación diferencial y operando

$$\left(2 - \frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$2 - \frac{2}{x^3} - 2 + \frac{2}{x^3} = 0$$

$$0 = 0$$

Al cumplirse la igualdad, se muestra que  $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$  es solución de la ecuación diferencial.

## Problema 5

Verifique si la función

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

es solución de la ecuación diferencial

$$xy' - 2y = 0$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivación. Función definida por partes.

### Concepto básico a destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.

### Solución

Derivando a la función y que está definida en intervalos

$$y' = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y si es solución de esta, entonces deberá de satisfacer la igualdad

$$xy' - 2y = 0$$

$$\begin{cases} x(-2x) - 2(-x^2) = 0, & x < 0 \\ x(2x) - 2(x^2) = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2 + 2x^2 = 0, & x < 0 \\ 2x^2 - 2x^2 = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0, & x < 0 \\ 0 = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ya que se cumple con la igualdad, la función es solución de la ecuación diferencial.

## Problema 6

Mostrar que la relación  $x^2 + y^2 = 25$  define de manera implícita una solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

en el intervalo válido para  $x \in (-5, 5)$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Regla de la cadena. Dominio de una función.

### Concepto básico para destacar

- Solución de una ecuación diferencial.

**Solución**

Despejando a la variable  $y$  de la relación  $x^2 + y^2 = 25$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Analizando primero la parte positiva de la raíz

$$y_1 = \sqrt{25 - x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

Derivando la expresión anterior

$$y_1' = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$y_1' = -(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$y_1' = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \quad x \in (-5, 5)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Por lo tanto,  $y_1$  es una solución de la ecuación diferencial para el intervalo  $(-5, 5)$ .

Análogamente, se hace el mismo procedimiento para la parte negativa de la raíz

$$y_2 = -\sqrt{25 - x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

$$y_2' = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \quad x \in (-5, 5)$$

Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene

$$\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

Igualmente,  $y_2$  es otra solución de la ecuación diferencial para el intervalo  $(-5, 5)$ . Así, la relación  $x^2 + y^2 = 25$  es una solución implícita de la ecuación diferencial en  $x \in (-5, 5)$ .

## Problema 7

Dada la ecuación diferencial

$$(y')^2 - 2y' + 4x - 4y = 0$$

cuya solución general es

$$y = (x - C)^2 + C$$

Determine:

- Si existe, la ecuación de una solución singular.
- Construya una gráfica de la familia de soluciones.

### Antecedentes

- Geometría Analítica: Representación analítica de las parábolas verticales. Ecuación de una recta.
- Cálculo Diferencial: Derivación.
- Cálculo Integral: Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Obtención de una solución singular de una ecuación diferencial.
- Gráfica de una de la familia de soluciones.

### Solución

- a) La solución singular puede obtenerse derivando la ecuación diferencial parcialmente con respecto a  $y'$

$$\frac{\partial}{\partial y'}((y')^2 - 2y' + 4x - 4y = 0)$$

Despejando  $y'$

$$2y' - 2 = 0$$

$$y' = 1$$

Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial

$$(1)^2 - 2(1) + 4x - 4y = 0$$

$$4x - 4y = 1$$

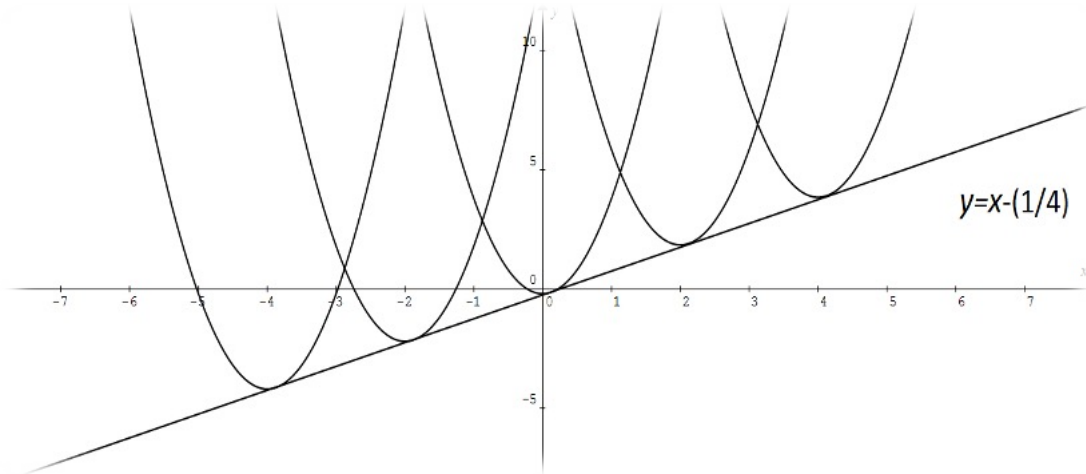
Despejando la variable  $y$

$$y = x - \frac{1}{4}$$

Esta es la solución singular pedida, la cual es una recta con pendiente igual a 1 y ordenada al origen igual a  $-\frac{1}{4}$ .

- b) En la siguiente gráfica se representan a la familia de parábolas con vértice sobre la recta

$$y = x - \frac{1}{4}$$



## Problema 8

Resuelva la ecuación diferencial

$$\left( e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x}) + \frac{1}{x^5} \right) dx - \left( \frac{1}{y} - y \ln(y^2) \right) dy = 0$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivación. Derivada de una función exponencial.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Se puede observar que las variables  $x$  y  $y$  ya se encuentran agrupadas con sus respectivos diferenciales, por lo que la solución general de la ecuación diferencial se obtiene de resolver las integrales correspondientes

$$\int \left( e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x}) + \frac{1}{x^5} \right) dx = \int \left( \frac{1}{y} - y \ln(y^2) \right) dy$$

$$\int e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x}) dx + \int \frac{dx}{x^5} = \int \frac{dy}{y} - \int (y \ln(y^2)) dy$$

No obstante, es necesario realizar algunos cambios de variable para resolver las integrales

$$e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x}): \quad u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x} dx$$

$$y \ln(y^2): \quad w = y^2 \quad dw = 2y dy$$

Sustituyendo los cambios de variables y resolviendo las integrales inmediatas

$$\frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(u) du + \int \frac{dx}{x^5} = \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int \ln(w) dw$$

$$-\frac{1}{2} \cos(u) - \frac{1}{4} x^{-4} = \ln(y) - \frac{1}{2} w \ln(w) + \frac{1}{2} w + C$$

Finalmente, se regresa a las variables originales y se obtiene la solución general

$$\boxed{-\frac{1}{2} \cos(e^{2x}) - \frac{1}{4} x^{-4} = \ln(y) - \frac{1}{2} y^2 \ln(y^2) + \frac{1}{2} y^2 + C}$$

## Problema 9

Resuelva la ecuación diferencial

$$(yx - y) dy - (y + 1) dx = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

La ecuación diferencial se resuelve con el método de variables separables. Para ello, se agrupan términos y se realizan las integrales para obtener la solución general

$$(yx - y) dy = (y + 1) dx$$

$$y(x - 1) dy = (y + 1) dx$$

$$\int \left( \frac{y}{y+1} \right) dy = \int \left( \frac{1}{x-1} \right) dx$$

Para la integral con respecto de  $y$  es necesario simplificar dicha expresión; para ello, se aplica una división de polinomios

$$\int \left( 1 - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int \left( \frac{1}{x-1} \right) dx$$

Resolviendo las integrales

$$y - \ln(y + 1) = \ln(x - 1) + C$$

$$y = \ln(x - 1) + \ln(y + 1) + C$$

Por último, usando propiedades de los logaritmos, la Solución General implícita puede escribirse como

$$\boxed{y = \ln[(x - 1)(y + 1)] + C}$$

## Problema 10

Obtenga la solución general de la ecuación diferencial y represéntela de forma explícita

$$e^x \frac{dy}{dx} = 2x$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los exponentes.
- Cálculo Diferencial: Derivación. Derivada de una función exponencial.
- Cálculo Integral: Integración por partes. Propiedades de las integrales.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

La ecuación diferencial se puede resolver con el método de variables separables. Para ello, se agrupan los términos que dependen de la variable  $y$  del lado izquierdo de la igualdad y los términos que dependen de  $x$  del lado derecho

$$e^x \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2xe^{-x} dx$$

$$\int dy = \int (2xe^{-x}) dx$$

$$\int dy = 2 \int (xe^{-x}) dx$$

La integral que depende de la variable  $x$  se resuelve por partes

$$y = 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + C$$

Por último, la solución general explícita es

$$y = -2e^{-x}(1 + x) + C$$

## Problema 11

Resuelva la ecuación diferencial

$$1 + e^{-3x}y' = 0$$

sujeta a  $y(0) = 1$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Notación de Lagrange y Leibniz para la derivada.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Propiedades de las integrales.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Empleando el método de separación de variables para obtener la Solución General de la Ecuación Diferencial

$$1 + e^{-3x} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$e^{-3x} \frac{dy}{dx} = -1$$

$$e^{-3x} dy = -dx$$

$$dy = -e^{3x} dx$$

$$\int dy = - \int e^{3x} dx$$

La solución general explícita es

$$y = -\frac{e^{3x}}{3} + C$$

A continuación, se obtiene el valor de la constante  $C$  a partir de las condiciones iniciales  $y(0) = 1$

$$1 = -\frac{e^0}{3} + C \quad \rightarrow \quad 1 = -\frac{1}{3} + C$$

$$C = \frac{4}{3}$$

Finalmente, la solución particular es

$$y = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{4}{3}$$

## Problema 12

Resuelva la siguiente ecuación diferencial sujeta a la condición inicial dada.

$$y dy = 4x(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$$

sujeta a  $y(0) = 1$

## Antecedentes

- Álgebra: Radicales.
- Cálculo Integral: Integración con cambio de variable. Integración inmediata. Propiedades de las integrales.

## Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

## Solución

La ecuación diferencial puede resolverse empleando el método de separación de variables. Es decir, se pueden agrupar los términos que dependen de la variable  $y$  con su respectivo diferencial y lo mismo con la variable  $x$

$$\frac{ydy}{(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = 4x dx$$

$$\int \frac{y}{(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dy = 4 \int x dx$$

Empleando un cambio de variable para la integral con respecto a la variable  $y$

$$w = y^2 + 1$$

$$dw = 2ydy$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dw}{(w)^{\frac{1}{2}}} = 4 \int x dx$$

$$\frac{1}{2} \left( 2w^{\frac{1}{2}} \right) = 4 \left( \frac{x^2}{2} \right) + C$$

Regresando a las variables originales para obtener la solución general

$$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$$

Aplicando las condiciones iniciales  $y(0) = 1$

$$(1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2(0) + C$$

$$C = \sqrt{2}$$

Sustituyendo el valor de  $C = \sqrt{2}$  en la solución general y simplificando

$$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + \sqrt{2}$$

$$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 2x^2 = \sqrt{2}$$

Finalmente, la solución particular queda como

$$\boxed{\sqrt{y^2 + 1} - 2x^2 = \sqrt{2}}$$

## Problema 13

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x^2 + 1)y' \tan(y) = x$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de las funciones trigonométricas. Propiedades de los logaritmos. Radicales.

- Cálculo Diferencial: Notación de Lagrange y Leibniz para la derivada.
- Cálculo Integral: Integración con cambio de variable.  
Integración de funciones trigonométricas. Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Utilizando el método de variables separables para resolver la ecuación diferencial

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} \tan(y) = x$$

$$\frac{dy}{dx} \tan(y) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\int \tan(y) dy = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{\text{sen}(y)}{\cos(y)} dy = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

Realizando un cambio de variable para las dos integrales

$$\begin{aligned} u &= \cos(y) & w &= x^2 + 1 \\ du &= -\text{sen}(y) dy & dw &= 2x dx \end{aligned}$$

Sustituyendo los respectivos cambios de variable y resolviendo las integrales

$$-\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w}$$

$$-\ln(u) = \frac{1}{2} \ln(w) + C$$

Regresando a las variables originales

$$-\ln(\cos(y)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

Que es una solución general implícita, aplicando algunas propiedades de los logaritmos para simplificar esta solución

$$\ln(\cos(y))^{-1} - \ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = C$$

$$\ln(\sec(y)) + \ln(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = C$$

$$\ln\left(\frac{\sec(y)}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = C$$

Al aplicar la función exponencial en ambos lados se llega a

$$\frac{\sec(y)}{\sqrt{x^2 + 1}} = C$$

$$\boxed{\sec(y) = C\sqrt{x^2 + 1}}$$

## Problema 14

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{x^2} = (2 + 2y^2 - x^3 - y^2x^3)dx$$

### Antecedentes

- Álgebra: Factorización con factor común.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Propiedades de las integrales.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Empleando álgebra para agrupar términos del lado derecho de la igualdad en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (2 - x^3 + 2y^2 - y^2x^3)x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = [2(1 + y^2) - x^3(1 + y^2)]x^2$$

Ahora, se observa un factor común que es  $(1 + y^2)$ , por lo que al factorizar se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = [(1 + y^2)(2 - x^3)]x^2$$

De donde se tienen dos factores que dependen exclusivamente de  $x$  y un factor que depende exclusivamente de  $y$ , por lo que es posible encontrar su solución general con el método de variables separables

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (2 - x^3)x^2 dx$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (2x^2 - x^5) dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = 2 \int x^2 dx - \int x^5 dx$$

Por lo tanto, la solución general explícita de la ecuación diferencial es

$$\text{angtan}(y) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 + C$$

## Problema 15

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Descomposición en fracciones parciales. Propiedades de las integrales.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

La ecuación diferencial puede resolverse con el método de variables separables, para ello se agrupan de un lado de la igualdad los términos que dependen exclusivamente de la variable "y" y del otro lado los que dependen de la variable "x"

$$\frac{dy}{dx} = \left[ \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \right] \left[ \frac{(y-1)(y+3)}{y-2} \right]$$

$$\int \frac{y-2}{(y-1)(y+3)} dy = \int \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} dx$$

Para resolver las integrales es necesario descomponerlas en fracciones parciales

$$\frac{y-2}{(y-1)(y+3)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+3}$$

Donde

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{4}$$

Como las dos integrales resultantes al separar variables son las mismas, solo que dependen de diferentes variables, se realiza el mismo procedimiento para la integral con respecto de  $x$  y se tienen los mismos valores

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+3)} = \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+3}$$

$$D = -\frac{1}{4}, \quad E = \frac{5}{4}$$

Las integrales quedan como

$$\int \frac{-\frac{1}{4}}{y-1} dy + \int \frac{\frac{5}{4}}{y+3} dy = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{5}{4}}{x+3} dx$$

$$-\frac{1}{4} \ln(y-1) + \frac{5}{4} \ln(y+3) = -\frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{5}{4} \ln(x+3) + C$$

Esta es la solución general implícita de la ecuación diferencial. Esta solución puede simplificarse al multiplicarse por 4 empleando algunas propiedades de los logaritmos

$$-\ln(y-1) + 5 \ln(y+3) = -\ln(x-1) + 5 \ln(x+3) + C$$

$$-\ln(y-1) + \ln(y+3)^5 = -\ln(x-1) + \ln(x+3)^5 + C$$

$$\ln \left[ \frac{(y+3)^5}{(y-1)} \right] = \ln \left[ \frac{(x+3)^5}{(x-1)} \right] + C$$

$$\boxed{(y+3)^5(x-1) = C(x+3)^5(y-1)}$$

## Problema 16

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{y}$$

para  $y(0) = 1$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Radicales.
- Cálculo Integral: Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

La ecuación diferencial puede resolverse con el método de variables separables, para ello se agrupan de un lado de la igualdad los términos que dependen exclusivamente de la variable “y” y del otro lado los que depende de la variable “x”.

Su solución general puede obtenerse a partir de agrupar los términos  $x$  y  $y$  con sus correspondientes diferenciales y de resolver las integrales resultantes

$$\int \frac{y}{(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dy = \int 4x dx$$

Para integrar el lado izquierdo de la igualdad, se utiliza un cambio de variable

$$u = y^2 + 1 \quad du = 2y dy$$

$$\int \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} = \int 4x \, dx$$

$$u^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$$

$$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$$

$$\sqrt{y^2 + 1} = 2x^2 + C$$

Esta es una solución general implícita. Evaluando las condiciones iniciales  $y(0) = 1$  para obtener el valor de la constante arbitraria  $C$

$$\sqrt{(1)^2 + 1} = 2(0)^2 + C \rightarrow C = \sqrt{2}$$

Al sustituir el valor de  $C$  en la solución general se obtiene la Solución Particular de la Ecuación Diferencial

$$\boxed{\sqrt{y^2 + 1} = 2x^2 + \sqrt{2}}$$

## Problema 17

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}; \quad y(2) = 1$$

### Antecedentes

- Álgebra: División de polinomios.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Propiedades de las integrales.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Utilizar el método de variables separables para resolver la ecuación diferencial, ya que se observa que pueden separarse los factores de cada una de las variables con sus respectivos diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4}{x}\right) \left(\frac{y}{y-3}\right)$$

$$\int \frac{y-3}{y} dy = \int \frac{4}{x} dx$$

La integral del lado izquierdo se puede simplificar efectuando una división de polinomios

$$\int dy - 3 \int \frac{dy}{y} = 4 \int \frac{dx}{x}$$

$$y - 3 \ln(y) = 4 \ln(x) + C$$

$$y = \ln(x^4) + \ln(y^3) + C$$

$$y = \ln(x^4 y^3) + C$$

Esta es la solución general implícita de la ecuación diferencial. Evaluando para  $y(2) = 1$

$$1 = \ln(16) + \ln(1) + C$$

$$1 = \ln(16) + \ln(1) + C$$

$$C = 1 - \ln(16)$$

Sustituyendo el valor de la constante  $C$  en la solución general para obtener la Solución Particular

$$y = \ln(x^4 y^3) + 1 - \ln(16)$$

$$y = \ln(x^4 y^3) - \ln(16) + 1$$

$$y = \ln\left(\frac{x^4 y^3}{16}\right) + 1$$

## Problema 18

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los exponentes. Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Diferencial: Propiedades de la función exponencial.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral.  
Integración por cambio de variable. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Al factorizar el factor común en cada uno de los coeficientes de los diferenciales se observa que la ecuación diferencial es de variables separables,

$$y(4 + x^2)dy - x(2 + y^2)dx = 0$$

se agrupan los términos  $x$  y  $y$  con sus correspondientes diferenciales

$$\int \frac{y}{2 + y^2} dy = \int \frac{x}{4 + x^2} dx$$

Para las integrales se emplea un cambio de variable

$$w_1 = 2 + y^2 \quad w_2 = 2 + x^2$$

$$dw_1 = 2ydy \quad dw_2 = 2xdx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2y}{2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{4 + x^2} dx$$

De donde se obtiene la solución general en forma implícita

$$\frac{1}{2} \ln(2 + y^2) - \frac{1}{2} \ln(4 + x^2) = C$$

Multiplicando toda la solución general por 2 y aplicando las propiedades de las funciones logaritmo y exponencial

$$\ln\left(\frac{2 + y^2}{4 + x^2}\right) = 2C$$

$$e^{\ln\left(\frac{2+y^2}{4+x^2}\right)} = e^{2C}$$

$$\frac{2 + y^2}{4 + x^2} = 2C$$

$$2 + y^2 = (4 + x^2)2C$$

La constante  $C$  es arbitraria, por lo que haremos la siguiente sustitución  $2C = K$

$$\boxed{2 + y^2 = (4 + x^2)K}$$

## Problema 19

Resuelva la ecuación diferencial

$$y \ln(x) \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral. Integración por partes.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Separando variables e integrando

$$\int x^2 \ln(x) dx = \int \frac{(y+1)^2}{y} dy$$

En la integral con respecto a la variable  $x$  es necesario aplicar integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Donde

$$u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 \rightarrow dv = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

Resolviendo la integral con respecto a la variable  $y$

$$\int \frac{(y+1)^2}{y} dy = \int \frac{y^2 + 2y + 1}{y} dy = \int \left( y + 2 + \frac{1}{y} \right) dy$$

$$\int \frac{(y+1)^2}{y} dy = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y) + C$$

La solución general em forma implícita es

$$\boxed{\frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y) + C}$$

## Problema 20

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\tan(x) + \frac{1}{t}\tan(x)}{2t^2 + t^2\sec(x)}; \quad x(1) = \frac{\pi}{4}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Factorización con factor común. Identidades trigonométricas.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral. Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

La ecuación diferencial se resuelve con el método de variables separables. Para ello, se agrupan términos y se realizan las integrales

$$(2t^2 + t^2\sec(x))dx = \left(\tan(x) + \frac{1}{t}\tan(x)\right)dt$$

Factorizando y utilizando identidades trigonométricas

$$t^2(2 + \sec(x))dx = \left(1 + \frac{1}{t}\right)\tan(x)dt$$

$$\left(\frac{2 + \sec(x)}{\tan(x)}\right)dx = \left(\frac{1 + \frac{1}{t}}{t^2}\right)dt$$

$$\left(2\cot(x) + \frac{\sec(x)}{\tan(x)}\right)dx = (t^{-2} + t^{-3})dt$$

$$\left( 2 \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} + \frac{1}{\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}} \right) dx = (t^{-2} + t^{-3}) dt$$

$$2 \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} dx = \int t^{-2} dt + \int t^{-3} dt$$

Al resolver las integrales se obtiene la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial

$$2\ln(\operatorname{sen}(x)) + \ln(\operatorname{csc}(x) - \operatorname{cot}(x)) = -t^{-1} - \frac{1}{2}t^{-2} + C$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para obtener el valor de la constante  $C$

$$2\ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) = -1 - \frac{1}{2} + C$$

$$\rightarrow 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2} + C$$

$$C = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$2\ln(\operatorname{sen}(x)) + \ln(\operatorname{csc}(x) - \operatorname{cot}(x)) + t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \frac{3}{2}$$

## Problema 21

Resuelva la ecuación diferencial

$$(2x^2 + y^2)dx - (xy)dy = 0$$

sujeta a la condición inicial  $y(1) = 2$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los exponentes. Factorización con factor común. Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Diferencial: Derivación implícita. Derivada de un producto.
- Cálculo Integral: Integrales de funciones polinomiales.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Problema de valor inicial.

### Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables ya que no es posible factorizarla para tener términos que dependan exclusivamente de cada variable. Como siguiente opción, se analizará el grado de cada término y si es el mismo en cada uno, entonces la ecuación será de coeficientes homogéneos.

Para analizar el grado de los términos se hacen las sustituciones  $x = \lambda x$  y  $y = \lambda y$

$$(2(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2)dx - [(\lambda x)(\lambda y)]dy = 0$$

$$(2\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2)dx - (\lambda^2 xy)dy = 0$$

$$\lambda^2 [(2x^2 + y^2)dx - (xy)dy] = 0$$

Donde en cada término se tiene  $\lambda^2$  que es de grado 2.

Dado que los términos tienen el mismo grado, entonces la ecuación diferencial se resolverá con ayuda de un cambio de variable, el cual permitirá convertir a la ecuación en una de variables separables. Para comenzar, es posible utilizar cualquiera de los siguientes cambios de variables con sus respectivos diferenciales

$$y = ux, \quad dy = udx + xdu \quad \text{ó} \quad x = vy, \quad dx = vdy + ydv$$

En este ejercicio se emplearán los cambios de variable correspondientes a la variable  $x$ , por lo que la ecuación diferencial se reescribe como

$$[2(vy)^2 + y^2](vdy + ydv) - [(vy)y]dy = 0$$

Realizando operaciones y simplificando

$$(2v^2y^2 + y^2)(vdy + ydv) - (vy^2)dy = 0$$

$$\rightarrow 2v^3y^2dy + 2v^2y^3dv + vy^2dy + y^3dv - vy^2dy = 0$$

$$2v^3y^2dy + (2v^2y^3 + y^3)dv = 0$$

Ahora, esta nueva ecuación se puede resolver como una ecuación diferencial de variables separables. Por lo tanto, se agrupan las variables  $v$  y  $y$

$$2v^3y^2dy = -(2v^2 + 1)y^3dv$$

$$-\frac{2y^2}{y^3}dy = \frac{(2v^2 + 1)}{v^3}dv$$

$$-2 \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dv}{v} + \int v^{-3}dv$$

$$-2 \ln(y) = 2 \ln(v) - \frac{v^{-2}}{2} + C$$

Regresando a las variables originales

$$-2 \ln(y) = 2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + C$$

Aplicando propiedades de los logaritmos

$$-2 \ln(y) = 2(\ln(x) - \ln(y)) - \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + C$$

$$-2 \ln(y) = 2 \ln(x) - 2 \ln(y) - \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + C$$

$$2 \ln(x) = \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + C$$

Esta es la solución general en forma implícita. Ahora, aplicando la condición inicial  $y(1) = 2$  (cuando la variable  $x$  vale 1,  $y$  toma el valor de 2) para encontrar el valor de  $C$

$$2 \ln(1) = \frac{1}{2} \frac{(2)^2}{(1)^2} + C \quad \rightarrow \quad (2)(1) = 2 + C$$

$$C = -2$$

Por último, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$\boxed{2 \ln(x) = \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} - 2}$$

## Problema 22

Resuelva la ecuación diferencial

$$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2 dy = 0$$

## Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

## Conceptos básicos para destacar

- Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución general de una ecuación diferencial.

## Solución

Examinando la ecuación diferencial se puede notar que no es de variables separables ya que no es posible su factorización en términos que dependan exclusivamente de cada variable. Por lo tanto, se analizará el grado de sus términos y en caso de que tengan el mismo grado entonces será de coeficientes homogéneos.

Para examinar el grado de los términos se realizan las siguientes sustituciones

$$x = \lambda x \quad y = \lambda y$$

$$[(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 + (\lambda x)^2]dx - (\lambda x)^2 dy = 0$$

$$(\lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 x^2)dx - \lambda^2 x^2 dy = 0$$

$$\lambda^2 [(xy + y^2 + x^2)dx - x^2 dy] = 0$$

Ya que en todos los términos se obtiene  $\lambda^2$  es de grado 2, entonces la ecuación diferencial puede resolverse con el método de coeficientes homogéneos, por lo cual se propone el cambio de variable

$$y = ux, \quad dy = udx + xdu$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$(x^2u + x^2u^2 + x^2)dx - x^2(udx + xdu) = 0$$

Agrupando términos y simplificando

$$x^2 u dx + x^2 u^2 dx + x^2 dx - x^2 u dx - x^3 du = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 u^2 dx + x^2 dx - x^3 du = 0$$

$$x^2 u^2 dx + x^2 dx = x^3 du \quad \rightarrow \quad x^2(u^2 + 1)dx = x^3 du$$

$$\frac{x^2}{x^3} dx = \frac{1}{u^2 + 1} du \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

Integrando

$$\ln(x) = \text{angtan}(u) + C$$

Regresando a las variables originales y así obtener la solución general en forma implícita

$$\boxed{\ln(x) = \text{angtan}\left(\frac{y}{x}\right) + C}$$

## Problema 23

Resuelva la ecuación diferencial

$$(4x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos. Propiedades de los exponentes.
- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución general de una ecuación diferencial.

### Solución

La ecuación diferencial no puede resolverse con el método de variables separables, ya que no es posible su factorización en términos que dependan exclusivamente de cada variable. Se analiza el grado de cada término de la ecuación diferencial empleando las sustituciones  $x = \lambda x$  y  $y = \lambda y$

$$[4(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2]dx - 2(\lambda x)(\lambda y)dy = 0$$

$$(4\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2)dx - 2(\lambda^2 xy)dy = 0$$

$$\lambda^2[(4x^2 - y^2)dx - 2xydy] = 0$$

Como se obtiene  $\lambda^2$ , todos los términos de la ecuación diferencial es de grado 2. Por lo tanto, la ecuación puede resolverse empleando el método de coeficientes homogéneos. Haciendo los siguientes cambios de variable

$$y = ux, \quad dy = udx + xdu$$

y sustituyéndolos en la ecuación diferencial proporcionada en el problema

$$(4x^2 - u^2x^2)dx - (2ux^2)(udx + xdu) = 0$$

Simplificando

$$4x^2dx - x^2u^2dx - 2x^3udu - 2x^2u^2dx = 0$$

$$\rightarrow 4x^2dx - 3x^2u^2dx - 2x^3udu = 0$$

$$x^2dx(4 - 3u^2) = 2x^3udu$$

Por lo tanto, las integrales a resolver son

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \int \frac{udu}{4 - 3u^2}$$

Para la integral con respecto a la variable  $u$  se usa un cambio de variable

$$r = 4 - 3u^2, \quad dr = -6udu$$

$$\frac{1}{2}\ln(x) = -\frac{1}{6} \int \frac{dr}{r}$$

$$\frac{1}{2}\ln(x) = -\frac{1}{6}\ln(4 - 3u^2) + C$$

Regresando a las variables originales para obtener la solución general en forma implícita

$$\frac{1}{2}\ln(x) = -\frac{1}{6}\ln\left(4 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + C$$

Finalmente, aplicando álgebra elemental junto con algunas propiedades de los logaritmos y de los exponentes, es posible simplificar la solución general de la ecuación diferencial

$$6\left[\frac{1}{2}\ln(x) = \frac{1}{6}\ln\left(4 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + C\right)\right]$$

$$3\ln(x) = -\ln\left(4 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + C\right)$$

$$\ln\left[(x^3)\left(4 - 3\frac{y^2}{x^2}\right)\right] = C$$

$$\ln(4x^3 - 3xy^2) = C$$

$$\ln(4x^3 - 3xy^2) = C$$

$$e^{\ln(4x^3 - 3xy^2)} = e^C$$

$$\boxed{4x^3 - 3xy^2 = C}$$

## Problema 24

Obtenga la solución particular de la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

sujeta a la condición inicial  $y(1) = 0$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Problema de valor inicial.

### Solución

Esta ecuación diferencial se resuelve mediante coeficientes homogéneos, ya que no es posible separar sus variables en términos que dependan exclusivamente de sus variables  $x$  y  $y$ . Para corroborar lo mencionado se obtiene el grado de los términos involucrados en la ecuación diferencial realizando las sustituciones  $x = \lambda x$  y  $y = \lambda y$

$$(2(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2)dx - [(\lambda x)(\lambda y)]dy = 0$$

$$(2\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2)dx - (\lambda^2 xy)dy = 0$$

$$\lambda^2[(2x^2 + y^2)dx - (xy)dy] = 0$$

Donde en cada término se tiene  $\lambda^2$  que es de grado 2. Ya que los términos tienen el mismo grado, entonces la ecuación diferencial se resolverá con ayuda de los cambios de variable

$$y = vx, \quad dy = vdx + xdv$$

La ecuación diferencial queda como

$$(x^2 + v^2 x^2)dx = vx^2(vdx + xdv)$$

Simplificando para obtener una ecuación diferencial de variables separables

$$(1 + v^2)dx = v(vdx + xdv) \rightarrow (1 + v^2 - v^2)dx = vxdv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int vdv$$

Al integrar se obtiene

$$\ln(x) = \frac{v^2}{2} + C$$

Regresando a las variables originales se llega a la solución general en forma implícita

$$\ln(x) = \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + C$$

Evaluando las condiciones iniciales  $x = 0$  y  $y = 0$

$$\ln(1) = \frac{1}{2} \frac{(0)^2}{1^2} + C \rightarrow C = 0$$

La solución particular de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\ln(x) = \frac{y^2}{2x^2}}$$

## Problema 25

Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$(x + \sqrt{y^2 - xy}) dy - y dx = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Radicales.
- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución general de una ecuación diferencial.

### Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables porque no es posible factorizarla para tener términos que dependan exclusivamente de cada variable. Como siguiente opción para resolver esta ecuación se analizará el grado de cada término y si es el mismo, entonces se usará el método de coeficientes homogéneos.

Para analizar el grado de los términos, se realizan las sustituciones  $x = \lambda x$  y  $y = \lambda y$

$$(\lambda x + \sqrt{(\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y)}) dy - \lambda y dx = 0$$

$$(\lambda x + \sqrt{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 xy}) dy - \lambda y dx = 0$$

$$(\lambda x + \sqrt{\lambda^2 (y^2 - xy)}) dy - \lambda y dx = 0$$

$$(\lambda x + \sqrt{\lambda^2} \sqrt{(y^2 - xy)}) dy - \lambda y dx = 0$$

$$\lambda [(x + \sqrt{y^2 - xy}) dy - y dx] = 0$$

De donde se obtiene  $\lambda$  de grado 1, entonces la ecuación diferencial se resolverá con ayuda de un cambio de variable que permitirá convertir a la ecuación diferencial en una de variables separables.

$$x = vy \text{ y } dx = vdy + ydv$$

Sustituyendo

$$(vy + \sqrt{y^2 - (vy)y}) dy - y(vdy + ydv) = 0$$

$$y\sqrt{1-v} dy = y^2 dv$$

Separando variables e integrando ambos lados de la igualdad

$$\frac{y dy}{y^2} = \frac{dv}{\sqrt{1-v}}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv$$

$$\ln(y) = 2\sqrt{1-v} + C$$

Regresando a las variables originales

$$\boxed{\ln(y) = 2\sqrt{1 - \frac{x}{y}} + C}$$

que es la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial.

## Problema 26

Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$2ydx + (2x - 5y)dy = 0$$

por el método de coeficientes homogéneos.

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Cálculo Integral: Integración por cambio de variable.  
Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.
- Solución implícita y explícita de una ecuación diferencial.
- Solución general de una ecuación diferencial.

### Solución

Para resolver esta ecuación diferencial por el método de coeficientes homogéneos primero se emplean los siguientes cambios de variable

$$y = ux, \quad dy = udx + xdu$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y realizando las operaciones necesarias para simplificarla

$$2uxdx + 2x(udx + xdu) - 5ux(udx + xdu) = 0$$

$$4uxdx + 2x^2du - 5u^2xdx - 5ux^2du = 0$$

$$(4ux - 5u^2x)dx + (2x^2 - 5ux^2)du = 0$$

$$(4u - 5u^2)xdx + (2 - 5u)x^2du = 0$$

$$\frac{x}{x^2} dx + \frac{(2-5u)}{(4u-5u^2)} du = 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2-5u}{(4u-5u^2)} du = 0$$

Para la segunda integral se emplea un cambio de variable

$$z = 4u - 5u^2, \quad dz = (4 - 10u)du = 2(2 - 5u)du$$

$$\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dz = C$$

Integrando

$$\ln(x) + \frac{1}{2} \ln(z) = C$$

Empleando algunas propiedades de los logaritmos para simplificar esta solución

$$2 \ln(x) + \ln(z) = C$$

$$\ln(x)^2 + \ln(4u - 5u^2) = C$$

Regresando a las variables originales y simplificando

$$\ln(x)^2 + \ln\left(4\left(\frac{y}{x}\right) - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = C$$

$$\ln\left(4\left(\frac{y}{x}\right)x^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 x^2\right) = C$$

$$\ln(4xy - 5y^2) = C$$

Por último, la solución general implícita de la ecuación diferencial es

$$\boxed{4xy - 5y^2 = C}$$

## Problema 27

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$x \frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$$

sujeta a la condición  $y|_{x=0} = 2$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivación parcial.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral. Integración inmediata. Integración por partes. Integración parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Problema de valor inicial.
- Ecuación diferencial exacta.

### Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables, ya que no es posible escribirla en términos de factores que dependan exclusivamente de cada variable y tampoco es de coeficientes homogéneos, ya que cuenta con un el término  $e^x$  el cual no se le puede asignar un grado. Por lo anterior, se analiza si la ecuación diferencial es exacta y para ello se empleará la siguiente forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Reescribiendo la ecuación diferencial

$$(2xe^x - y + 6x^2)dx - xdy = 0$$

de donde se identifican

$$M(x, y) = 2xe^x - y + 6x^2$$

$$N(x, y) = -x$$

Verificando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -1 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Dado que la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial está dado por

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

De donde

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 2xe^x - y + 6x^2 \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = -x \quad \dots (2)$$

De la ecuación (2) se propone

$$\partial F(x, y) = N(x, y) \partial y \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int N(x, y) dy + \varphi(x)$$

$$F(x, y) = \int -x dy + \varphi(x) \quad \dots (3)$$

Donde  $F(x, y)$  se determina integrando parcialmente a  $N(x, y)$  con respecto de  $y$  y  $\varphi(x)$  es una función arbitraria. Efectuando la integral de la expresión (3)

$$F(x, y) = -xy + \varphi(x) \quad \dots (4)$$

Ahora, se deriva parcialmente a la ecuación (4) con respecto a la variable  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-xy + \varphi(x)) = -y + \varphi'(x) \quad \dots (5)$$

Se observa que (5) equivale a (1), por lo que se igualan estas dos expresiones y así obtener el valor de  $\varphi'(x)$

$$-y + \varphi'(x) = 2xe^x - y + 6x^2$$

$$\varphi'(x) = 2xe^x + 6x^2$$

Integrando  $\varphi'(x)$  se obtiene el valor de la función  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \int (2xe^x + 6x^2) dx \quad \rightarrow \quad \varphi(x) = \int 2xe^x dx + \int 6x^2 dx$$

Sin embargo, es necesario aplicar integración por partes para la primera integral

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = 2x \quad du = 2dx$$

$$dv = e^x dx \quad v = e^x$$

Realizando las integrales inmediatas resultantes

$$\varphi(x) = 2 \left( xe^x - \int e^x dx \right) + \int 6x^2 dx$$

$$\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 2x^3$$

Sustituyendo  $\varphi(x)$  en (4)

$$F(x, y) = -xy + 2xe^x - 2e^x + 2x^3$$

Recordando que  $F(x, y) = C$  es la solución que se busca

$$-xy + 2xe^x - 2e^x + 2x^3 = C$$

que es la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial. Ahora, lo que resta es evaluar a la solución general con la condición inicial  $y(0) = 2$

$$-(0)(2) + 2(0)e^0 - 2e^0 + 2(0)^3 = C \quad \rightarrow \quad C = -2$$

Así, la solución particular es

$$\boxed{-xy + 2xe^x - 2e^x + 2x^3 = -2}$$

## Problema 28

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(\sin(y) + y\sin(x))dx + (x\cos(y) - \cos(x))dy = 0$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.

### Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables ya que no es posible escribirla en términos de factores que dependan exclusivamente de cada variable y tampoco es de coeficientes homogéneos, ya que cuenta con funciones trigonométricas a las

cuales no se les puede asignar un grado. Por lo anterior, se analiza si la ecuación diferencial es exacta y para ello se hará uso de la siguiente forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Donde  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son

$$M(x, y) = \text{sen}(y) + y\text{sen}(x)$$

$$N(x, y) = x\cos(y) - \cos(x)$$

Empleando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \cos(y) + \text{sen}(x) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Al ser una ecuación diferencial exacta, entonces existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial está dado por

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

De donde

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (2) se propone

$$\partial F(x, y) = N(x, y)\partial y \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int N(x, y) dy + \varphi(x)$$

$$F(x, y) = \int (x\cos(y) - \cos(x)) dy + \varphi(x) \quad \dots (3)$$

Donde  $F(x, y)$  se determina integrando parcialmente a  $N(x, y)$  con respecto de  $y$  y  $\varphi(x)$  es una función arbitraria. Efectuando la integral de la expresión (3)

$$F(x, y) = x\text{sen}(y) - y\text{cos}(x) + h(x) \dots (4)$$

Ahora se deriva parcialmente a la ecuación (4) con respecto a la variable  $x$  obteniéndose la expresión (1), esto es

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\text{sen}(y) - y\text{cos}(x) + \varphi(x)) = \text{sen}(y) + y\text{sen}(x) + \varphi'(x) \dots (5)$$

Como (5) equivale a (1), por lo que se igualan estas dos expresiones y así obtener el valor de  $\varphi'(x)$

$$\text{sen}(y) + y\text{sen}(x) + \varphi'(x) = \text{sen}(y) + y\text{sen}(x)$$

Por igualdad de términos se tiene que  $\varphi'(x) = 0$  y, por lo tanto,

$$\varphi(x) = C$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(x)$  en la expresión (4)

$$F(x, y) = x\text{sen}(y) - y\text{cos}(x) + C$$

La solución general en forma implícita de la ecuación diferencial es

$$\boxed{x\text{sen}(y) - y\text{cos}(x) = C}$$

## Problema 29

Resuelva la ecuación diferencial

$$(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y) dy = 0$$

Dada la condición inicial  $y(0) = 1$ .

## Antecedentes

- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

## Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Ecuación diferencial exacta.

## Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables, ya que no es posible escribirla en términos de factores que dependan exclusivamente de cada variable. Además, como la ecuación cuenta con términos del tipo exponencial no es posible resolverla con el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta y para ello se empleará la siguiente forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Se identifican términos

$$M(x, y) = e^x + y$$

$$N(x, y) = 2 + x + ye^y$$

Usando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Ya que se cumple el criterio de exactitud entonces la ecuación diferencial es exacta. Por lo tanto, existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial está dado por

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

De donde

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\partial F(x, y) = M(x, y) \partial x \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$F(x, y) = \int (e^x + y) dx + \varphi(y) \quad \dots (3)$$

Integrando parcialmente a  $M(x, y)$ , se obtiene la expresión (3), siendo  $\varphi(y)$  una función arbitraria de variable  $y$

$$F(x, y) = e^x + xy + \varphi(y) \quad \dots (4)$$

Ahora, se deriva parcialmente a la expresión (4) con respecto de  $y$  para obtener el término  $N(x, y)$  de la expresión (2)

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^x + xy + g(y)) = x + \varphi'(y) \quad \dots (5)$$

Por la igualdad de los términos (2) y (5)

$$N(x, y) = 2 + x + ye^y = x + \varphi'(y)$$

De esta igualdad se obtiene el valor de  $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = 2 + ye^y$$

Posteriormente, se integra esta expresión para obtener el valor de  $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int (2 + ye^y) dy$$

$$\varphi(y) = 2y + ye^y - e^y$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(y)$  en (4) y recordando que  $F(x, y) = C$

$$e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = C$$

que es la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial. Aplicando las condiciones iniciales  $y(0) = 1$  para obtener el valor de la constante  $C$

$$1 + 2 + e - e = 0 \rightarrow C = 3$$

Al sustituir el valor de  $C$  en la solución general se obtiene la solución particular

$$e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = 3$$

## Problema 30

Demuestre que la ecuación diferencial

$$(3x^2 - y)dx - (3y^2 - x)dy = 0$$

es exacta y que tiene por solución general a la relación

$$x^3 - xy + y^3 = C$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Propiedades de la integral. Integración inmediata. Integración parcial. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.

### Solución

Como el problema requiere que se demuestre que la ecuación diferencial es exacta, entonces se analiza el criterio de exactitud que es

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Donde  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son los términos de la ecuación auxiliar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

para este ejemplo son

$$M(x, y) = 3x^2 - y$$

$$N(x, y) = 3y^2 - x$$

Aplicando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -1 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como el criterio de exactitud se cumple, entonces se demuestra que la ecuación diferencial es exacta. Para verificar que

$$x^3 - xy + y^3 = C$$

es solución de la ecuación diferencial es necesario resolverla y ver si se llega al mismo resultado. Usando a la función  $F(x, y) = C$ , con  $C$  como constante arbitraria, cuyo diferencial está dado por

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

De donde

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\partial F(x, y) = M(x, y) \partial x \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$F(x, y) = \int (3x^2 - y) dx + \varphi(y) \quad \dots (3)$$

Donde  $h(y)$  es una función de variable  $y$ . Resolviendo la integral parcial de la expresión (3)

$$F(x, y) = x^3 - yx + \varphi(y) \quad \dots (4)$$

Ahora se deriva parcialmente a la expresión (4) con respecto de  $y$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -x + \varphi'(y) \quad \dots (5)$$

Como (5) equivale a (2), entonces se igualan estas dos expresiones para obtener el valor de  $h'(y)$

$$-x + \varphi'(y) = 3y^2 - x$$

$$\varphi'(y) = 3y^2$$

Al integrar  $\varphi'(y)$  se obtiene el valor de  $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int 3y^2 dy$$

$$\varphi(y) = y^3$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(y)$  en la expresión (4)

$$F(x, y) = x^3 - yx + y^3$$

Como  $F(x, y) = C$

$$\boxed{x^3 - xy + y^3 = C}$$

Por lo tanto, se corrobora que  $x^3 - xy + y^3 = C$  es la solución general en forma implícita de ecuación diferencial.

## Problema 31

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$3x(xy - 2)dx = -(x^3 + 2y)dy$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Propiedades de la integral. Integración inmediata. Integración parcial. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.

### Solución

La ecuación diferencial no puede ser separada en variables y como cuenta con un término “-2” que es de grado cero, tampoco puede resolverse por el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta empleando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Para ello se requiere que la ecuación tenga la siguiente forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Reescribiendo la ecuación diferencial original e identificando los términos  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$

$$(3x^2y - 6x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

$$M(x, y) = 3x^2y - 6x$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y$$

Analizando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial está dado por

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

De donde

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (2) se propone

$$\partial F(x, y) = N(x, y)\partial y \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int N(x, y) dy + \varphi(x)$$

$$F(x, y) = \int (x^3 + 2y) dy + \varphi(x) \quad \dots (3)$$

Donde  $\varphi(x)$  representa una función de variable  $x$  y la integral es parcial

$$F(x, y) = x^3y + y^2 + \varphi(x) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente a la expresión (4) con respecto de  $x$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + y^2 + \varphi(x)) = 3x^2 + \varphi'(x) \quad \dots (5)$$

Como se observa, la expresión (5) equivale a (1), es decir

$$3x^2y + \varphi'(x) = 3x^2y - 6x$$

Por igualdad de términos, se tiene que el valor de  $\varphi'(x)$  es

$$\varphi'(x) = -6x$$

Al integrar  $\varphi'(x)$  se obtiene  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = -3x^2$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(x)$  en (4) y como  $F(x, y) = C$

$$\boxed{x^3y + y^2 - 3x^2 = C}$$

que es la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial.

## Problema 32

Resuelva la ecuación diferencial

$$(\cos(z) + z\cos(x))dx + (\sin(x) - x\sin(z))dz = 0$$

## Antecedentes

- Cálculo Integral: Propiedades de la integral. Integración inmediata. Integración parcial. Derivada parcial.

## Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.

## Solución

Se puede observar que la solución de la ecuación diferencial no puede obtenerse por el método de variables separables y como se tienen funciones trigonométricas, tampoco se puede resolver con el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta

$$M(x, z)dx + N(x, z)dz = 0$$

Identificando los términos  $M(x, z)$  y  $N(x, z)$

$$M(x, z) = \cos(z) + z\cos(x)$$

$$N(x, z) = \sen(x) - x\sen(z)$$

Analizando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, z)}{\partial z} = -\sen(z) + \cos(x) = \frac{\partial N(x, z)}{\partial x}$$

Al ser una ecuación diferencial exacta entonces existe una función  $F(x, z) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial está dado por

$$dF(x, z) = \frac{\partial F(x, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, z)}{\partial z} dz$$

Donde

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial x} = M(x, z) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial z} = N(x, z) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\partial F(x, z) = M(x, z) \partial x \quad \rightarrow \quad F(x, z) = \int M(x, z) dx + \varphi(z)$$

$$F(x, z) = \int (\cos(z) + z \cos(x)) dx + \varphi(z) \quad \dots (3)$$

Donde  $\varphi(z)$  es una función de variable  $z$  y la integral a resolver es una integral parcial

$$F(x, z) = x \cos(z) + z \sin(x) + \varphi(z) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente con respecto de  $z$  a la expresión (4)

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial z} = -x \sin(z) + \sin(x) + \varphi'(z) \quad \dots (5)$$

Se igualan (5) y (2) para obtener  $\varphi'(z)$

$$\sin(x) - x \sin(z) + \varphi'(z) = -x \sin(z) + \sin(x)$$

$$\varphi'(z) = 0$$

Como  $\varphi'(z) = 0$ , entonces  $\varphi(z)$  es igual a una constante de integración

$$\varphi(z) = K$$

Al sustituir  $\varphi(z)$  en (4), se obtiene

$$F(x, z) = x \cos(z) + z \sin(x) + K$$

Recordando que  $F(x, z) = C$  y usando propiedades de las constantes de integración, la solución general en forma implícita queda simplemente como

$$x\cos(z) + z\sin(x) = C$$

## Problema 33

Resuelva la ecuación diferencial

$$(y^2 + 2x^2 - 5)dx - xydy = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

### Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables, ya que no es posible escribirla en términos de factores que dependan exclusivamente de cada variable y tampoco es de coeficientes homogéneos, ya que el término “-5” es de grado cero, mientras que el grado de los demás sumandos es dos. Por lo anterior, se analiza si la ecuación diferencial es exacta, por lo cual se debe verificar el criterio de exactitud

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Considerando a  $M(x, y)$  como la función que multiplica a  $dx$  y a  $N(x, y)$  como la función que multiplica a  $dy$

$$M(x, y) = y^2 + 2x^2 - 5$$

$$N(x, y) = -xy$$

Analizando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -y$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como no se cumple el criterio de exactitud, la ecuación diferencial no es exacta y se deberá obtener un factor integrante que al multiplicarlo a la ecuación la vuelva exacta. Este factor se obtiene con alguna de estas expresiones:

- $\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$ , donde
- 

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$

- $\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$ , donde

$$h(y) = \frac{\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}}{M(x, y)}$$

Si  $\mu(x)$  existe, su expresión dependerá solo de la variable  $x$ , en caso contrario se prueba con  $\mu(y)$  que depende únicamente de  $y$ .

Probando con  $\mu(x)$

$$g(x) = \frac{2y - (-y)}{-xy} = \frac{3y}{-xy} = -\frac{3}{x}$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-3 \ln(x)}$$

$$\mu(x) = x^{-3}$$

por lo que el factor integrante es  $\mu(x) = x^{-3}$ . Así al multiplicar a la ecuación diferencial por este factor la volverla exacta

$$(y^2x^{-3} + 2x^{-1} - 5x^{-3})dx - x^{-2}ydy = 0$$

Verificando nuevamente el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2yx^{-3} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Ahora, la ecuación diferencial ya es exacta. Considerando que existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, y con diferencial total

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

Considerando

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (2) se propone

$$\partial F(x, y) = N(x, y) \partial y \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int N(x, y) dy + \varphi(x)$$

$$F(x, y) = \int (-x^{-2}y) dy + \varphi(x) \quad \dots (3)$$

Donde  $\varphi(x)$  es una función de variable  $x$ . Se integra parcialmente con respecto a  $y$  (considerando por tanto a  $x$  como constante)

$$F(x, y) = \frac{-x^{-2}y^2}{2} + \varphi(x) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente con respecto de  $x$  a la expresión (4)

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-x^{-2}y^2}{2} + \varphi(x) \right) = x^{-3}y^2 + \varphi'(x) \quad \dots (5)$$

Como la expresión (5) es la misma que (1), entonces se igualan para obtener a  $\varphi'(x)$

$$x^{-3}y^2 + \varphi'(x) = x^{-3}y^2 + 2x^{-1} - 5x^{-3}$$

$$\varphi'(x) = 2x^{-1} - 5x^{-3}$$

La función  $\varphi(x)$  se obtiene a partir de integrar con respecto de  $x$  a la función arbitraria  $\varphi'(x)$

$$\varphi(x) = 2 \ln(x) + \frac{5}{2} \frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo  $\varphi(x)$  en (4)

$$F(x, y) = -\frac{x^{-2}y^2}{2} + 2 \ln(x) + \frac{5x^{-2}}{2}$$

La solución buscada es de la forma  $F(x, y) = C$  por lo que

$$\boxed{-\frac{x^{-2}y^2}{2} + 2 \ln(x) + \frac{5x^{-2}}{2} = C}$$

es una solución general en forma implícita de la ecuación diferencial.

## Problema 34

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(3x^5 \tan(y) - 2y^3)dx + (x^6 \sec^2(y) + 4x^3 y^3 + 3xy^2) dy = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Diferencial: Propiedades de las funciones exponenciales.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

### Solución

Como en la ecuación diferencial no se pueden separar sus términos de modo que correspondan con sus diferenciales, no se puede resolver usando el método de variables separables. Además, al tener funciones trigonométricas tampoco se puede resolver utilizando el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Identificando los términos  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$

$$M(x, y) = 3x^5 \tan(y) - 2y^3$$

$$N(x, y) = x^6 \sec^2(y) + 4x^3 y^3 + 3xy^2$$

Empleando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^5 \sec^2(y) - 6y^2$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 6x^5 \sec^2(y) + 12x^2 y^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como no se cumple el criterio de exactitud, entonces la ecuación diferencial no es exacta y se deberá obtener un factor integrante que la vuelva exacta. Dicho factor se obtiene con la siguiente expresión

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}$$

Donde

$$g(x) = \frac{1}{N(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo valores

$$g(x) = \frac{1}{x^6 \sec^2(y) + 4x^3 y^3 + 3xy^2} (-3x^5 \sec^2(y) - 9y^2 - 12x^3 y^3)$$

$$g(x) = \frac{-3(x^5 \sec^2(y) + 4x^2 y^3 + 3y^2)}{x(x^5 \sec^2(y) + 4x^2 y^3 + 3y^2)} = -\frac{3}{x}$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln(x)}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^3}$$

Multiplicando a la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(3x^2 \tan(y) - 2y^3 x^{-3}) dx + (x^3 \sec^2(y) + 4y^3 + 3x^{-2} y^2) dy = 0$$

Comprobando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2 \sec^2(y) - 6y^2 x^{-3} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, entonces existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial total es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

Considerando

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\partial F(x, y) = M(x, y) \partial x \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$F(x, y) = \int (3x^2 \tan(y) - 2y^3 x^{-3}) dx + \varphi(y) \quad \dots (3)$$

donde la constante de integración  $\varphi(y)$  es una función de  $y$ . Realizando la integral parcial con respecto de  $x$  en la expresión (3)

$$F(x, y) = x^3 \tan(y) + y^3 x^{-2} + \varphi(y) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente a la expresión (4)

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x^3 \sec^2(y) + 3y^2 x^{-2} + \varphi'(y) \quad \dots (5)$$

Se igualan las expresiones (5) y (2) para obtener  $\varphi'(y)$

$$x^3 \sec^2(y) + 3y^2 x^{-2} + \varphi'(y) = x^3 \sec^2(y) + 4y^3 + 3x^{-2} y^2$$

$$\varphi'(y) = 4y^3$$

Al integrar  $\varphi'(y)$  se obtiene el valor de la función  $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int 4y^3 dy$$

$$\varphi(y) = y^4$$

Sustituyendo  $\varphi(y)$  en la expresión (4)

$$F(x, y) = x^3 \tan(y) + y^3 x^{-2} + y^4$$

Como  $F(x, y) = C$ , entonces la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial es

$$x^3 \tan(y) + y^3 x^{-2} + y^4 = C$$

## Problema 35

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$(3x^2 y + y^2) dx + (3x^3 - y^2 + 4xy) dy = 0$$

sujeta a las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ .

### Antecedentes

- Cálculo diferencial: Propiedades de las funciones exponenciales.  
Propiedades de las funciones logarítmicas.

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo integral: Integración inmediata. Integración parcial.  
Constante de integración. Integración por partes.  
Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

Solución general y particular de una ecuación diferencial.

Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.

Problema de valor inicial.

Ecuación diferencial exacta.

Factor integrante.

### Solución

La ecuación diferencial no es de variables separables o de coeficientes homogéneos, por lo que se analiza si es exacta y para ello se identifican las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  de la ecuación auxiliar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Comparando términos con la ecuación diferencial

$$M(x, y) = 3x^2y + y^2$$

$$N(x, y) = 3x^3 - y^2 + 4xy$$

Empleando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 9x^2 + 4y$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como no se cumple el criterio de exactitud, entonces la ecuación diferencial no es exacta y se deberá obtener un factor integrante que al multiplicarlo a la ecuación la vuelva exacta. Dicho factor se obtiene con la siguiente expresión

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

De donde

$$h(y) = \frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right)$$

Sustituyendo valores y simplificando

$$h(y) = \frac{1}{3x^2y + y^2} (9x^2 + 4y - 3x^2 - 2y) = \frac{1}{y(3x^2 + y)} [(2)(3x^2 + y)]$$

$$h(y) = \frac{2}{y}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln(y)}$$

$$\mu(y) = y^2$$

Multiplicando a la ecuación diferencial original por el factor integrante

$$y^2[(3x^2y + y^2) dx + (3x^3 - y^2 + 4xy)dy] = 0$$

$$(3x^2y^3 + y^4) dx + (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3)dy = 0$$

Empleando nuevamente el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 9x^2y^2 + 4y^3 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, entonces existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial total es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\partial F(x, y) = M(x, y) \partial x \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$F(x, y) = \int (3x^2y^3 + y^4) dx + \varphi(y) \quad \dots (3)$$

La integral a resolver en (3) es una integral parcial con respecto a  $x$ , lo que quiere decir que las variables con  $y$  serán tratadas como constantes. Además, a esta expresión se le suma la función arbitraria  $\varphi(y)$

$$F(x, y) = x^3y^3 + xy^4 + \varphi(y) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente a la expresión (4) con respecto a  $y$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^3y^3 + xy^4 + \varphi(y))$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 4xy^3 + \varphi'(y) \quad \dots (5)$$

Como las expresiones (2) y (5) son equivalentes, entonces se igualan y se obtiene el valor de  $\varphi'(y)$

$$3x^2y^2 + 4xy^3 + \varphi'(x) = 3x^2y^2 - y^4 + 4xy^3$$

$$\varphi'(y) = -y^4$$

Al integrar este valor

$$\varphi(y) = -\frac{1}{5}y^5$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(y)$  en (4)

$$F(x, y) = x^3y^3 + xy^3 - \frac{1}{5}y^5$$

Y como  $F(x, y) = C$

$$5x^3y^3 + 5xy^3 - y^5 = C$$

que es la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial. Aplicando las condiciones iniciales  $y(0) = 1$

$$0 + 0 - (1)^5 = C \quad \rightarrow \quad C = -1$$

Sustituyendo  $C = -1$  en la solución general se obtiene la solución particular de la ecuación diferencial

$$\boxed{5x^3y^3 + 5xy^3 - y^5 + 1 = 0}$$

## Problema 36

Resuelva el problema de valor inicial

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0; \quad y(1) = 2$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.

- Problema de valor inicial.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

### Solución

Como en la ecuación diferencial no se pueden separar sus términos de modo que correspondan con sus diferenciales, no se puede resolver usando el método de variables separables. Además, como se tiene un “1” cuyo grado es cero, tampoco se puede utilizar el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta con la siguiente ecuación auxiliar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Identificando las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$

$$M(x, y) = xy^2 - y^3$$

$$N(x, y) = 1 - xy^2$$

Analizando si es exacta

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -y^2$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como no se cumple el criterio de exactitud, entonces la ecuación diferencial no es exacta y se deberá obtener un factor integrante que al multiplicarlo a la ecuación la vuelva exacta. Dicho factor se obtiene con la siguiente expresión

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

De donde

$$h(y) = \frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right)$$

Sustituyendo valores en  $h(y)$

$$h(y) = \frac{-y^2 - (2xy - 3y^2)}{xy^2 - y^3} = \frac{2y^2 - 2xy}{xy^2 - y^3}$$

$$h(y) = \frac{2y(y - x)}{y^2(x - y)} = \frac{-2y(x - y)}{y^2(x - y)} = -\frac{2}{y}$$

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln(y)}$$

$$\mu(y) = y^{-2}$$

Multiplicando a la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(x - y)dx + (y^{-2} - x)dy = 0$$

Analizando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -1 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, y cuyo diferencial total es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\begin{aligned} \partial F(x, y) = M(x, y) \partial x &\rightarrow F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \int (x - y) dx + \varphi(y) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

Donde la constante de integración  $\varphi(y)$  es una función de  $y$  y la integral se resuelve parcialmente con respecto de  $x$ , lo que quiere decir que las variables con  $y$  serán tratadas como constantes

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente a la expresión (4) con respecto a  $y$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -x + \varphi'(y) \quad \dots (5)$$

Igualando las expresiones (5) y (2) que son equivalentes para así obtener el valor de  $\varphi'(y)$

$$-x + \varphi'(y) = y^{-2} - x$$

Asimismo, al integrar  $\varphi'(y)$  se obtiene el valor de la función  $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = -\frac{1}{y}$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(y)$  en (4)

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + -\frac{1}{y}$$

Como  $F(x, y) = C$

$$\frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C$$

que es la solución general implícita de la ecuación diferencial. Sustituyendo las condiciones iniciales  $x = 1$  y  $y = 2$

$$\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} = C \rightarrow C = -2$$

Finalmente, con el valor de  $C = -2$  se obtiene la solución particular

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = -2}$$

## Problema 37

Resuelva el problema de valor inicial

$$x dx + \left( \frac{x^2}{y} + 4 \right) dy = 0, \quad y(1) = 1$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general y particular de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Problema de valor inicial.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

### Solución

Como en la ecuación diferencial no se pueden separar sus términos de modo que correspondan con sus diferenciales, no se puede resolver usando el método de

variables separables. Además, como se tiene un “4” cuyo grado es cero, tampoco se puede utilizar el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como no se cumple el criterio de exactitud, entonces la ecuación diferencial no es exacta y se deberá obtener un factor integrante que al multiplicarlo a la ecuación la vuelva exacta. Dicho factor se obtiene con la siguiente expresión

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

De donde

$$h(y) = \frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right)$$

Sustituyendo valores

$$h(y) = \frac{2}{y}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = y^2$$

Multiplicando el factor integrante a la ecuación diferencial

$$xy^2 dx + (x^2 y + 4y^2) dy = 0$$

Empleando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial total es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \dots (2)$$

De la ecuación (1) se propone

$$\partial F(x, y) = M(x, y) \partial x \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$F(x, y) = \int xy^2 dx + \varphi(y) \quad \dots (3)$$

Donde la constante de integración  $\varphi(y)$  es una función de  $y$  y la integral se resuelve parcialmente

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente a la expresión (4) con respecto a  $y$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y) \quad \dots (5)$$

Como la expresión (5) es equivalente a (2), se igualan para encontrar el valor de  $\varphi'(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$x^2y + 4y^2 = x^2y + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 4y^2$$

Integrando la expresión anterior para obtener el valor de  $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \frac{4}{3}y^2$$

Sustituyendo el valor de  $\varphi(y)$  en la expresión (3)

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3$$

Recordando que  $F(x, y) = C$  y simplificando

$$3x^2y^2 + 2y^3 = C$$

que es la solución general de forma implícita de la ecuación diferencial.

Aplicando las condiciones iniciales  $x = 1$  y  $y = 1$

$$3 + 2 = C \quad \rightarrow \quad C = 5$$

Finalmente, se obtiene la solución particular sustituyendo  $C = 5$  en la solución general

$$\boxed{3x^2y^2 + 2y^3 = 5}$$

## Problema 38

Resuelva la siguiente ecuación diferencial empleando un factor integrante que dependa de la variable  $y$

$$y^2dx + (xy)dy = 0$$

## Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

## Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

## Solución

Debido a que el problema pide que se use un factor integrante que dependa de  $y$ , se usa la expresión

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

$$h(y) = \frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right)$$

Las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  se identifican de la ecuación auxiliar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Donde

$$M(x, y) = y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2y$$

$$N(x, y) = xy \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = y$$

Sustituyendo valores en la expresión del factor integrante y simplificando

$$h(y) = \frac{1}{y^2} (y - 2y) = -\frac{1}{y}$$

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln(y)}$$

$$\mu(y) = \frac{1}{y}$$

Multiplicando a la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(y)dx + (x)dy = 0$$

Al analizar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, existe una función  $F(x, y) = C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria, cuyo diferencial total es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = y \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = x \quad \dots (2)$$

De la ecuación (2) se propone

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + \varphi(x)$$

$$F(x, y) = \int x dy + \varphi(x) \quad \dots (3)$$

Donde la constante de integración  $\varphi(x)$  es una función arbitraria. Resolviendo la integral de la expresión (3)

$$F(x, y) = xy + \varphi(x) \quad \dots (4)$$

Derivando parcialmente a (4) con respecto a la variable  $x$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y + \varphi'(x) \quad \dots (5)$$

La expresión (5) es equivalente a la expresión (1), por lo que se igualan términos para encontrar el valor de  $\varphi'(x)$

$$y + \varphi'(x) = y$$

$$\varphi'(x) = 0$$

Como  $\varphi'(x) = 0$ , entonces  $\varphi(x)$  es igual a una constante de integración

$$\varphi(x) = K$$

Al sustituir  $\varphi(x)$  en (4) se obtiene

$$F(x, y) = xy + K$$

Recordando que  $F(x, z) = C$  y usando propiedades de las constantes de integración para agrupar a las constantes arbitrarias  $C$  y  $K$  como una sola constante  $C$

$$C = xy + K \quad \rightarrow \quad xy = (C - K)$$

$$xy = C$$

La solución general en forma explícita de la ecuación diferencial queda como

$$\boxed{y = \frac{C}{x}}$$

## Problema 39

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\text{sen}(y) + \text{sen}(2y)}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos. Conjuntos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

### Solución

Como en la ecuación diferencial no se pueden separar sus términos de modo que correspondan con sus diferenciales, no se puede resolver usando el método de variables separables. Además, al tener funciones trigonométricas tampoco se puede resolver utilizando el método de coeficientes homogéneos. Se analiza si la ecuación diferencial es exacta con la siguiente ecuación auxiliar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Reescribiendo la ecuación diferencial

$$dx - (x\text{sen}(y) + \text{sen}(2y)) dy = 0$$

De esta forma es más sencillo identificar los términos  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  que son

$$M(x, y) = 1$$

$$N(x, y) = x\text{sen}(y) + \text{sen}(2y)$$

Obteniendo las derivadas parciales para usar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -\text{sen}(y)$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Entonces la ecuación diferencial no es exacta. Ahora se busca un factor integrante  $\mu(y)$

$$\mu(y) = e^{\int h(y) dy}$$

Sustituyendo valores en  $h(y)$

$$\frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{1}{1} (-\text{sen}(y) - 0) = -\text{sen}(y)$$

Resolviendo la integral

$$e^{\int -\text{sen}(y) dy} = e^{\cos(y)}$$

Multiplicando a la ecuación diferencial por este factor integrante

$$e^{\cos(y)} dx - e^{\cos(y)} (x \text{sen}(y) + \text{sen}(2y)) dy = 0$$

Analizando nuevamente el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -\text{sen}(y) e^{\cos(y)}$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -\text{sen}(y) e^{\cos(y)}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, su solución general puede obtenerse a partir de la siguiente unión de conjuntos

$$\left\{ \int M(x, y) dx \right\} \cup \left\{ \int N(x, y) dy \right\} = C$$

Sustituyendo valores

$$\left\{ \int e^{\cos(y)} dx \right\} \cup \left\{ \int (-x \operatorname{sen}(y) e^{\cos(y)} - \operatorname{sen}(2y) e^{\cos(y)}) dy \right\} = C$$

Resolviendo las integrales inmediatas

$$\{x e^{\cos(y)}\} \cup \left\{ x e^{\cos(y)} - \int (\operatorname{sen}(2y) e^{\cos(y)}) dy \right\} = C$$

Para resolver la integral faltante del segundo conjunto, se empleará una identidad trigonométrica y luego integración por partes

$$- \int (\operatorname{sen}(2y) e^{\cos(y)}) dy = - \int (2 \cos(y) \operatorname{sen}(y) e^{\cos(y)}) dy$$

$$I = uv - \int v du$$

$$u = \cos(y) \qquad dv = \operatorname{sen}(y) e^{\cos(y)} dy$$

$$du = -\operatorname{sen}(y) dy \qquad v = -e^{\cos(y)}$$

$$I = -2 \left( -e^{\cos(y)} \cos(y) + \int \operatorname{sen}(y) e^{\cos(y)} dy \right)$$

$$I = -2 \left( -e^{\cos(y)} \cos(y) - e^{\cos(y)} \right)$$

$$I = 2 e^{\cos(y)} (\cos(y) + 1)$$

$$\{x e^{\cos(y)}\} \cup \{x e^{\cos(y)} + 2 e^{\cos(y)} (\cos(y) + 1)\} = C$$

Finalmente, la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial es

$$xe^{\cos(y)} + 2 e^{\cos(y)}(\cos(y) + 1) = C$$

## Problema 40

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x + 2)\text{sen}(y) dx + x\text{cos}(y)dy = 0$$

utilizando dos métodos distintos.

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos. Conjuntos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración. Integración por partes. Derivada parcial.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.
- Ecuación diferencial exacta.
- Factor integrante.

### Solución

Primero se empleará el método de separación de variables

$$\frac{x + 2}{x} dx + \frac{\cos(y)}{\text{sen}(y)} dy = 0$$

$$\int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx + \int \frac{\cos(y)}{\text{sen}(y)} dy = 0$$

Para la segunda integral se empleará un cambio de variable

$$u = \text{sen}(y) \quad du = \cos(y)dy$$

Se resuelven las integrales y se simplifica la expresión resultante

$$x + 2 \ln(x) + \int \frac{du}{u} = C$$

$$x + 2 \ln(x) + \ln(u) = C$$

$$x + \ln(x^2) + \ln(\text{sen}(y)) = C$$

$$x + \ln(x^2 \text{sen}(y)) = C$$

Multiplicando toda la expresión anterior por un factor  $e$

$$\boxed{e^x x^2 \text{sen}(y) = C}$$

que es la solución general en forma implícita. El segundo método se analiza si la ecuación diferencial es exacta. Para esto se reescribe la ecuación a la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Y así identificar más fácilmente las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$

$$(x + 2)\text{sen}(y) dx + x\cos(y)dy = 0$$

Analizando el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (x + 2)\cos(y)$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \cos(y)$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

La ecuación diferencial no es exacta ya que, buscando un factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}$$

Donde

$$g(x) = \frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo valores para hallar  $g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{1}{x \cos(y)} ((x+2)\cos(y) - \cos(y))$$

$$g(x) = \frac{1}{x \cos(y)} (x \cos(y) + 2 \cos(y) - \cos(y)) = \frac{1}{x \cos(y)} (x \cos(y) + \cos(y))$$

$$g(x) = \frac{1}{x \cos(y)} (x \cos(y) + \cos(y)) = \frac{(x+1)\cos(y)}{x \cos(y)}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

Ahora en  $\mu(x)$  y resolviendo la integral

$$\mu(x) = e^{\int (1 + \frac{1}{x}) dx} = e^x e^{\ln(x)}$$

$$\mu(x) = e^x x = x e^x$$

Multiplicando la ecuación diferencial original por este factor integrante

$$(x^2 e^x + 2x e^x) \sin(y) dx + x^2 e^x \cos(y) dy = 0$$

Analizando el criterio de exactitud para esta nueva ecuación

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (x^2 e^x + 2x e^x) \cos(y)$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = (x^2 e^x + 2x e^x) \cos(y)$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Como la ecuación diferencial ya es exacta, la solución general puede obtenerse con la siguiente expresión

$$\left\{ \int M(x, y) dx \right\} \cup \left\{ \int N(x, y) dy \right\} = C$$

Sustituyendo valores y realizando las integrales parciales

$$\left\{ \int [(x^2 e^x + 2x e^x) \operatorname{sen}(y)] dx \right\} \cup \left\{ \int x^2 e^x \cos(y) dy \right\} = C$$

$$\left\{ \int x^2 e^x \operatorname{sen}(y) dx + \int 2x e^x \operatorname{sen}(y) dx \right\} \cup \left\{ \int x^2 e^x \cos(y) dy \right\} = C$$

Para la primera integral del primer conjunto se empleará integración por partes

$$I = uv - \int v du$$

$$u = x^2 \quad du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx \quad v = e^x$$

$$\left\{ x^2 e^x \operatorname{sen}(y) - \int 2x e^x \operatorname{sen}(y) dx + \int 2x e^x \operatorname{sen}(y) dx \right\} \cup \left\{ \int x^2 e^x \cos(y) dy \right\} = C$$

$$\{e^x x^2 \operatorname{sen}(y)\} \cup \{e^x x^2 \operatorname{sen}(y)\} = C$$

$$\boxed{e^x x^2 \operatorname{sen}(y) = C}$$

que es la misma solución general obtenida por el método de variables separables.

## Problema 41

Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = \sec(2x - y) - 2$$

Sugerencia: utilice la sustitución

$$v = 2x - y$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración parcial. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Resolución de una ecuación diferencial empleando un cambio de variable.
- Solución explícita e implícita de una ecuación diferencial.
- Solución de una ecuación diferencial de variables separables.

### Solución

Esta ecuación diferencial se resuelve empleando un cambio de variable. Dado que el problema ya sugiere la sustitución, lo que resta es obtener el diferencial requerido para la ecuación

$$\frac{dv}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

Despejando a  $\frac{dy}{dx}$  para dejar a la ecuación diferencial en términos de  $x$  y  $v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 2$$

Al sustituir este valor y simplificando se obtiene una ecuación diferencial de variables separables. Por lo tanto, se agrupan términos

$$\frac{dv}{dx} - 2 = \sec(v) - 2 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \sec(v)$$

$$\frac{dv}{\sec(v)} = dx \quad \rightarrow \quad \int \cos(v) dv = \int dx$$

Integrando

$$\text{sen}(v) = x + C$$

Regresando a las variables originales

$$\boxed{\text{sen}(2x - y) = x + C}$$

que es la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial.

## Problema 42

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x^3 + 2) \frac{dy}{dx} + x^2 y - \sqrt[3]{(x^3 + 2)^2} = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Radicales. Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial lineal y de primer orden.

## Solución

La ecuación diferencial es lineal y de primer orden de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

La solución de este tipo de ecuaciones puede encontrarse empleando la fórmula general para este tipo de ecuaciones

$$y_G = e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C e^{-\int p(x)dx}$$

Pero primero se normaliza la ecuación diferencial (es decir, el coeficiente del término de la primera derivada debe de ser igual a uno)

$$y' + \frac{x^2}{x^3 + 2} y = \sqrt[3]{(x^3 + 2)^2}$$

Donde

$$p(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2}$$

$$q(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 2)^2}$$

Sustituyendo  $p(x)$  y  $q(x)$  en la fórmula general

$$y_G = e^{-\int \frac{x^2}{x^3+2} dx} \int \sqrt[3]{(x^3 + 2)^2} e^{\int \frac{x^2}{x^3+2} dx} dx + C e^{-\int \frac{x^2}{x^3+2} dx}$$

Para las integrales

$$I = \int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$$

Se resuelven con un cambio de variable

$$u = x^3 + 2, \quad du = 3x^2 dx$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln(u)$$

$$I = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 2)$$

Efectuando las operaciones

$$y_G = e^{-\frac{1}{3}\ln(x^3+2)} \int \sqrt[3]{(x^3+2)^2} e^{\frac{1}{3}\ln(x^3+2)} dx + C e^{-\frac{1}{3}\ln(x^3+2)} =$$

$$y_G = e^{\ln(x^3+2) \cdot \frac{1}{3}} \int \sqrt[3]{(x^3+2)^2} e^{\ln(x^3+2) \cdot \frac{1}{3}} dx + C e^{\ln(x^3+2) \cdot \frac{1}{3}}$$

$$y_G = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+2)}} \int \left( \sqrt[3]{(x^3+2)^2} \sqrt[3]{(x^3+2)} \right) dx + \frac{C}{\sqrt[3]{(x^3+2)}}$$

$$y_G = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+2)}} \int (x^3+2) dx + \frac{C}{\sqrt[3]{(x^3+2)}}$$

$$y_G = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+2)}} \left( \frac{x^4}{4} + 2x \right) + \frac{C}{\sqrt[3]{(x^3+2)}}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial la cual está formada por

$$y_G = y_p + y_h$$

$$y_p = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+2)}} \left( \frac{x^4}{4} + 2x \right)$$

$$y_h = \frac{C}{\sqrt[3]{(x^3+2)}}$$

conocidas como solución particular y homogénea, respectivamente.

## Problema 43

Resuelva la ecuación diferencial

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = 5$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial lineal y de primer orden.

### Solución

Como la ecuación diferencial es lineal y de primer orden de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Donde

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$q(x) = 5$$

La solución general de este tipo de ecuaciones puede obtenerse con la expresión

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left( C + \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right)$$

Primero sustituimos los valores para  $e^{-\int p(x) dx}$

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int \left(-\frac{2x}{x^2+1}\right) dx} = e^{\int \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) dx}$$

La integral se puede resolver mediante un cambio de variable

$$u = x^2 + 1 \quad du = 2x dx$$

$$e^{\int \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) dx} = e^{\int \frac{du}{u}} = e^{\ln(u)} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$$

Ahora para  $e^{\int P(x) dx}$

$$e^{\int P(x) dx} = e^{-\int \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) dx} = e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión para obtener la solución general

$$y = (x^2 + 1) \left( C + \int \frac{5}{x^2 + 1} dx \right)$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial queda como

$$y = (x^2 + 1)(C + 5 \operatorname{angtan}(x))$$

## Problema 44

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$zu' + 2u = 5z^3$$

### Antecedentes

- Álgebra: Radicales. Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Solución general de una ecuación diferencial lineal y de primer orden.

**Solución**

La ecuación diferencial es lineal y de primer orden de la forma

$$u' + p(z)u = q(z)$$

Cuya solución general puede obtenerse con la expresión

$$u = e^{-\int p(z) dz} \left( C + \int e^{\int p(z) dz} q(z) dz \right)$$

Normalizando la ecuación

$$u' + \frac{2}{z}u = 5z^2$$

Sustituyendo valores en la expresión para obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$u = e^{-\int \frac{2}{z} dz} \left( C + \int e^{\int \frac{2}{z} dz} 5z^2 dz \right)$$

Efectuando las integrales

$$u = e^{-2\ln(z)} \left( C + \int e^{2\ln(z)} 5z^2 dz \right) = \frac{1}{z^2} \left[ C + \int (z^2)(5z^2) dz \right]$$

$$u = \frac{1}{z^2} \left[ C + 5 \int (z^4) dz \right] = \frac{1}{z^2} (C + z^5)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$u = z^3 + \frac{C}{z^2}$$

Hay que notar que la solución general consta de dos soluciones

$$u = u_p + u_c$$

La función complementaria  $u_c = \frac{C}{z^2}$  y la integral particular  $u_p = z^3$ . La función complementaria resuelve a la ecuación diferencial homogénea asociada, que para este caso es

$$u' + \frac{2}{z}u = 0$$

Sustituyendo  $u_c$  y su derivada en la ecuación diferencial homogénea asociada

$$-\frac{2C}{z^3} + \frac{2}{z}\left(\frac{C}{z^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{2C}{z^3} + \frac{2C}{z^3} = 0$$

$$0 = 0$$

Donde se verifica la igualdad. Análogamente, sustituyendo  $u_p$  y su derivada en la ecuación diferencial

$$(3z^2) + \frac{2}{z}(z^3) = 5z^2 \quad \rightarrow \quad 3z^2 + 2z^3 = 5z^3$$

$$5z^3 = 5z^3$$

Que también se verifica esta solución.

# TEMA 2

## Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

## Problema 1

Encuentre la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, que tiene como una solución particular

$$y = -5xe^x \cos(x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Números complejos. Raíces de polinomios.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución particular de una ecuación diferencial.
- Operadores diferenciales.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Obtención de una ecuación diferencial.
- Raíces repetidas.

### Solución

Analizando la solución particular del problema se observa que el término  $e^x \cos(x)$  indica que proviene de las raíces complejas  $1 + i$ . Es decir, las raíces complejas  $a + bi$

$$y = e^{ax}(\cos(bx) + \operatorname{sen}(bx))$$

La expresión con operadores diferenciales de esta solución que involucra raíces complejas es

$$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)y = 0 \quad \dots (1)$$

además, el término  $x$  indica que las raíces complejas se repiten dos veces

$$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^2 y = 0 \quad \dots (2)$$

cabe mencionar que la constante  $-5$  no afecta en nada las raíces ni la repetición de estas. Sustituyendo los valores  $a = 1$  y  $b = 1$  en (2)

$$(D^2 - 2D + 2)^2 y = 0$$

La ecuación auxiliar obtenida de los operadores diferenciales es

$$(m^2 - 2m + 2)^2 = 0$$

desarrollando el producto de la ecuación auxiliar

$$(m^2 - 2m + 2)(m^2 - 2m + 2) = 0$$

$$m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m^3 + 4m^2 - 4m + 2m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m^4 - 4m^3 + 8m^2 - 8m + 4 = 0$$

regresando a los operadores diferenciales

$$(D^4 - 4D^3 + 8D^2 - 8D + 4)y = 0$$

finalmente, la ecuación diferencial solicitada es

$$\boxed{\frac{d^4 y}{dx^4} - 4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 4y = 0}$$

## Problema 2

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y = 0$$

## Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Factorización de suma de cubos. Fórmula general para ecuaciones de segundo grado. Raíces de polinomios. Números complejos.

## Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Solución homogénea o complementaria de la ecuación diferencial.

## Solución

La ecuación diferencial del problema es lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes. Por lo tanto, la solución general estará dada únicamente por la solución homogénea o complementaria. Expresando la ecuación diferencial en términos del operador  $D$

$$(D^3 + 1)y = 0$$

de esta expresión podemos obtener la ecuación auxiliar que es

$$m^3 + 1 = 0$$

ya que la ecuación auxiliar es una suma de cubos, se factoriza de la siguiente manera

$$(m + 1)(m^2 - m + 1) = 0$$

donde la primera raíz se obtiene al despejar  $m$  del primer factor lineal  $m + 1 = 0$

$$m_1 = -1$$

para determinar las raíces del polinomio reducido  $m^2 - m + 1 = 0$  se utiliza la fórmula general para polinomios de segundo grado

$$m_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

por lo que las otras dos raíces son:

$$m_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad m_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De acuerdo con las raíces obtenidas, el conjunto fundamental de soluciones es

$$C.F.S. = \left\{ e^{-x}, e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right\}$$

La solución general de la ecuación diferencial está dada por el conjunto fundamental de soluciones:

$$y_G = C_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

### Problema 3

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

#### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Raíces de polinomios. Obtención de raíces de números complejos. Números complejos en su forma binómica y trigonométrica. División sintética.

#### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Solución homogénea o complementaria de la ecuación diferencial.

**Solución**

Expresando la ecuación diferencial lineal en términos del operador  $D$

$$(D^5 + D^4 + D + 1)y = 0$$

de esta forma es posible obtener su ecuación auxiliar es

$$m^5 + m^4 + m + 1 = 0$$

Para obtener las raíces del polinomio de quinto grado se utiliza la división sintética, mediante el método de prueba directa para la obtención de raíces racionales. Así, probando con el valor de  $m = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

Por lo tanto,  $m_1 = -1$  es una raíz y el polinomio reducido es

$$m^4 + 1 = 0$$

para obtener la raíz cuarta de  $-1$  recurriremos a los números complejos y recordando que  $-1 = cis180^\circ$

$$m = \sqrt[4]{-1} \rightarrow m = \sqrt[4]{cis(180^\circ)}$$

$$m = \sqrt[4]{1} cis\left(\frac{180^\circ + k360^\circ}{4}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

Para  $k = 0$ :

$$m = cis(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Para  $k = 1$ :

$$m = cis(135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Para  $k = 2$ :

$$m = \text{cis}(225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Para  $k = 3$ :

$$m = \text{cis}(315^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

por lo que las otras cuatro raíces son:

$$m_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad m_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad m_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad m_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

A partir de las raíces obtenidas se puede formar el conjunto fundamental de soluciones

*C.F.S.* =

$$= \left\{ e^{-x}, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right\}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1 e^{-x} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_3 \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_5 \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right)$$

## Problema 4

Resuelva la ecuación diferencial

$$y^{VI} + 8y^{IV} + 16y'' = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Raíces de polinomios. Números complejos.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea o complementaria de la ecuación diferencial.
- Raíces repetidas.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.

### Solución

Reescribiendo la ecuación diferencial en términos del operador  $D$

$$(D^6 + 8D^4 + 16D^2)y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^6 + 8m^4 + 16m^2 = 0$$

$$m^2(m^4 + 8m^2 + 16) = 0$$

$$m^2(m^2 + 4)^2 = 0$$

Como se puede observar se tienen dos raíces nulas y dos pares de raíces complejas

$$m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = m_4 = 2i, \quad m_5 = m_6 = -2i$$

además, se tiene raíces repetidas, por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$C.F.S. = \{1, x, \cos(2x), \sin(2x), x\cos(2x), x\sin(2x)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 + C_2x + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x) + C_5x\cos(2x) + C_6x\sin(2x)$$

## Problema 5

Determine si la siguiente expresión es válida

$$(xD + \alpha)(D + \beta)y \neq (D + \beta)(xD + \alpha)y$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Derivación implícita. Derivada de un producto.

### Concepto básico para destacar

- Propiedades del operador diferencial.

### Solución

Se desarrollan las multiplicaciones de los dos lados de la desigualdad haciendo uso de las propiedades de los operadores diferenciales

$$(xD + \alpha)(Dy + \beta y) \stackrel{?}{=} (D + \beta)(xDy + \alpha y)$$

$$xD(Dy + \beta y) + \alpha(Dy + \beta y) \stackrel{?}{=} D(xDy + \alpha y) + \beta(xDy + \alpha y)$$

$$xD^2y + \beta xDy + \alpha Dy + \alpha\beta y \stackrel{?}{=} xD^2y + Dy + \alpha Dy + \beta xDy + \beta\alpha y$$

$$xD^2y + (\beta x + \alpha)Dy + \alpha\beta \neq xD^2y + [\beta x + (\alpha + 1)]Dy + \alpha\beta y$$

Por lo tanto, se demuestra que  $(xD + \alpha)(D + \beta)y \neq (D + \beta)(xD + \alpha)y$ .

## Problema 6

Plantee un operador aniquilador de la siguiente función

$$q(t) = 5\cos^2(t) - 3\operatorname{sen}(4t) + 8\operatorname{sen}^2(2t)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Identidades trigonométricas.

### Concepto básico para destacar

- Operador anulador o aniquilador.

### Solución

Como no se tienen aniquiladores para funciones trigonométricas cuadráticas, se hará uso de identidades trigonométricas para reescribir la función del problema

$$q(t) = 5\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) - 3\operatorname{sen}(4t) + 8\left(\frac{1 - \cos(4t)}{2}\right)$$

$$q(t) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos(2t) - 3\operatorname{sen}(4t) + \frac{8}{2} - 4\cos(4t)$$

$$q(t) = \frac{13}{2} + \frac{5}{2}\cos(2t) - 3\operatorname{sen}(4t) - 4\cos(4t)$$

A continuación, se hace uso de la tabla de operadores anuladores

Función	Anulador
$x^{n-1}$	$D^n$
$e^{ax}$	$D - a$
$x^{n-1}e^{ax}$	$(D - a)^n$
$\cos(bx), \operatorname{sen}(bx)$	$D^2 + b^2$
$x^{n-1}\cos(bx), x^{n-1}\operatorname{sen}(bx)$	$(D^2 + b^2)^n$
$e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), x^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

Por lo que el operador anulador es

$$f(D) = D(D^2 + 4)(D^2 + 16)$$

## Problema 7

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - y = e^x$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Factorización de resta de cubos. Solución general de ecuaciones de segundo grado. Números complejos.
- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador anulador o aniquilador.
- Raíces repetidas.

### Solución

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y''' - y = e^x$$

$$(D^3 - 1)y = 0$$

Cuya ecuación auxiliar es:

$$m^3 - 1 = 0$$

debido a que es una resta de cubos, se factoriza como:

$$(m - 1)(m^2 + m + 1) = 0$$

se obtiene una raíz real y un par de raíces complejas conjugadas

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad m_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

con los valores de  $m$  se obtiene el conjunto fundamental de soluciones, el cual es

$$C.F.S. = \left\{ e^x, e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right\}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial homogénea se obtiene con la combinación lineal del conjunto fundamental de soluciones

$$y_h = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

Para determinar la solución particular, se emplea un operador que anule a  $q(x) = e^x$  y lo vuelva cero.

Analizando la siguiente tabla de operadores anuladores

Función	Anulador
$x^{n-1}$	$D^n$
$e^{ax}$	$D - a$
$x^{n-1}e^{ax}$	$(D - a)^n$
$\cos(bx), \quad \text{sen}(bx)$	$D^2 + b^2$
$x^{n-1}\cos(bx), \quad x^{n-1}\text{sen}(bx)$	$(D^2 + b^2)^n$
$e^{ax}\cos(bx), \quad e^{ax}\text{sen}(bx)$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), \quad x^{n-1}e^{ax}\text{sen}(bx)$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

El operador anulador buscado es

$$f(D) = D - 1$$

Aplicando este anulador a la ecuación diferencial

$$(D - 1)(D^3 - 1)y = (D - 1)e^x$$

$$(D - 1)(D - 1)(D^2 + D + 1)y = 0$$

$$(D - 1)^2(D^2 + D + 1)y = 0$$

Entonces, la nueva solución homogénea es

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + C_4 x e^x$$

para obtener la solución particular se restan los términos de  $y$  con los de  $y_h$

$$y_p = y - y_h = C_4 x e^x$$

derivando  $y_p = C_4 x e^x$  tantas veces como se tenga en la ecuación original

$$y_p' = C_4 e^x + C_4 x e^x$$

$$y_p'' = 2C_4e^x + C_4xe^x$$

$$y_p''' = 3C_4e^x + C_4xe^x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y resolviendo para encontrar el valor de  $C_4$

$$3C_4e^x + C_4xe^x - C_4xe^x = e^x$$

$$3C_4e^x = e^x \quad \rightarrow \quad C_4 = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y_p = \frac{1}{3}xe^x$$

La solución general está formada por la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}xe^x$$

## Problema 8

Resuelva la siguiente ecuación diferencial, la cual está expresada con operadores diferenciales

$$D(xD - 1)y = x + x\operatorname{sen}(x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador diferencial.
- Operador anulador o aniquilador.
- Raíces repetidas.

### Solución

Como primer paso se desarrolla el operador diferencial en la ecuación diferencial

$$D(xDy - y) = x + x\text{sen}(x)$$

$$Dy + xD^2y - Dy = x + x\text{sen}(x)$$

$$xD^2y = x + x\text{sen}(x)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación diferencial por  $\frac{1}{x}$  para simplificarla

$$\left(\frac{1}{x}\right)(xD^2y) = \left(\frac{1}{x}\right)(x + x\text{sen}(x))$$

$$D^2y = 1 + \text{sen}(x)$$

Quedando finalmente

$$y'' = 1 + \text{sen}(x)$$

Por lo que se obtiene una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden y de coeficientes constantes. A continuación, se obtiene la solución de la homogénea asociada, para lo cual se emplea la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada que es

$$y'' = 0$$

cuya ecuación auxiliar es

$$m^2 = 0$$

Por lo que las dos raíces del polinomio son nulas

$$m_1 = m_2 = 0$$

Se plantea el conjunto fundamental de soluciones con las raíces repetidas

$$C.F.S. = \{1, x\}$$

A partir del conjunto fundamental de soluciones se obtiene la solución homogénea que es

$$y_h = C_1 + C_2x$$

Para obtener la solución particular es necesario aplicar un anulador a la función planteada del lado derecho de la ecuación diferencial

$$q(x) = 1 + \text{sen}(x)$$

De la tabla de operadores anuladores

Función		Anulador
$x^{n-1}$		$D^n$
$e^{ax}$		$D - a$
$x^{n-1}e^{ax}$		$(D - a)^n$
$\cos(bx),$	$\text{sen}(bx)$	$D^2 + b^2$
$x^{n-1}\cos(bx),$	$x^{n-1}\text{sen}(bx)$	$(D^2 + b^2)^n$
$e^{ax}\cos(bx),$	$e^{ax}\text{sen}(bx)$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{n-1}e^{ax}\cos(bx),$	$x^{n-1}e^{ax}\text{sen}(bx)$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

Como la función  $q(x)$  está conformada por una constante y una función seno, el operador anulador será

$$f(D) = D(D^2 + 1)$$

Aplicamos el anulador a la ecuación diferencial

$$[D(D^2 + 1)]D^2y = [D(D^2 + 1)](1 + \text{sen}(x))$$

Como el anulador convierte a la función  $q(x)$  en cero, entonces la ecuación diferencial no homogénea se convierte en una ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

$$[D(D^2 + 1)]D^2y = 0$$

A continuación, se plantea su ecuación auxiliar

$$[m(m^2 + 1)]m^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m^3(m^2 + 1) = 0$$

Las raíces que dan solución a la ecuación anterior son

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0, \quad m_4 = i, \quad m_5 = -i$$

y se plantea el conjunto fundamental de soluciones con los valores de las raíces de  $m$

$$C.F.S. = \{1, x, x^2, \cos(x), \text{sen}(x)\}$$

Se hace la combinación lineal del  $C.F.S.$  para obtener la forma de la nueva solución homogénea

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos(x) + C_5\text{sen}(x)$$

Para hallar la solución particular, se emplea la siguiente resta de soluciones

$$y_p = y - y_h$$

$$y_p = C_3x^2 + C_4\cos(x) + C_5\text{sen}(x)$$

Ahora, se obtiene la segunda derivada para poder sustituirla en la ecuación diferencial y así encontrar los valores de las constantes  $C$

$$y'_p = 2C_3x - C_4\text{sen}(x) + C_5\text{cos}(x)$$

$$y''_p = 2C_3 - C_4\text{cos}(x) - C_5\text{sen}(x)$$

Se sustituye  $y''_p$  en la ecuación diferencial

$$2C_3 - C_4\text{cos}(x) - C_5\text{sen}(x) = 1 + \text{sen}(x)$$

Por igualdad de términos

$$x^2: \quad 2C_3 = 1$$

$$\text{cos}(x): \quad -C_4 = 0$$

$$\text{sen}(x): \quad -C_5 = 1$$

Los valores de las constantes son

$$C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = -1$$

por lo que la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - \text{sen}(x)$$

La solución general está conformada por la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2 - \text{sen}(x)$$

## Problema 9

Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = 18e^{2x} - 4\text{sen}(x) - x^2$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador diferencial.
- Operador anulador o aniquilador.
- Raíces repetidas.

### Solución

Primero se obtiene la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Escribiendo esta ecuación en términos de operadores diferenciales

$$(D^2 + 2D + 1)y = 0$$

de esta forma, su ecuación auxiliar y sus soluciones son

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (m + 1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -1$$

Planteando el conjunto fundamental de soluciones

$$C.F.S. = \{e^{-x}, xe^{-x}\}$$

Se realiza la combinación lineal del conjunto fundamental de soluciones para formar la solución homogénea

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Posteriormente, se obtiene la solución particular de la ecuación diferencial. Para ello es necesario determinar cuál es el operador anulador para la función del lado derecho de la igualdad en la ecuación diferencial

$$q(x) = 18e^{2x} - 4\text{sen}(x) - x^2$$

Haciendo uso de la tabla de operadores anuladores.

Función	Anulador
$x^{n-1}$	$D^n$
$e^{ax}$	$D - a$
$x^{n-1}e^{ax}$	$(D - a)^n$
$\cos(bx), \text{sen}(bx)$	$D^2 + b^2$
$x^{n-1}\cos(bx), x^{n-1}\text{sen}(bx)$	$(D^2 + b^2)^n$
$e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\text{sen}(bx)$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), x^{n-1}e^{ax}\text{sen}(bx)$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

El anulador que convierte a la función  $q(x)$  en cero es

$$f(D) = (D - 2)(D^2 + 1)(D^3)$$

Se aplica el anulador en ambos lados de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & (D - 2)(D^2 + 1)(D^3)(D^2 + 2D + 1)y \\ &= (D - 2)(D^2 + 1)(D^3)(18e^{2x} - 4\text{sen}(x) - x^2) \end{aligned}$$

Simplificando

$$(D^3)(D + 1)^2(D - 2)(D^2 + 1)y = 0$$

Con el paso anterior se ha convertido a la ecuación diferencial en una ecuación diferencial homogénea asociada. La nueva ecuación auxiliar es

$$(m^3)(m + 1)^2(m - 2)(m^2 + 1) = 0$$

Las raíces del polinomio son

$$m_1 = m_2 = -1, \quad m_3 = m_4 = m_5 = 0, \quad m_6 = 2, \quad m_7 = i, \quad m_8 = -i$$

El nuevo conjunto fundamental de soluciones queda como

$$C.F.S = \{e^{-x}, xe^{-x}, 1, x, x^2, e^{2x}, \cos(x), \sin(x)\}$$

por lo tanto, la nueva solución homogénea tiene la siguiente forma

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3 + C_4x + C_5x^2 + C_6e^{2x} + C_7 \cos(x) + C_8 \sin(x)$$

Para obtener  $y_p$  lo hacemos mediante la siguiente relación

$$y_p = y - y_h$$

Aplicando la resta

$$y_p = C_3 + C_4x + C_5x^2 + C_6e^{2x} + C_7 \cos(x) + C_8 \sin(x)$$

y derivando  $y_p$  tantas veces como el orden de la ecuación diferencial

$$y_p' = C_4 + 2C_5x + 2C_6e^{2x} - C_7 \sin(x) + C_8 \cos(x)$$

$$y_p'' = 2C_5 + 4C_6e^{2x} - C_7 \cos(x) - C_8 \sin(x)$$

Ahora, se sustituye a  $y_p$  y a sus derivadas en la ecuación diferencial original

$$\begin{aligned} & (2C_5 + 4C_6e^{2x} - C_7 \cos(x) - C_8 \operatorname{sen}(x)) \\ & + 2(C_4 + 2C_5x + 2C_6e^{2x} - C_7 \operatorname{sen}(x) + C_8 \cos(x)) + \\ & + (C_3 + C_4x + C_5x^2 + C_6e^{2x} + C_7 \cos(x) + C_8 \operatorname{sen}(x)) = 18e^{2x} - 4 \operatorname{sen}(x) - x^2 \end{aligned}$$

Igualdad de términos para obtener los valores de las constantes

$$\begin{array}{ll} x^0: & 2C_5 + 2C_4 + C_3 = 0 \\ x: & 4C_5 + C_4 = 0 \\ x^2: & C_5 = -1 \\ e^{2x}: & 9C_6 = 18 \\ \cos(x): & 2C_8 = 0 \\ \operatorname{sen}(x): & -2C_7 = -4 \end{array}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene

$$C_3 = -6, \quad C_4 = 4, \quad C_5 = -1, \quad C_6 = 2, \quad C_7 = 2, \quad C_8 = 0$$

y al sustituir los valores de los coeficientes en  $y_p$  se obtiene la solución particular buscada

$$y_p = -6 + 4x - x^2 + 2e^{2x} + 2 \cos(x)$$

Finalmente, sustituyendo en  $y_G = y_h + y_p$  y para obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y_G = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 6 + 4x - x^2 + 2e^{2x} + 2 \cos(x)$$

## Problema 10

Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$D(-xD + 1)y = 2x \operatorname{sen}^2(x)$$

## Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos. Identidades trigonométricas.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal.

## Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador anulador o aniquilador.
- Raíces repetidas.

## Solución

Desarrollando los operadores diferenciales y simplificando

$$(-xD^2 - D + D)y = 2x \operatorname{sen}^2(x) \quad \rightarrow \quad (-xD^2)y = 2x \operatorname{sen}^2(x)$$

$$-xy'' = 2x \operatorname{sen}^2(x) \quad \rightarrow \quad y'' = -2 \operatorname{sen}^2(x)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$y'' = -2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right)$$

al simplificar, la ecuación diferencial queda como

$$y'' = \cos(2x) - 1$$

Para la ecuación diferencial homogénea asociada se tiene

$$y'' = 0 \quad \rightarrow \quad D^2y = 0$$

de donde la ecuación auxiliar asociada es

$$m^2 = 0$$

cuya solución son dos raíces nulas repetidas. Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_H = C_1 + C_2x$$

Para la solución particular se busca un aniquilador que al multiplicarlo a la función  $q(x) = \cos(2x) - 1$  de la ecuación diferencial la convierta en cero.

Función	Anulador
$x^{n-1}$	$D^n$
$e^{ax}$	$D - a$
$x^{n-1}e^{ax}$	$(D - a)^n$
$\cos(bx), \quad \text{sen}(bx)$	$D^2 + b^2$
$x^{n-1}\cos(bx), \quad x^{n-1}\text{sen}(bx)$	$(D^2 + b^2)^n$
$e^{ax}\cos(bx), \quad e^{ax}\text{sen}(bx)$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), \quad x^{n-1}e^{ax}\text{sen}(bx)$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

Proponiendo el siguiente aniquilador

$$f(D) = D(D^2 + 4)$$

y aplicando este aniquilador en la ecuación diferencial

$$[D(D^2 + 4)]D^2y = [D(D^2 + 4)](\cos(2x) - 1)$$

$$[D^3(D^2 + 4)]y = 0$$

la ecuación auxiliar queda como

$$m^3(m^2 + 4) = 0$$

ahora, se propone una nueva solución homogénea

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos(2x) + C_5\sin(2x)$$

quitando los términos repetidos mediante la siguiente resta de soluciones  $y_p = y - y_h$  y así obtener la solución particular

$$y_p = C_3x^2 + C_4\cos(2x) + C_5\sin(2x)$$

derivando dos veces esta solución para sustituirla en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y_p' &= 2C_3x - 2C_4\sin(2x) + 2C_5\cos(2x) \rightarrow y_p'' = \\ &= 2C_3 - 4C_4\cos(2x) - 4C_5\sin(2x) \end{aligned}$$

La ecuación diferencial queda como

$$2C_3 - 4C_4\cos(2x) - 4C_5\sin(2x) = \cos(2x) - 1$$

Los valores de  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$  se pueden encontrar por igualdad de componentes

$$\begin{cases} \mathbb{R}: & 2C_3 = -1 \\ \cos(2x): & -4C_4 = 1 \\ \sin(2x): & -4C_5 = 0 \end{cases}$$

$$C_3 = -\frac{1}{2}, \quad C_4 = -\frac{1}{4}, \quad C_5 = 0$$

por lo que la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\cos(2x)$$

Finalmente, se obtiene la solución general a partir de la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_H + y_P$$

$$y_G = C_1 + C_2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\cos(2x)$$

## Problema 11

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = -6e^x + 10\cos(x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador anulador o aniquilador.
- Raíces repetidas.

### Solución

Puesto que se trata de una ecuación diferencial lineal su solución general se puede escribir de la siguiente forma

$$y_G = y_h + y_p$$

El primer paso es obtener la ecuación diferencial homogénea asociada y expresarla en términos del operador diferencial

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad (D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$$

su ecuación auxiliar asociada se representa como

$$m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0$$

Al resolver el polinomio se tiene que las raíces son

$$m_1 = m_2 = 1, \quad m_3 = 2$$

con los valores de  $m$  se plantea el conjunto fundamental de soluciones

$$C.F.S. = \{e^x, xe^x, e^{2x}\}$$

al hacer combinación lineal con el  $C.F.S.$  se llega a la solución homogénea de la ecuación diferencial

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x}$$

Para obtener la solución particular es necesario encontrar el operador diferencial anulador de la función que está del lado derecho de la igualdad en la ecuación diferencial

$$q(x) = -6e^x + 10\cos(x)$$

De la tabla de operadores anuladores

Función		Anulador
$x^{n-1}$		$D^n$
$e^{ax}$		$D - a$
$x^{n-1}e^{ax}$		$(D - a)^n$
$\cos(bx),$	$\text{sen}(bx)$	$D^2 + b^2$
$x^{n-1}\cos(bx),$	$x^{n-1}\text{sen}(bx)$	$(D^2 + b^2)^n$
$e^{ax}\cos(bx),$	$e^{ax}\text{sen}(bx)$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{n-1}e^{ax}\cos(bx),$	$x^{n-1}e^{ax}\text{sen}(bx)$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

El anulador de la función  $q(x)$  es

$$f(D) = (D - 1)(D^2 + 1)$$

Ahora, se escribe la ecuación diferencial en términos de operadores diferenciales

$$(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = -6e^x + 10\cos(x)$$

Aplicamos el anulador en ambos lados de la ecuación diferencial

$$(D - 1)(D^2 + 1)(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = (D - 1)(D^2 + 1)(-6e^x + 10\cos(x))$$

como el anulador convierte a la función  $q(x)$  en cero, entonces se obtiene una ecuación diferencial homogénea asociada

$$(D - 1)(D^2 + 1)(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$(m - 1)(m^2 + 1)(m - 1)^2(m - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad (m - 1)^3(m - 2)(m^2 + 1) = 0$$

al resolver el polinomio se tienen las siguientes raíces

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad m_4 = 2, \quad m_5 = i, \quad m_6 = -i$$

Planteando el conjunto fundamental de soluciones

$$C.F.S. = \{e^x, xe^x, e^{2x}, x^2e^x, \cos(x), \sin(x)\}$$

haciendo combinación lineal con el  $C.F.S.$  para conseguir una nueva solución homogénea

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x} + C_4x^2e^x + C_5\cos(x) + C_6\sin(x)$$

Para obtener la solución particular se realiza la resta entre las soluciones homogéneas

$$y_p = y - y_h$$

por lo que se obtiene la siguiente expresión

$$y_p = C_4 x^2 e^x + C_5 \cos(x) + C_6 \operatorname{sen}(x)$$

Derivando  $y_p$  tantas veces como el orden de la ecuación diferencial

$$y_p' = 2C_4 x e^x + C_4 x^2 e^x - C_5 \operatorname{sen}(x) + C_6 \cos(x)$$

$$y_p'' = 2C_4 e^x + 4C_4 x e^x + C_4 x^2 e^x - C_5 \cos(x) - C_6 \operatorname{sen}(x)$$

$$y_p''' = 6C_4 e^x + 6C_4 x e^x + C_4 x^2 e^x + C_5 \operatorname{sen}(x) - C_6 \cos(x)$$

se sustituye a  $y_p$  y sus derivadas en la ecuación diferencial original

$$\begin{aligned} & 6C_4 e^x + 6C_4 x e^x + C_4 x^2 e^x + C_5 \operatorname{sen}(x) - C_6 \cos(x) \\ & - 4(2C_4 e^x + 4C_4 x e^x + C_4 x^2 e^x - C_5 \cos(x) - C_6 \operatorname{sen}(x)) \\ & + 5(2C_4 x e^x + C_4 x^2 e^x - C_5 \operatorname{sen}(x) + C_6 \cos(x)) \\ & - 2(C_4 x^2 e^x + C_5 \cos(x) + C_6 \operatorname{sen}(x)) = -6e^x + 10\cos(x) \end{aligned}$$

igualando términos

$$\begin{aligned} e^x: & \quad 6C_4 - 8C_4 = -6 \\ x e^x: & \quad 6C_4 - 16C_4 + 10C_4 = 0 \\ x^2 e^x: & \quad C_4 - 4C_4 + 5C_4 - 2C_4 = 0 \\ \operatorname{sen}(x): & \quad C_5 - 4C_6 - 10C_5 - 2C_6 = 0 \\ \cos(x): & \quad -C_6 + 4C_5 + 5C_6 - 2C_5 = 10 \end{aligned}$$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los valores de las constantes  $C$

$$C_4 = 3, \quad C_5 = 1, \quad C_6 = 2$$

La solución particular es

$$y_p = 3x^2 e^x + \cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x} + 3x^2 e^x + \cos(x) + 2\sin(x)$$

## Problema 12

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 9y = \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}t\right)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos. Identidades trigonométricas.
- Álgebra lineal: Dependencia lineal. Combinación lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Coeficientes indeterminados.
- Raíces repetidas.

### Solución

Primero, se reescribe la ecuación diferencial empleando una identidad trigonométrica

$$y'' + 9y = \frac{1 - \cos(3t)}{2}$$

Obteniendo la solución homogénea asociada

$$y'' + 9y = 0 \quad \rightarrow \quad (D^2 + 9)y = 0$$

Su ecuación auxiliar asociada se representa como

$$m^2 + 9 = 0$$

Los valores  $m$  que satisfacen la ecuación son el par de raíces complejas

$$m_1 = 3i, \quad m_2 = -3i$$

El conjunto fundamental de soluciones con las raíces complejas es el siguiente

$$C.F.S. = \{\cos(3t), \quad \text{sen}(3t)\}$$

La solución homogénea es

$$y_h = C_1 \cos(3t) + C_2 \text{sen}(3t)$$

Para encontrar la solución particular se empleará el método de coeficientes indeterminados, para lo que se propone

$$y_p = A + t(B\cos(3t) + C\text{sen}(3t))$$

Donde la variable  $t$  que multiplica a las funciones trigonométricas se agrega porque se tiene dependencia lineal. Obteniendo la segunda derivada de  $y_p$

$$y_p' = t(-3B\text{sen}(3t) + 3C\cos(3t)) + (B\cos(3t) + C\text{sen}(3t))$$

$$y_p' = (3tC + B)\cos(3t) + (-3tB + C)\text{sen}(3t)$$

$$y_p'' = -3(3tC + B)\text{sen}(3t) + 3C\cos(3t) + 3(-3tB + C)\cos(3t) - 3B\text{sen}(3t)$$

$$y_p'' = (-9tB + 6C)\cos(3t) + (-9tC - 6B)\text{sen}(3t)$$

Sustituyendo los términos correspondientes en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & (-9tB + 6C)\cos(3t) + (-9tC - 6B)\sen(3t) + 9[A + t(B\cos(3t) + C\sen(3t))] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3t) \end{aligned}$$

Igualando términos para así formar un sistema de ecuaciones que nos permita encontrar los valores de  $A$ ,  $B$ , y  $C$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(3t): \quad -9tB + 6C + -9tB = -\frac{1}{2} \\ \sen(3t): \quad -9tC - 6B + 9C = 0 \\ t^0: \quad \quad \quad 9A = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Del sistema de ecuaciones

$$9A = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{18}$$

$$6C = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad C = -\frac{1}{12}$$

$$-6B = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

Por lo cual la solución particular queda como

$$y_p = \frac{1}{18} - \frac{1}{12}t\sen(3t)$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1\cos(3t) + C_2\sen(3t) + \frac{1}{18} - \frac{1}{12}t\sen(3t)$$

## Problema 13

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 7y' + 10y = e^{-2t} - 8t + 2$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Coeficientes indeterminados.

### Solución

Lo primero es obtener la solución homogénea, entonces se escribe su ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + 7y' + 10y = 0$$

Esta ecuación expresada en términos del operador diferencial queda como

$$(D^2 + 7D + 10)y = 0 \rightarrow (D + 5)(D + 2)y = 0$$

Cuya ecuación auxiliar es

$$(m + 5)(m + 2) = 0$$

A partir de los factores lineales que conforman la ecuación auxiliar se puede observar que los valores de  $m$  son

$$m_1 = -5, \quad m_2 = -2$$

El conjunto fundamental de soluciones es

$$C.F.S. = \{e^{-5t}, e^{-2t}\}$$

y la solución homogénea de la ecuación diferencial queda como

$$y_h = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-2t}$$

Para la solución particular se empleará el método de coeficientes indeterminados y como del lado derecho de la igualdad de la ecuación diferencial se tiene

$$q(t) = e^{-2t} - 8t + 2$$

Entonces, se propone a la función

$$y_p = A + Bt + Cte^{-2t}$$

donde el término  $te^{-2t}$  indica dependencia lineal. Posteriormente, como la ecuación diferencial del problema es de orden 2 entonces se obtiene la segunda derivada de  $y_p$

$$y_p' = B + C(-2te^{-2t} + e^{-2t}) = B + Ce^{-2t}(-2t + 1)$$

$$y_p'' = C(-2e^{-2t} + 2e^{-2t}(2t + 1)) = Ce^{-2t}(4t - 4)$$

Sustituyendo los valores de las derivadas en la ecuación diferencial original y resolviendo el sistema

$$Ce^{-2t}(4t - 4) + 7[B + Ce^{-2t}(-2t + 1)] + 10(A + Bt + Cte^{-2t}) = e^{-2t} - 8t + 2$$

$$\begin{aligned} 4Cte^{-2t} - 14Cte^{-2t} + 10Cte^{-2t} - 4Ce^{-2t} + 7Ce^{-2t} + 7B + 10A + 10Bt \\ = e^{-2t} - 8t + 2 \end{aligned}$$

$$3Ce^{-2t} + 7B + 10A + 10Bt = e^{-2t} - 8t + 2$$

Igualando términos

$$e^{-2t}: \quad 3C = 1$$

$$t: \quad 10B = -8$$

$$t^0: \quad 7B + 10A = 2$$

$$3C = 1 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{3}$$

$$10B = -8 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{4}{5}$$

$$7B + 10A = 2 \quad \rightarrow \quad 10A = 2 - 7\left(-\frac{4}{5}\right) \quad \rightarrow \quad A = \frac{19}{25}$$

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y_p = \frac{19}{25} - \frac{4}{5}t + \frac{1}{3}te^{-2t}$$

La solución general se obtiene de la suma de la solución homogénea y la solución particular, esto es

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-2t} + \frac{19}{25} - \frac{4}{5}t + \frac{1}{3}te^{-2t}$$

## Problema 14

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = \cos(3x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Coeficientes indeterminados.

### Solución

Reescribiendo la ecuación diferencial en términos del operador diferencial

$$(D^2 + D - 2)y = \cos(3x)$$

Donde la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$(D^2 + D - 2)y = 0$$

A su vez, la ecuación auxiliar es

$$m^2 + m - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (m + 2)(m - 1) = 0$$

Las raíces son  $m_1 = -2$  y  $m_2 = 1$ . Entonces, el conjunto fundamental de soluciones es

$$C.F.S. = \{e^{-2x}, e^x\}$$

Haciendo combinación lineal con el *C.F.S.* para llegar a la solución homogénea de la ecuación diferencial

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

La solución particular se encontrará utilizando coeficientes indeterminados. Del lado derecho de la ecuación diferencial se tiene

$$q(x) = \cos(3x)$$

La función  $q(x)$  tiene como raíces  $\pm\sqrt{3}i$  y son diferentes a las raíces de la solución complementaria. Por lo tanto, la forma de la solución particular es

$$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

Derivando dos veces

$$y_p' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$$

$$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$$

Sustituyendo  $y_p$  y sus derivadas en la ecuación diferencial original

$$\begin{aligned} (-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)) + (-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)) - 2(A\cos(3x) \\ + B\sin(3x)) = \cos(3x) \end{aligned}$$

Factorizando

$$(-9A + 3B - 2A)\cos(3x) + (-9B - 3A - 2B)\sin(3x) = \cos(3x)$$

Igualando términos

$$\cos(3x): \quad -11A + 3B = 1$$

$$\sin(3x): \quad -3A - 11B = 0$$

Para encontrar los valores de  $A$  y  $B$  se empleara la regla de Cramer

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{121 + 9} = -\frac{11}{130}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -11 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{3}{121 + 9} = \frac{3}{130}$$

La solución particular queda como

$$y_p = -\frac{11}{130} \cos(3x) + \frac{3}{130} \sin(3x)$$

La solución general es la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{11}{130} \cos(3x) + \frac{3}{130} \sin(3x)$$

## Problema 15

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 10 + 5e^x$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos.
- Cálculo Diferencial: Notación de Lagrange y Leibniz para la derivada. Derivación. Derivada de un producto.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.

- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Coeficientes indeterminados.
- Raíces repetidas.

### Solución

La ecuación diferencial en términos del operador  $D$  es

$$(D^2 - D)y = 10 + 5e^x \rightarrow D(D - 1)y = 10 + 5e^x$$

Obteniendo la ecuación diferencial homogénea asociada tenemos

$$D(D - 1)y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m(m - 1) = 0$$

Cuyas raíces son

$$m_1 = 0 \text{ y } m_2 = 1$$

El conjunto fundamental de soluciones queda como

$$C.F.S. = \{1, e^x\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 + C_2 e^x$$

Para la solución particular se utilizará el método de coeficientes indeterminados. Para ello, se analiza la función del lado derecho en la igualdad de la ecuación diferencial

$$q(x) = 10 + 5e^x$$

La función  $q(x)$  tiene como raíces 0 y 1, por ser raíces repetidas a las obtenidas en la solución homogénea. Por lo tanto, la forma de la solución particular es

$$y_p = Ax + Bxe^x$$

Donde las variables  $x$  hacen que la solución sea linealmente independiente. Derivando dos veces a esta solución

$$y_p' = A + Be^x + Bxe^x$$

$$y_p'' = Be^x + Be^x + Bxe^x = 2Be^x + Bxe^x$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial original

$$(2Be^x + Bxe^x) - (A + Be^x + Bxe^x) = 10 + 5e^x$$

Factorizando e igualando términos

$$-A + Be^x = 10 + 5e^x$$

$$-A = 10 \quad \rightarrow \quad A = -10$$

$$B = 5$$

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y_p = -10x + 5xe^x$$

La solución general se obtiene al sumar las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\boxed{y_G = C_1 + C_2e^x - 10x + 5xe^x}$$

## Problema 16

Utilice el método de coeficientes indeterminados para obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{IV} - y = e^{-x}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Números complejos.
- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Coeficientes indeterminados.

### Solución

Expresando a la ecuación diferencial en términos de su operador diferencial

$$(D^4 - 1)y = e^{-x}$$

Obteniendo la ecuación diferencial homogénea asociada y la ecuación auxiliar

$$(D^4 - 1)y = 0$$

$$(m^4 - 1) = 0$$

Encontrando los valores de  $m$  en la ecuación auxiliar

$$(m^2 + 1)(m + 1)(m - 1) = 0$$

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = i, \quad m_4 = -i$$

El conjunto fundamental de soluciones queda como

$$C.F.S. = \{e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

Para la solución particular se propone la función

$$y = Axe^{-x}$$

donde la variable  $x$  se agrega para evitar la dependencia lineal. Derivando cuatro veces esta función

$$y' = -Axe^{-x} + Ae^{-x}$$

$$y'' = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$$

$$y''' = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x}$$

$$y^{IV} = Axe^{-x} - 4Ae^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original para hallar el valor de  $A$

$$(Axe^{-x} - 4Ae^{-x}) - (Axe^{-x}) = e^{-x} \quad \rightarrow \quad -4Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$-4A = 1 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$$

La solución particular queda como

$$y_p = -\frac{1}{4}xe^{-x}$$

Finalmente, la solución general se forma al sumar la solución homogénea y la solución particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) - \frac{1}{4} x e^{-x}$$

## Problema 17

Sea la ecuación diferencial

$$\sec^2(x)y'' + y = \sec(x) - \tan^2(x)y$$

encuentre una solución particular:

- Mediante el método de coeficientes indeterminados
- Utilizando variación de parámetros

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Identidades trigonométricas. Números complejos. Regla de Cramer.
- Cálculo Diferencial: Derivación. Derivada de un producto.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral. Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador anulador o aniquilador.

- Variación de parámetros
- Raíces repetidas.

### Solución

Primero, la ecuación diferencial puede reescribirse como

$$\sec^2(x)y'' + (1 + \tan^2(x))y = \sec(x) \quad \rightarrow \quad \sec^2(x)y'' + \sec^2(x)y = \sec(x)$$

Luego, se divide la expresión anterior entre  $\sec^2(x)$

$$y'' + y = \cos(x)$$

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y'' + y = 0$$

Expresada en términos de operadores diferenciales, esta ecuación

$$(D^2 + 1)y = 0$$

De donde la ecuación auxiliar es la siguiente

$$m^2 + 1 = 0$$

Las raíces que dan solución a la ecuación auxiliar son

$$m_1 = i, \quad m_2 = -i$$

El conjunto fundamental de soluciones formado por las raíces complejas queda de la siguiente manera

$$C.F.S. = \{\cos(x), \quad \text{sen}(x)\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial queda como

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \text{sen}(x)$$

Del lado derecho de la igualdad de la ecuación diferencial se tiene una función coseno por lo que se propondría una función

$$y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Sin embargo, la solución homogénea tiene esos mismos términos, así que para evitar la dependencia lineal se propone la siguiente función como solución particular

$$y_p = Ax\cos(x) + Bx\sin(x)$$

Obteniendo la segunda derivada de  $y_p$

$$y_p' = -Ax\sin(x) + A\cos(x) + Bx\cos(x) + B\sin(x)$$

$$y_p'' = -2A\sin(x) + 2B\cos(x) - Ax\cos(x) - Bx\sin(x)$$

Sustituyendo  $y_p$  y  $y_p''$  en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} &(-2A\sin(x) + 2B\cos(x) - Ax\cos(x) - Bx\sin(x)) + (Ax\cos(x) + Bx\sin(x)) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

$$-2A\sin(x) + 2B\cos(x) = \cos(x)$$

Por igualdad de términos

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{2}$$

La solución particular de la ecuación diferencial es

$$y_p = \frac{1}{2}x\sin(x)$$

La solución general es la suma de las soluciones obtenidas

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(x)$$

## b) Variación de parámetros

Empleando el método de variación de parámetros y proponiendo a la siguiente función como solución particular

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

Donde la solución particular propuesta debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

Para este caso  $y_1 = \cos(x)$ ,  $y_2 = \operatorname{sen}(x)$ ,  $f(x) = \cos(x)$

$$y_p = \cos(x) u_1(x) + \operatorname{sen}(x) u_2(x)$$

Además, se tiene que hallar el wronskiano que involucra a los valores de  $y_1$ ,  $y_2$  y sus derivadas

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

Para obtener el valor de  $u_1(x)$  se usa la regla de Cramer

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \text{sen}(x) \\ \cos(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -\text{sen}(x)\cos(x)$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\text{sen}(x)\cos(x)$$

$$u_1(x) = \int (-\text{sen}(x)\cos(x)) dx = -\frac{1}{2}\text{sen}^2(x)$$

Ahora, para  $u_2(x)$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x)$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \cos^2(x)$$

$$u_2(x) = \int \cos^2(x) dx$$

Para poder resolver esta integral que involucra un coseno al cuadrado se usa una identidad trigonométrica

$$\int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}(2x)$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p = \left( -\frac{1}{2}\text{sen}^2(x) \right) \cos(x) + \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) \right) \text{sen}(x)$$

Simplificando y empleando la identidad trigonométrica  $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$

$$y_p = -\frac{1}{2}\text{sen}^2(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x\text{sen}(x) + \frac{1}{4}(2\text{sen}(x)\cos(x))\text{sen}(x)$$

$$y_p = -\frac{1}{2}\text{sen}^2(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x\text{sen}(x) + \frac{1}{2}\text{sen}^2(x)\cos(x) = \frac{1}{2}x\text{sen}(x)$$

Nuevamente, la solución general es

$$y_G = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(x)$$

## Problema 18

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y' + e^{2t}y = e^{-3t}$$

si se sabe que el conjunto solución es

$$\{5\cos(e^{-t}) - 89\operatorname{sen}(e^{-t}), -7\cos(e^{-t}), 45\operatorname{sen}(e^{-t})\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por partes.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador anulador o aniquilador.
- Variación de parámetros.
- Raíces repetidas.

### Solución

Debido a que la ecuación diferencial es de coeficientes variables, la solución de esta se obtiene por el método variación de parámetros. A partir del conjunto funda-

mental de soluciones dado en el problema, el cual es linealmente dependiente, se puede conseguir la solución homogénea

$$y_h = C_1 \cos(e^{-t}) + C_2 \operatorname{sen}(e^{-t})$$

Planteando la solución particular que se encontrará con el método de variación de parámetros

$$y_p = y_1 u_1(t) + y_2 u_2(t)$$

Se debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(t) + y_2 u_2(t) = 0$$

$$y_1' u_1(t) + y_2' u_2(t) = f(t)$$

Donde  $y_1 = \cos(e^{-t})$ ,  $y_2 = \operatorname{sen}(e^{-t})$  y  $f(t) = e^{-3t}$ . La solución particular también se puede escribir como

$$y_p = \cos(e^{-t}) u_1(t) + \operatorname{sen}(e^{-t}) u_2(t)$$

Empleando un wronskiano con los valores de  $y_p$

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(e^{-t}) & \operatorname{sen}(e^{-t}) \\ e^{-t} \operatorname{sen}(e^{-t}) & -e^{-t} \cos(e^{-t}) \end{vmatrix} = -e^t (\cos^2(e^{-t}) + \operatorname{sen}^2(e^{-t}))$$

$$W = -e^t$$

Obteniendo el valor de  $u_1(t)$  dado por

$$u_1(t) = \int u_1'(t) dt$$

donde

$$u_1'(t) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{vmatrix}$$

Sustituyendo valores

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \text{sen}(e^{-t}) \\ e^{-3t} & -e^{-t}\text{cos}(e^{-t}) \end{vmatrix} = -e^{-3t}\text{sen}(e^{-t})$$

$$u_1'(t) = \frac{-e^{-3t}\text{sen}(e^{-t})}{-e^{-t}} = e^{-2t}\text{sen}(e^{-t})$$

$$u_1(t) = \int (e^{-2t}\text{sen}(e^{-t})) dt$$

La solución a dicha integral se realiza por partes

$$u_1(t) = e^{-t} \cos(e^{-t}) - \text{sen}(e^{-t})$$

Para  $u_2(t)$

$$u_2(t) = \int u_2'(t) dt$$

donde

$$u_2'(t) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Sustituyendo valores

$$W_2 = \begin{vmatrix} \text{cos}(e^{-t}) & 0 \\ -e^{-t}\text{sen}(e^{-t}) & e^{-3t} \end{vmatrix} = e^{-3t}\text{cos}(e^{-t})$$

$$u_2'(t) = \frac{e^{-3t} \cos(e^{-t})}{-e^{-t}} = -e^{-2t} \cos(e^{-t})$$

$$u_2(t) = \int -e^{-2t} \cos(e^{-t}) dt$$

Esta integral también se resuelve por partes

$$u_2(t) = -e^{-t} \operatorname{sen}(e^{-t}) - \cos(e^{-t})$$

Sustituyendo valores en  $y_p$  y simplificando

$$\begin{aligned} y_p &= \cos(e^{-t})(e^{-t} \cos(e^{-t}) - \operatorname{sen}(e^{-t})) + \operatorname{sen}(e^{-t})(e^{-t} \operatorname{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t})) \\ &= e^{-t}(\cos^2(e^{-t}) + \operatorname{sen}^2(e^{-t})) \end{aligned}$$

$$y_p = e^{-t}$$

La solución general se obtiene de la suma de la solución homogénea y la solución particular

$$y_G = y_h + y_p$$

Por último, la solución general de la ecuación diferencial queda como

$$y_G = C_1 \cos(e^{-t}) + C_2 \operatorname{sen}(e^{-t}) + e^{-t}$$

## Problema 19

Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$$

empleando el método de variación de parámetros.

## Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.

## Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Raíces repetidas.
- Variación de parámetros.

## Solución

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \rightarrow (D^2 - 4D + 4)y = 0$$

De donde su ecuación auxiliar es la siguiente

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \rightarrow (m - 2)^2 = 0$$

Los valores de  $m$  son

$$m_1 = m_2 = 2$$

El conjunto fundamental de soluciones de las raíces repetidas es

$$C.F.S. = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Para la solución particular se propone

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

La cual se resuelve por el método de variación de parámetros y que debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

Donde  $y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = xe^{2x}$  y  $f(x) = (x + 1)e^{2x}$

$$y_p = e^{2x} u_1(x) + xe^{2x} u_2(x)$$

El wronskiano del sistema anterior es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x}$$

$$W = e^{4x}$$

Obteniendo los valores de  $u_1(x)$  y de  $u_2(x)$  usando la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = 0 - xe^{2x}[(x+1)e^{2x}]$$

$$W_1 = -x(x+1)e^{4x}$$

$$u_1'(x) = \frac{-x(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = -x(x+1)$$

$$u_1(x) = \int (-x^2 - x) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{2x}[(x+1)e^{2x}] - 0$$

$$W_2 = (x+1)e^{4x}$$

$$u_2'(x) = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x+1$$

$$u_2(x) = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x$$

Sustituyendo valores en  $y_p$  y simplificando

$$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^2\right)e^{2x}$$

La solución particular de la ecuación diferencial queda como

$$y_p = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

Para la solución general se suman las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

entonces, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{x^3}{6} e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$$

## Problema 20

Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Identidades trigonométricas. Números complejos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Operador anulador o aniquilador.
- Variación de parámetros.

### Solución

Dividiendo la ecuación diferencial entre 4

$$y'' + 9y = \frac{1}{4} \csc(3x)$$

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y'' + 9y = 0 \quad \rightarrow \quad (D^2 + 9)y = 0$$

Por lo tanto, la ecuación auxiliar es

$$m^2 + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = -9$$

Los valores de  $m$  son el par conjugado

$$m_1 = 3i, \quad m_2 = -3i$$

El conjunto fundamental de soluciones es

$$C.F.S. = \{\cos(3x), \sin(3x)\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Para la solución particular se propone

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

Se debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

Donde  $y_1 = \cos(3x)$ ,  $y_2 = \sin(3x)$  y  $f(x) = \frac{1}{4} \csc(3x)$

$$y_p = \cos(3x)u_1(x) + \sin(3x)u_2(x)$$

Además, se obtiene el wronskiano del sistema

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \operatorname{sen}(3x) \\ -3\operatorname{sen}(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3(\cos^2(3x) + \operatorname{sen}^2(3x))$$

$$W = 3$$

Para los valores de las funciones  $u(x)$  se usa la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(3x) \\ \frac{1}{4}\operatorname{csc}(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\operatorname{csc}(3x)\operatorname{sen}(3x)$$

$$W_1 = -\frac{1}{4}$$

$$u_1'(x) = -\frac{1}{12}$$

$$u_1(x) = \int -\frac{1}{12} dx = -\frac{1}{12}x$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\operatorname{sen}(3x) & \frac{1}{4}\operatorname{csc}(3x) \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cos(3x)\operatorname{csc}(3x)$$

$$W_2 = \frac{1 \cos(3x)}{4 \operatorname{sen}(3x)}$$

$$u_2'(x) = \frac{-\frac{1 \cos(3x)}{4 \operatorname{sen}(3x)}}{3} = \frac{1 \cos(3x)}{12 \operatorname{sen}(3x)}$$

$$u_2(x) = \int \frac{1 \cos(3x)}{12 \operatorname{sen}(3x)} dx$$

Para resolver esta integral se realiza un cambio de variable

$$v = \operatorname{sen}(3x), \quad dv = 3\cos(3x)dx$$

$$u_2(x) = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{36} \ln(v)$$

$$u_2(x) = \frac{1}{36} \ln(\operatorname{sen}(3x))$$

La solución particular de la ecuación diferencial queda como

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln(\operatorname{sen}(3x))\operatorname{sen}(3x)$$

Para la solución general se suman las soluciones obtenidas

$$y_G = y_h + y_p$$

Por último, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x) + -\frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln(\operatorname{sen}(3x))\operatorname{sen}(3x)$$

## Problema 21

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - y = \frac{1}{x}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Regla de Cramer.
- Cálculo Diferencial: Derivación.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y'' - y = 0 \quad \rightarrow \quad (D^2 - 1)y = 0$$

Donde la ecuación auxiliar y su solución son

$$m^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = 1$$

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -1$$

Planteando el conjunto fundamental de soluciones

$$C.F.S. = \{e^x, e^{-x}\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Debido a que la ecuación diferencial tiene en su lado derecho a la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Entonces, no se puede usar un operador anulador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular. Por lo tanto, se usará el método de variación de parámetros para lo cual se propone

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

Esta solución debe de satisfacer el siguiente sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

Donde

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

La solución particular queda como

$$y_p = e^x u_1(x) + e^{-x} u_2(x)$$

Además, se obtiene el wronskiano del sistema

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0$$

$$W = -2$$

Encontrando el valor de la función  $u_1(x)$  usando la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{1}{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} e^{-x}$$

$$u_1'(x) = -\frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{x}$$

$$u_1(x) = \int -\frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Como la integral que definen a  $u_1(x)$  no se puede expresar en términos de funciones elementales, entonces solo se expresa como

$$u_1(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{x} dx = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Ahora, obteniendo el valor de  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} e^x$$

$$u_2'(x) = -\frac{1}{2} \frac{e^x}{x}$$

$$u_2(x) = -\int \frac{e^x}{x} dx$$

De la misma forma que con  $u_1(x)$ , la integral de la función  $u_2(x)$  se expresa simplemente como

$$u_2(x) = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^t}{t} dt$$

Por lo tanto, la solución particular queda como

$$y_p = \left( -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right) e^x + \left( -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^t}{t} dt \right) e^{-x}$$

Simplificando esta solución

$$y_p = -\frac{e^x}{2} \left( \int_{x_0}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right) - \frac{e^{-x}}{2} \left( \int_{x_0}^x \frac{e^t}{t} dt \right)$$

La solución general está formada por la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{e^x}{2} \left( \int_{x_0}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right) - \frac{e^{-x}}{2} \left( \int_{x_0}^x \frac{e^t}{t} dt \right)$$

## Problema 22

Usando el método de variación de parámetros, demuestre que la función

$$y = -\frac{1}{2} x \cos(x)$$

es solución particular de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = \text{sen}(x)$$

Además, encuentre su solución general.

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Identidades trigonométricas. Números complejos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por cambio de variable. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

Se obtiene la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + y = 0$$

Ahora, escribiendo esta ecuación en términos de operadores diferenciales

$$(D^2 + 1)y = 0$$

de donde la ecuación auxiliar y sus soluciones son

$$m^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m_{1,2} = \pm i$$

El conjunto fundamental de soluciones formado por el par conjugado de raíces complejas es el siguiente

$$C.F.S. = \{\cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$$

Como el problema pide usar el método de variación de parámetros, entonces se propone la siguiente solución particular

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

que debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

donde  $y_1 = \cos(x)$ ,  $y_2 = \operatorname{sen}(x)$  y  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$y_p = \cos(x) u_1(x) + \operatorname{sen}(x) u_2(x)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$$

$$W = 1$$

Para el valor de la función  $u_1(x)$  se usa la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -\text{sen}^2(x)$$

$$u_1'(x) = -\text{sen}^2(x)$$

$$u_1(x) = \int -\text{sen}^2(x) dx = \int \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}(2x)$$

Haciendo lo mismo para  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\text{sen}(x) & \text{sen}(x) \end{vmatrix} = \cos(x)\text{sen}(x)$$

$$u_2'(x) = \cos(x)\text{sen}(x)$$

$$u_2(x) = \int \cos(x)\text{sen}(x) dx = \frac{1}{2}\text{sen}^2(x)$$

Sustituyendo los valores correspondientes de las funciones  $u(x)$  en la solución particular

$$y_p = \left( -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) \right) \cos(x) + \left( \frac{1}{2}\text{sen}^2(x) \right) \text{sen}(x)$$

Empleando la siguiente identidad trigonométrica para simplificar la solución particular

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\cos(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$y_p = -\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{2}{4}\cos(x)\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$y_p = -\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)(\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x))$$

$$y_p = -\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$$

La solución general está formada por la solución homogénea y la solución particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$$

Podemos simplificar aún más la expresión, si agrupamos los términos seno usando la propiedad de la constante de integración

$$C_2 = C_2 + \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial queda como

$$y_G = C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}x\cos(x)$$

De esta forma simplificada se tiene que

$$y_p = -\frac{1}{2}x\cos(x)$$

Por lo tanto, la función

$$y = -\frac{1}{2}x\cos(x)$$

sí es solución particular de la ecuación diferencial

## Problema 23

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$$

sabiendo que

$$\{x, x^3\}$$

forma un conjunto fundamental de soluciones.

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por partes. Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

La solución homogénea se obtiene a partir del conjunto fundamental de soluciones y es

$$y_h = C_1x + C_2x^3$$

Dividiendo la ecuación diferencial entre  $x^2$ , para llevarla a la forma estándar

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

La ecuación diferencial es lineal y de coeficientes variables por lo que no se puede usar un aniquilador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular, se usará variación de parámetros por lo que se propone

$$y_p = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$$

Se debe de satisfacer el sistema

$$y_1u_1'(x) + y_2u_2'(x) = 0$$

$$y_1'u_1(x) + y_2'u_2(x) = f(x)$$

donde  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x^3$  y  $f(x) = 2x^2e^x$

$$y_p = xu_1(x) + x^3u_2(x)$$

Primero, se obtiene el wronskiano del sistema

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^3 - x^3$$

$$W = 2x^3$$

Para los valores de  $u_1(x)$  y de  $u_2(x)$  se usa la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x$$

$$u_1'(x) = \frac{-2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x$$

$$u_1(x) = \int (-x^2e^x) dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

$$u_1(x) = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

$$u_2'(x) = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x$$

$$u_2(x) = \int e^x dx = e^x$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la solución particular y simplificando

$$y_p = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^xx^3 = 2x^2e^x - 2xe^x$$

$$y_p = 2xe^x(x - 1)$$

La solución general está dada por la suma de soluciones

$$y_G = y_h + y_p$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = C_1x + C_2x^3 + 2xe^x(x - 1)$$

## Problema 24

Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = \cot(2x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Identidades trigonométricas. Números complejos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

Primero se obtiene la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + 4y = 0$$

Escribiendo esta ecuación en términos de operadores diferenciales

$$(D^2 + 4)y = 0$$

Por lo que la ecuación auxiliar y sus raíces son

$$m^2 + 4 = 0$$

$$m_1 = 2i, \quad m_2 = -2i$$

Se plantea el conjunto fundamental de soluciones

$$C.F.S. = \{\cos(2x), \sin(2x)\}$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

Debido a que no se puede usar un aniquilador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular con la función

$$f(x) = \cot(2x)$$

entonces, se usa el método de variación de parámetros y se propone como solución a

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

que debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

donde  $y_1 = \cos(2x)$ ,  $y_2 = \sin(2x)$  y  $f(x) = \cot(2x)$ . Sustituyendo estos valores en  $y_p$

$$y_p = \cos(2x)u_1(x) + \sin(2x)u_2(x)$$

Además, se obtiene el wronskiano del sistema

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sen(2x) \\ -2\sen(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2(\cos^2(2x) + \sen^2(2x))$$

$$W = 2$$

Encontrando los términos  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  con la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sen(2x) \\ \cot(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -\sen(2x) \left( \frac{\cos(2x)}{\sen(2x)} \right)$$

$$W_1 = -\cos(2x)$$

$$u_1'(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$u_1(x) = \int -\frac{1}{2} \cos(2x) dx = -\frac{1}{4} \sen(2x)$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sen(2x) & \cot(2x) \end{vmatrix} = \cos(2x) \left( \frac{\cos(2x)}{\sen(2x)} \right)$$

$$W_2 = \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)}$$

$$u_2'(x) = \frac{1 \cos^2(2x)}{2 \sin(2x)}$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\sin(2x)} - \frac{\sin^2(2x)}{\sin(2x)} \right) dx$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \int (\csc(2x) + \sin(2x)) dx = -\frac{1}{4} \ln(\csc(2x) + \cot(2x)) + \frac{1}{4} \cos(2x)$$

$$y_p = -\frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x) + \left( -\frac{1}{4} \ln(\csc(2x) + \cot(2x)) + \frac{1}{4} \cos(2x) \right) \sin(2x)$$

$$y_p = -\frac{1}{4} (\ln(\csc(2x) + \cot(2x))) \sin(2x)$$

Para la solución general se deben de sumar las soluciones anteriores

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{1}{4} (\ln(\csc(2x) + \cot(2x))) \sin(2x)$$

## Problema 25

Sea

$$A = \left\{ \frac{\sin(x)}{x}, \frac{\cos(x)}{x}, \frac{2\sin(x) + 6\cos(x)}{x} \right\}$$

un conjunto de soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$$

encuentre la solución de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Identidades trigonométricas. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

Un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

es

$$C.F.S. = \left\{ \frac{\text{sen}(x)}{x}, \frac{\text{cos}(x)}{x} \right\}$$

El cual es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 \frac{\text{sen}(x)}{x} + C_2 \frac{\text{cos}(x)}{x}$$

Utilizando variación de parámetros para encontrar una solución particular, se propone

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

que satisface el sistema de ecuaciones

$$y_1 u_1'(x) + y_2 u_2'(x) = 0$$

$$y_1 u_1'(x) + y_2 u_2'(x) = x$$

donde

$$y_1 = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos(x)}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Reescribiendo la solución particular propuesta

$$y_p = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} u_1(x) + \frac{\cos(x)}{x} u_2(x)$$

Utilizando un wronskiano

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \frac{\cos(x)}{x} \\ x \cos(x) - \operatorname{sen}(x) & -x \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \end{vmatrix} \frac{1}{x^2}$$

$$W = \frac{-x \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) \cos(x) - x \cos^2(x) + \cos(x) \operatorname{sen}(x)}{x^3}$$

$$= \frac{-x(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x))}{x^3}$$

$$W = -\frac{1}{x^2}$$

Obteniendo el valor de la función  $u_1(x)$  con la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos(x) \\ 1 & -x\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \end{vmatrix} = -\frac{\cos(x)}{x^2}$$

$$u_1'(x) = \frac{-\frac{\cos(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \cos(x)$$

$$u_1(x) = \int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x)$$

Análogamente, se usa la regla de Cramer para encontrar el valor de  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & 0 \\ x \cos(x) - \operatorname{sen}(x) & 1 \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

$$u_2'(x) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\operatorname{sen}(x)$$

$$u_2(x) = \int -\operatorname{sen}(x) dx = \cos(x)$$

Sustituyendo en la solución particular y simplificando

$$y_p = \operatorname{sen}(x) \left( \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) + \cos(x) \left( \frac{\cos(x)}{x} \right) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} + \frac{\cos^2(x)}{x}$$

$$y_p = \frac{1}{x}$$

La solución general está dada por la suma de la solución homogénea y la solución particular

$$y_G = y_h + y_p$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial queda como

$$y_G = C_1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + C_2 \frac{\cos(x)}{x} + \frac{1}{x}$$

## Problema 26

Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sec(x)$$

por el método de variación de parámetros.

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Identidades trigonométricas. Números complejos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.

- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

Puesto que se trata de una ecuación diferencial lineal se puede escribir su solución general de la siguiente forma

$$y_G = y_h + y_p$$

El primer paso es obtener la homogénea asociada por el método de la ecuación diferencial homogénea asociada que es

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad \rightarrow \quad (D^2 - 2D + 2)y = 0$$

La ecuación auxiliar se representa como

$$m^2 - 2m + 2 = 0$$

Al resolver el polinomio se tiene que las raíces son

$$m_1 = 1 + i, \quad m_2 = 1 - i$$

Planteando el conjunto fundamental de soluciones

$$C.F.S. = \{e^x \cos(x), e^x \operatorname{sen}(x)\}$$

se hace combinación lineal con el *C.F.S.* para hallar la solución homogénea de la ecuación diferencial

$$y_h = C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \operatorname{sen}(x)$$

Por el término  $f(x) = e^x \sec(x)$  en la ecuación diferencial no es posible aplicar un operador anulador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular. Por lo tanto, se usará el método de variación de parámetros por lo que se propone

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

Para encontrar los valores de las funciones  $u(x)$  se plantea el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

donde  $y_1 = e^x \cos(x)$ ,  $y_2 = e^x \sin(x)$  y  $f(x) = e^x \sec(x)$ .

$$y_p = e^x \cos(x) u_1(x) + e^x \sin(x) u_2(x)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema y encontrando los valores de  $u(x)$

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x \cos(x) & e^x \sin(x) \\ e^x \cos(x) - e^x \sin(x) & e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$W = e^x (\cos^2(x) + \sin(x) \cos(x) - \sin(x) \cos(x) + \sin^2(x))$$

$$= e^x (\cos^2(x) + \sin^2(x))$$

$$W = e^{2x}$$

Usando la regla de Cramer para obtener el valor de la función  $u_1(x)$

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \sin(x) \\ e^x \sec(x) & e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \end{vmatrix} = -e^{2x} \tan(x)$$

$$u_1'(x) = \frac{-e^{2x} \tan(x)}{e^{2x}} = -\tan(x)$$

$$u_1(x) = -\int \tan(x) dx = \ln(\cos(x))$$

Nuevamente, se usa la regla de Cramer para obtener  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x \cos(x) & 0 \\ e^x \cos(x) - e^x \sin(x) & e^x \sec(x) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$u_2'(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$$

$$u_2(x) = \int dx = x$$

Se sustituyen las funciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  en la forma de la solución particular planteada

$$y_p = \ln(\cos(x))e^x \cos(x) + xe^x \sin(x)$$

La solución general se obtiene sumando las soluciones particular y homogénea

$$y_G = y_h + y_p$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y_G = C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x) + \ln(\cos(x))e^x \cos(x) + xe^x \sin(x)}$$

## Problema 27

Sean las funciones

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x \ln(x) \quad \text{y} \quad y_3(x) = x(1 - \ln(x))$$

soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + y = 4x \ln(x)$$

Obtenga el conjunto fundamental de soluciones y la solución general.

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal. Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Variación de parámetros.

### Solución

Primero, se estandariza la ecuación diferencial dividiéndola entre  $x^2$

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{4}{x} \ln(x)$$

El conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea debe estar conformado por dos funciones ya que es de orden 2, por ello se deben tomar dos de las tres funciones planteadas. Se observa que la tercera función

$$y_3(x) = x(1 - \ln(x))$$

se puede escribir como combinación lineal de  $y_1(x) = x$  y de  $y_2(x) = x \ln(x)$ . Por lo tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$C.F.S. = \{x, x \ln(x)\}$$

Al hacer combinación lineal con el *C.F.S.* se llega a la solución homogénea de la ecuación diferencial

$$y_h = C_1 x + C_2 x \ln(x)$$

A continuación se obtiene la solución particular de la ecuación diferencial por el método de variación de parámetros, se propone la siguiente forma de esta solución

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

Para encontrar los valores de las funciones  $u(x)$  se plantea el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

donde

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \ln(x) \quad \text{y} \quad \frac{4}{x} \ln(x)$$

$$y_p = x u_1(x) + x \ln(x) u_2(x)$$

Obtenemos el wronskiano del sistema y encontramos los valores de  $u(x)$

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x \ln(x) \\ 1 & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = x$$

Usando regla de Cramer para obtener  $u_1(x)$

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \ln(x) \\ \frac{4}{x} \ln(x) & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = -4 \ln^2(x)$$

$$u_1'(x) = \frac{-4 \ln^2(x)}{x}$$

$$u_1(x) = -4 \int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = -\frac{4}{3} \ln^3(x)$$

Del mismo modo, obteniendo el valor de la función  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{4}{x} \ln(x) \end{vmatrix} = 4 \ln(x)$$

$$u_2'(x) = \frac{4 \ln(x)}{x}$$

$$u_2(x) = 4 \int \frac{\ln(x)}{x} dx = 2 \ln^2(x)$$

Sustituyendo las funciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  en la forma de la solución particular planteada y simplificando

$$y_p = -\frac{4}{3} \ln^3(x) x + 2 \ln^2(x) (x \ln(x)) = \frac{2}{3} x \ln^3(x)$$

Para la solución general se suman las dos soluciones anteriores

$$y_G = y_h + y_p$$

La solución general de ecuación diferencial es

$$y_G = C_1 x + C_2 x \ln(x) + \frac{2}{3} x \ln^3(x)$$

## Problema 28

Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln(x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Conjuntos. Trigonometría. Números complejos. Regla de Cramer.
- Cálculo Diferencial: Derivación. Regla de la cadena.
- Álgebra Lineal: Combinación lineal. Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por partes. Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Ecuación diferencial lineal homogénea asociada.
- Ecuación auxiliar asociada.
- Conjunto fundamental de soluciones.
- Raíces repetidas.
- Variación de parámetros.

### Solución

Como la ecuación diferencial es lineal, de coeficientes variables y el problema no proporciona un conjunto fundamental de soluciones; entonces se hace el siguiente cambio de variable para obtener una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$x = e^t$$

$$t = \ln(x)$$

Por la regla de la cadena, se obtiene su primera derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

Como la ecuación diferencial es de orden 2, entonces también se obtiene su segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación diferencial original

$$x^2 \left[ \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \right] - x \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt}\right) + y = t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = t$$

$$y'' - 2y' + y = t$$

De esta forma ya es posible obtener la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Expresando esta solución en términos de su operador diferencial

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

Por lo que la ecuación auxiliar y su solución son

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (m - 1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

Se plantea el conjunto fundamental de soluciones formado con las raíces repetidas

$$C.F.S. = \{e^t, te^t\}$$

Haciendo combinación lineal con el  $C.F.S.$  y así obtener la solución homogénea

$$y_h = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

Empleando el método de variación de parámetros para hallar la solución particular, por lo cual se propone

$$y_p = y_1 u_1(t) + y_2 u_2(t)$$

que debe satisfacer el siguiente sistema

$$y_1 u_1(t) + y_2 u_2(t) = 0$$

$$y_1' u_1(t) + y_2' u_2(t) = f(t)$$

Donde  $y_1 = e^t$ ,  $y_2 = te^t$  y  $f(t) = t$

$$y_p = e^t u_1(t) + te^t u_2(t)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t}$$

$$W = e^{2t}$$

Para encontrar el valor de la función  $u_1(t)$  se usa la regla de Cramer

$$u_1(t) = \int u_1'(t) dt$$

$$u_1'(t) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & te^t \\ t & e^t + te^t \end{vmatrix} = -t^2 e^t$$

$$u_1'(t) = \frac{-t^2 e^t}{e^{2t}} = -t^2 e^{-t}$$

$$u_1(t) = \int (-t^2 e^{-t}) dt$$

Aplicando integración por partes dos veces

$$u_1(t) = t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t}$$

Ahora, obteniendo el valor de la función  $u_2(t)$

$$u_2(t) = \int u_2'(t) dt$$

$$u_2'(t) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(t) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & t \end{vmatrix} = te^t$$

$$u_2'(t) = \frac{te^t}{e^{2t}} = te^{-t}$$

$$u_2(t) = \int (te^{-t}) dt = -te^{-t} - e^{-t}$$

Sustituyendo los valores  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  en la solución particular propuesta

$$y_p = (t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t})e^t + (-te^{-t} - e^{-t})te^t$$

Al simplificar, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y_p = t + 2$$

La solución general en términos de  $t$  está dada por la siguiente suma

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1e^t + C_2te^t + t + 2$$

Regresando a la variable  $x$  original

$$y_G = C_1x + C_2 \ln(x)x + \ln(x) + 2$$

## Problema 29

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$xy'' - 4y' = x^4$$

Compruebe el resultado.

## Antecedentes

- Álgebra: Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.

## Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Variación de parámetros.
- Ecuación de Cauchy-Euler.

## Solución

La ecuación diferencial es lineal con coeficientes variables, lo primero es encontrar la solución homogénea. Llevando la ecuación diferencial a una ecuación de Cauchy-Euler al multiplicarla por  $x$

$$x^2y'' - 4xy' = x^5$$

Se propone a

$$y = x^m$$

como solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$x^2y'' - 4xy' = 0$$

Derivando dos veces la solución propuesta

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial homogénea asociada y encontrando de valores de  $m$

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] - 4x(mx^{m-1}) = 0 \quad \rightarrow \quad m(m-1)x^m - 4mx^m = 0$$

$$m(m-1) - 4m = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - m - 4m = 0$$

$$m^2 - 5m = 0 \quad \rightarrow \quad m(m-5) = 0$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 5$$

Para la solución homogénea se sustituyen estos valores en la expresión

$$y_h = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$$

Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1 + C_2x^5$$

Para la solución particular, se divide a la ecuación diferencial original entre  $x$  para llevarla a la forma estándar

$$y'' - \frac{4}{x}y' = x^3$$

Como no se puede usar un operador diferencial o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular de la ecuación, entonces se usa el método de variación de parámetros, por lo que se propone

$$y_p = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$$

Se debe de satisfacer el sistema

$$y_1u_1(x) + y_2u_2(x) = 0$$

$$y_1'u_1(x) + y_2'u_2(x) = f(x)$$

donde  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = x^5$  y  $f(x) = x^3$

$$y_p = u_1(x) + x^5 u_2(x)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema y encontrando los valores de  $u(x)$

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x^5 \\ 0 & 5x^4 \end{vmatrix} = 5x^4$$

Obteniendo el valor de la función  $u_1(x)$  con la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^5 \\ x^3 & 5x^4 \end{vmatrix} = x^8$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$u_1'(x) = \frac{-x^8}{5x^4} = -\frac{1}{5}x^4$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{5} \int x^4 dx = -\frac{x^5}{25}$$

Ahora, usando la regla de Cramer para obtener el valor de la función  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{vmatrix} = x^3$$

$$u_2'(x) = \frac{x^3}{5x^4} = \frac{1}{5}x^{-1}$$

$$u_2(x) = \frac{1}{5} \int (x^{-1}) dx = \frac{1}{5} \ln(x)$$

Sustituyendo los valores de  $u(x)$  en la solución particular propuesta

$$y_p = -\frac{1}{25}x^5(1) + \frac{1}{5}\ln(x)(x^5) = -\frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{5}x^5\ln(x)$$

La solución general está formada por la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 + C_2x^5 + \frac{1}{5}x^5\ln(x)$$

Comprobación

$$y' = 5C_2x^4 + x^4\ln(x) + \left(\frac{1}{5}x^5\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 5C_2x^4 + x^4\ln(x) + \frac{1}{5}x^4$$

$$y'' = 20C_2x^3 + 4x^3\ln(x) + (x^4)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{5}x^3 = 20C_2x^3 + 4x^3\ln(x) + \frac{9}{5}x^3$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original

$$x \left( 20C_2x^3 + 4x^3\ln(x) + \frac{9}{5}x^3 \right) - 4 \left( 5C_2x^4 + x^4\ln(x) + \frac{1}{5}x^4 \right) = x^4$$

$$20C_2x^4 + 4x^4\ln(x) + \frac{9}{5}x^4 - 20C_2x^4 - 4x^4\ln(x) - \frac{4}{5}x^4 = x^4$$

$$x^4 = x^4$$

Por lo tanto, se comprueba el resultado.

## Problema 30

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$$

Realice la comprobación del resultado obtenido.

### Antecedentes

- Álgebra: Fórmula general para ecuaciones de segundo grado. Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Variación de parámetros.
- Ecuación de Cauchy-Euler.

### Solución

La ecuación diferencial es del tipo Cauchy-Euler

$$2x^2y'' + 5xy' + y = 0$$

por lo que se propone una solución del tipo

$$y = x^m$$

Obteniendo la primera y segunda derivada de esta solución

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo  $y = x^m$  y sus derivadas en la ecuación de Cauchy-Euler

$$2x^2[m(m-1)x^{m-2}] + 5x[mx^{m-1}] + x^m = 0$$

$$\rightarrow 2m(m-1)x^m + 5mx^m + x^m = 0$$

$$2m(m-1) + 5m + 1 = 0 \rightarrow 2m^2 - 2m + 5m + 1 = 0$$

$$2m^2 + 3m + 1 = 0$$

Empleando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado para encontrar los valores de  $m$

$$m_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$m_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{-3-1}{4} = -1$$

La solución homogénea es de la forma

$$y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial

$$y_h = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{-1}$$

Dividiendo la ecuación diferencial original entre  $2x^2$  para llevarla a la forma estándar

$$y'' + \frac{5xy'}{2x^2} + \frac{y}{2x^2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{x}{2x^2} \rightarrow y'' + \frac{5}{2}x^{-1}y' + \frac{1}{2}x^{-2}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-1}$$

Debido a que no se puede usar un aniquilador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular, se usa el método de variación de parámetros y propone a la solución particular

$$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$$

Que debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

Donde

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}}, \quad y_2 = x^{-1} \quad y \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^{-1}$$

$$y_p = x^{-\frac{1}{2}} u_1(x) + x^{-1} u_2(x)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema y encontrando los valores de  $u(x)$

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & x^{-1} \\ -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} & -x^{-2} \end{vmatrix} = \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^{-2}) + \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right)(x^{-1})$$

$$W = -x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{5}{2}}$$

Obteniendo los valores de  $u_1(x)$  y de  $u_2(x)$  usando la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^{-1} & -x^{-2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^{-1}\right) x^{-1}$$

$$W_1 = -\frac{1}{2} x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-2}$$

$$u_1'(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}x^{-2}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}}$$

$$u_1'(x) = \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{5}{2}}} + \frac{x^{-2}}{-x^{-\frac{5}{2}}} = x^{-1+\frac{5}{2}} - x^{-2+\frac{5}{2}}$$

$$u_1(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$u_1(x) = \int \left( \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-1} \end{vmatrix} = x^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-1} \right)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$u_2'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} - x^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}$$

$$u_2'(x) = -x^2 + x$$

$$u_2(x) = \int (-x^2 + x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo los valores de las funciones  $u(x)$  en la solución particular

$$y_p = \left( \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) x^{-\frac{1}{2}} + \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) x^{-1}$$

Simplificando

$$y_p = \frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)x$$

$$y_p = \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$$

La solución general está formada por la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$$

Para la comprobación se sustituye la solución general y sus respectivas derivadas en la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{1}{2}C_1x^{-\frac{3}{2}} - C_2x^{-2} + \frac{2}{15}x - \frac{1}{6}$$

$$y'' = \frac{3}{4}C_1x^{-\frac{5}{2}} + C_2x^{-3} + \frac{2}{15}$$

$$2x^2 \left( \frac{3}{4}C_1x^{-\frac{5}{2}} + C_2x^{-3} + \frac{2}{15} \right) + 5x \left( -\frac{1}{2}C_1x^{-\frac{3}{2}} - C_2x^{-2} + \frac{2}{15}x - \frac{1}{6} \right) + C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x = x^2 - x$$

$$\frac{3}{2}C_1x^{-\frac{1}{2}} + 4C_2x^{-1} + \frac{4}{15}x^2 - \frac{5}{2}C_1x^{-\frac{1}{2}} - 5C_2x^{-1} + \frac{10}{15}x^2 - \frac{5}{6}x + C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x = x^2 - x$$

$$x^2 - x = x^2 - x$$

## Problema 31

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy' + y = 2x$$

### Antecedentes

- Álgebra: Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Raíces repetidas.
- Variación de parámetros.

### Solución

Primero se lleva a la ecuación diferencial lineal de coeficientes variables a una ecuación de Cauchy-Euler de la forma

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Para encontrar la solución homogénea se propone una solución del tipo

$$y = x^m$$

Obteniendo la primera y la segunda derivada

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] - x[mx^{m-1}] + x^m = 0 \quad \rightarrow \quad m(m-1)x^m - mx^m + x^m = 0$$

$$m^2 - m - m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)^2 = 0$$

La solución de la ecuación anterior está dada por los valores  $m_1 = m_2 = 1$ . Es decir,  $m = 1$  de multiplicidad 2 por lo que la forma de la solución homogénea de la ecuación de Cauchy-Euler es

$$y_h = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} \ln(x)$$

Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1x + C_2x \ln(x)$$

Dividiendo la ecuación diferencial entre  $x^2$  para llevarla a la forma estándar

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad y'' - x^{-1}y' + x^{-2}y = 2x^{-1}$$

Debido a que no se puede usar un aniquilador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular se usará el método de variación de parámetros por lo que se propone

$$y_p = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$$

Que satisface el siguiente sistema

$$y_1u_1(x) + y_2u_2(x) = 0$$

$$y_1'u_1(x) + y_2'u_2(x) = f(x)$$

Donde  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x \ln(x)$  y  $f(x) = 2x^{-1}$

$$y_p = xu_1(x) + x \ln(x) u_2(x)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema y encontrando los valores de  $u(x)$

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x \ln(x) \\ 1 & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = x \ln(x) + x - x \ln(x)$$

$$W = x$$

Obteniendo el valor de la función  $u_1(x)$  con la regla de Cramer

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \ln(x) \\ 2x^{-1} & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = -(2x^{-1})(x \ln(x))$$

$$W_1 = -2 \ln(x)$$

$$u_1'(x) = \frac{-2 \ln(x)}{x}$$

$$u_1(x) = -2 \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Resolviendo la integral empleando un cambio de variable

$$z = \ln(x) \quad dz = \frac{dx}{x}$$

$$u_1(x) = -2 \int z dz = -2 \left( \frac{1}{2} z^2 \right)$$

$$u_1(x) = -(\ln(x))^2$$

Ahora, usando regla de Cramer para encontrar  $u_2(x)$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^{-1} \end{vmatrix} = (x)(2x^{-1})$$

$$W_2 = 2$$

$$u_2'(x) = \frac{2}{x}$$

$$u_2(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln(x)$$

Sustituyendo los valores obtenidos de las funciones  $u(x)$  en la solución particular y simplificando

$$y_p = [-(\ln(x))^2]x + (2 \ln(x))x \ln(x) = -x(\ln(x))^2 + 2x(\ln(x))^2$$

$$y_p = x(\ln(x))^2$$

La solución general está formada por la suma de la solución homogénea y la solución particular

$$y_G = y_h + y_p$$

Por último, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1x + C_2x \ln(x) + x(\ln(x))^2$$

## Problema 32

Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$$

Compruebe que la solución obtenida es solución de la ecuación diferencial.

### Antecedentes

- Álgebra: Regla de Cramer.
- Álgebra Lineal: Dependencia lineal. Wronskiano.
- Cálculo Integral: Integración por partes.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.
- Solución general de una ecuación diferencial.
- Solución homogénea y solución particular de una ecuación diferencial lineal.
- Variación de parámetros.

### Solución

Como se tiene una ecuación diferencial lineal de coeficientes variables, entonces su ecuación de Cauchy-Euler es

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Por lo que propone una solución del tipo

$$y = x^m$$

Obteniendo la primera y segunda derivada de esta solución

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] - 2x[mx^{m-1}] + 2x^m = 0$$

$$\rightarrow m(m-1)x^m - 2mx^m + 2x^m = 0$$

$$m(m-1) - 2m + 2 = 0 \rightarrow m^2 - m - 2m + 2 = 0$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow (m-2)(m-1) = 0$$

Los valores de  $m$  que dan solución a la ecuación anterior son

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1$$

La solución homogénea de la ecuación de Cauchy-Euler con valores de  $m$  distintos es de la siguiente forma

$$y_h = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$$

Por lo tanto, la solución homogénea de la ecuación diferencial es

$$y_h = C_1x^2 + C_2x$$

Llevemos a la ecuación diferencial a su forma estándar dividiéndola entre  $x^2$

$$y'' - \frac{2xy'}{x} + \frac{2y}{x^2} = x^2e^x$$

Como no es posible usar un operador anulador o el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular, entonces se usa el método de variación de parámetros por lo que se propone la solución

$$y_p = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$$

Se debe de satisfacer el sistema

$$y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x) = 0$$

$$y_1' u_1(x) + y_2' u_2(x) = f(x)$$

Donde  $y_1 = x^2$ ,  $y_2 = x$  y  $f(x) = x^2 e^x$

$$y_p = x^2 u_1(x) + x u_2(x)$$

Obteniendo el wronskiano del sistema

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x^2$$

$$W = -x^2$$

Empleando la regla de Cramer para encontrar el valor de la función

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx$$

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x^2 e^x & 1 \end{vmatrix} = -x^3 e^x$$

$$u_1'(x) = \frac{-x^3 e^x}{-x^2} = x e^x$$

$$u_1(x) = \int x e^x dx = x e^x - e^x$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x) dx$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x^2 e^x \end{vmatrix} = x^4 e^x$$

$$u_2'(x) = \frac{x^4 e^x}{-x^2} = -x^2 e^x$$

Sustituyendo las funciones  $u(x)$  en la solución particular planteada y simplificando

$$\begin{aligned} y_p &= (xe^x - e^x)x^2 + (-x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x)x \\ &= x^3 e^x - x^2 e^x - x^3 e^x + 2x^2 e^x - 2xe^x \\ y_p &= x^2 e^x - 2xe^x \end{aligned}$$

La solución general está formada por la suma de las soluciones homogénea y particular

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\boxed{y_G = C_1 x^2 + C_2 x + x^2 e^x - 2xe^x}$$

Para la comprobación se sustituye la solución general y sus derivadas correspondientes en la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4 e^x$$

$$y' = 2C_1 x + C_2 + 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x - 2xe^x$$

$$y' = 2C_1 x + C_2 + x^2 e^x - 2e^x$$

$$y'' = 2C_1 + 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x$$

$$x^2(2C_1 + 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x) - 2x(2C_1 x + C_2 + x^2 e^x - 2e^x)$$

$$+ 2(C_1 x^2 + C_2 x + x^2 e^x - 2xe^x) = x^4 e^x$$

$$2C_1 x^2 + 2x^3 e^x + x^4 e^x - 2x^2 e^x - 4C_1 x^2 - 2C_2 x - 2x^3 e^x + 4xe^x + 2C_1 x^2 + 2C_2 x$$

$$+ 2x^2 e^x - 4xe^x = x^4 e^x$$

$$x^4 e^x = x^4 e^x$$

# TEMA 3

## Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

## Problema 1

A partir de la definición de transformada de Laplace obtenga  $Y(s)$  de

$$y(t) = 1$$

Con  $t \geq 0$ .

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Integral impropia. Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Definición de transformada de Laplace.

### Solución

De la definición de transformada de Laplace

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt; \quad s > 0$$

Del problema  $y(t) = 1$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt$$

Como la integral definida se indetermina en el intervalo superior, se usa un límite

$$Y(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt$$

Resolviendo la integral impropia

$$Y(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right)$$

$$Y(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{se^{sb}} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s}}$$

## Problema 2

A partir de la definición de transformada de Laplace obtenga  $Y(s)$  de la función

$$y(t) = 1e^{at}$$

Con  $t \geq 0$ .

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Integral impropia. Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Definición de transformada de Laplace.

### Solución

De la definición de transformada de Laplace

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt; \quad s > 0$$

Sustituyendo la función dada en el problema

$$Y(s) = \int_0^{\infty} (1e^{at})e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1e^{-t(s-a)} dt$$

De donde la integral impropia a resolver es

$$Y(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-t(s-a)}}{s-a} \right) \Big|_0^b$$

Desarrollando lo anterior

$$Y(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-b(s-a)}}{s-a} + \frac{e^{0(s-a)}}{s-a} \right) = -\frac{e^{-\infty(s-a)}}{s-a} + \frac{e^0}{s-a}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s-a} = 0 + \frac{1}{s-a}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-a}$$

### Problema 3

Determine si existe la transformada de Laplace de la siguiente función

$$f(t) = \frac{t+2}{t-2}$$

#### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Límites laterales. Continuidad.

#### Concepto básico para destacar

- Definición de transformada de Laplace.

#### Solución

Para que exista  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  es condición suficiente que  $f(t)$  sea continua por tramos (secuencialmente continua) y de orden exponencial. Por lo tanto, usando límites laterales se analiza la continuidad de  $f(t)$  cuando  $t = 2$

$$L^- = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+4}{h} = \infty$$

$$L^+ = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-4}{-h} = -\infty$$

Como los límites no están definidos entonces no es secuencialmente continua y por lo tanto no existe  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

## Problema 4

Determine si la siguiente función

$$f(t) = e^{at}\text{sen}(bt)$$

es de orden exponencial.

### Antecedentes

- Álgebra: Valor absoluto.
- Cálculo Diferencial: Funciones exponenciales. Funciones trigonométricas.

### Concepto básico para destacar

- Orden exponencial.

### Solución

Si  $f(t)$  es de orden exponencial, entonces existen  $\mu$  y  $\alpha$  tales que

$$|f(t)| \leq \mu e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Es decir, la función  $f(t)$  no debe de crecer más rápido que la función exponencial  $\mu e^{\alpha t}$ . Sustituyendo el valor de  $f(t) = e^{at}\text{sen}(bt)$  en la expresión anterior y usando propiedades del valor absoluto

$$|e^{at}\text{sen}(bt)| \leq \mu e^{\alpha t} \quad \rightarrow \quad |e^{at}||\text{sen}(bt)| \leq \mu e^{\alpha t}$$

Como  $|\text{sen}(bt)|$  cumple con ser menor o igual a 1

$$e^{at}|\text{sen}(bt)| \leq \mu e^{\alpha t}$$

Si  $\mu = 1$  y  $\alpha = a$

$$|e^{at}\text{sen}(bt)| \leq e^{at}$$

Por lo tanto, la función  $f(t) = e^{at}\text{sen}(bt)$  sí es de orden exponencial.

## Problema 5

A partir de la definición de la transformada de Laplace obtenga

$$\mathcal{L}\{g(t) = tf(t)\}$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Antiderivada.

### Concepto básico para destacar

- Definición de la transformada de Laplace.

### Solución

De la definición de transformada de Laplace de la función  $f(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Cuya derivada con respecto a  $s$  es

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt$$

Multiplicando por  $(-1)$

$$-F'(s) = \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt$$

Se identifica a la función  $g(t) = tf(t)$

$$\boxed{\int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = -F'(s)}$$

Esta expresión indica el procedimiento a seguir para obtener la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  multiplicada por la función  $t$ .

## Problema 6

Obtenga la siguiente transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones.

### Concepto básico para destacar

- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

### Solución

La transformada de Laplace de la función coseno está dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2 + 9}$$

## Problema 7

Obtenga la transformada de Laplace de la siguiente función

$$\mathcal{L}\{te^{-t}\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

**Solución**

La transformada de Laplace del problema presenta una traslación en el dominio de  $s$ , es decir

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s)|_{s=s-a} = F(s-a)$$

donde

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Aplicando la traslación

$$F(s) = \mathcal{L}\{te^{-t}\} = \left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{s=s+1}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

**Problema 8**

Aplice el primer teorema de traslación para obtener la transformada de Laplace de la siguiente función

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

**Antecedentes**

- Álgebra: Leyes de los exponentes.

**Conceptos básicos para destacar**

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

**Solución**

Por leyes de los exponentes, la función del problema puede verse como la multiplicación de dos términos  $e^t$ . Del primer teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s)|_{s=s-a} = F(s-a)$$

Para este caso  $f(t) = e^t$ . Obteniendo la transformada de Laplace de esta función

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

Aplicando el primer teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{e^t e^t\} = \left(\frac{1}{s-1}\right)\Big|_{s=s-1} = \frac{1}{(s-1)-1}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}}$$

## Problema 9

Haciendo uso de la primera propiedad de traslación obtenga

$$\mathcal{L}\{e^{3t}t^2\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones. Factorial de un número.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

### Solución

Del primer teorema de traslación se tiene que

$$\mathcal{L}\{t^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Se identifica a la función  $f(t) = t^2$  en el problema y obteniendo su transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = F(s)$$

Aplicando el primer teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{e^{3t}t^2\} = F(s-3) \rightarrow \mathcal{L}\{e^{3t}t^2\} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{3t}t^2\} = \frac{2}{(s-3)^3}}$$

## Problema 10

Obtenga la siguiente transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{t}{4}}\cos(3t)\right\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

### Solución

La transformada de Laplace de la función coseno junto con el primer teorema de traslación están dadas por

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=s-a}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{\frac{t}{4}}\cos(3t)\right\} = \frac{s}{s^2 + 9} \Big|_{s=s-\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{\left(s - \frac{1}{4}\right)}{\left(s - \frac{1}{4}\right)^2 + 9}}$$

## Problema 11

Obtenga la transformada de Laplace de la siguiente función

$$\mathcal{L}\{e^t \cos(3t)\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

### Solución

La función del problema al tener el término  $e^t$  que indica una traslación

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s)|_{s=s-a} = F(s-a)$$

Obteniendo la transformada de Laplace de la función coseno

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2 + 9}$$

Aplicando el primer teorema de traslación

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^t \cos(3t)\} = \left( \frac{s}{s^2 + 9} \right) \Big|_{s=s+1} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 9}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 9}}$$

## Problema 12

Obtenga la transformada de Laplace de la siguiente función

$$f(t) = t \cos(3t)$$

aplicando la derivada de una transformada.

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Derivada de una transformada.

### Solución

La derivada de una transformada está dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}\{t^n g(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} G(s)$$

Identificando a la función  $g(t) = \cos(3t)$  y usando la transformada de Laplace para obtener  $G(s)$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2 + 9} = G(s)$$

Como en la función del problema se tiene a la variable  $t$ , entonces el valor de  $n$  es uno. Por lo tanto, se obtiene la primera derivada con respecto de  $s$

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{(s^2 + 9)(1) - (s)(2s)}{(s^2 + 9)^2} = \frac{-s^2 + 9}{(s^2 + 9)^2}$$

Y aplicando el término  $(-1)^n = -1$

$$F(s) = \frac{s^2 - 9}{(s^2 + 9)^2}$$

## Problema 13

Obtenga la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{-\frac{3}{4}t} \left( t \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) \right)$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Derivada de una transformada.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

### Solución

Primero, se observa que la función  $f(t)$  es el producto de tres funciones

$$f(t) = e^{-\frac{3}{4}t} \left( t \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) \right)$$

Por lo que se utiliza la transformada de una derivada

$$H(s) = \mathcal{L}\{t^n h(t)\} = (-1)^n H^n(s)$$

Donde el exponente  $n$  denota  $n$ -ésima derivada de la función. Para la función  $f(t)$  se considera

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{t \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right)\right\} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}}$$

$$H(s) = \frac{1}{2} \left( s^2 + \frac{1}{4} \right)^{-1}$$

Obteniendo la derivada de  $H(s)$

$$H'(s) = -\frac{1}{2} \left( s^2 + \frac{1}{4} \right)^{-2} (2s) = -s \left( s^2 + \frac{1}{4} \right)^{-2}$$

Considerando  $(-1)^n = -1$

$$H(s) = (-1) \left[ -s \left( s^2 + \frac{1}{4} \right)^{-2} \right] = \frac{s}{\left( s^2 + \frac{1}{4} \right)^2}$$

También se utilizará el primer teorema de traslación dado por

$$\mathcal{L}\{e^{at}g(t)\} = G(s)|_{s=s-a} = G(s-a)$$

Aplicando la traslación

$$\mathcal{L}\{e^{at}g(t)\} = \mathcal{L}\left\{e^{-\frac{3}{4}t}g(t)\right\} = G(t)|_{s=s+\frac{3}{4}}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{\left( s^2 + \frac{1}{4} \right)^2} \Bigg|_{s=s+\frac{3}{4}}$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace buscada es

$$F(s) = \frac{\left( s + \frac{3}{4} \right)}{\left[ \left( s + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2}$$

## Problema 14

Haciendo uso de las propiedades de derivación en el dominio de  $s$  obtenga la siguiente transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(at)\}$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Derivada de una transformada.

### Solución

La transformada de Laplace de la función seno es

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Del teorema de derivadas para transformadas

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Aplicando este teorema a la función  $t \operatorname{sen}(at)$  con  $n = 1$

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(at)\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{a}{s^2 + a^2} \right) = \left[ \frac{a}{(s^2 + a^2)^2} \right] (2s)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(at)\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}}$$

## Problema 15

Utilizando la transformada de Laplace de la función  $e^{at}$ , obtenga

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$$

partiendo de la expresión

$$e^{\omega it} = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Números complejos.

### Concepto básico para destacar

- Transformada de Laplace.

### Solución

Aplicando la transformada de Laplace de  $e^{\omega it} = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t)$

$$\mathcal{L}\{e^{\omega it}\} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} + i\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$$

Para  $e^{\omega it}$ , su transformada se obtiene de la misma manera que para las funciones exponenciales

$$\frac{1}{s - \omega i} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} + i\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$$

Multiplicando al resultado anterior por

$$\frac{s + \omega i}{s + \omega i}$$

al lado izquierdo de la igualdad

$$\left(\frac{1}{s - \omega i}\right)\left(\frac{s + \omega i}{s + \omega i}\right) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} + i\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$$

Desarrollando la multiplicación considerando que se está en el campo de los números complejos

$$\frac{s + \omega i}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} + i\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$$

La expresión anterior también puede escribirse como

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega i}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} + i\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$$

Igualando términos, parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria para obtener las transformadas de Laplace pedidas en el problema

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

## Problema 16

Obtenga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s - 6}{s^3 - s}\right\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.

### Concepto básico para destacar

- Transformada inversa de Laplace.

**Solución**

Descomponiendo en fracciones parciales

$$\frac{2s - 6}{s^3 - s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s - 1}$$

Se le dan algunos valores a  $s$  para encontrar los valores de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$

$$s = 0: \quad -6 = A \quad \rightarrow \quad A = 6$$

$$s = -1: \quad -8 = 2B \quad \rightarrow \quad B = -4$$

$$s = 1: \quad -4 = 2C \quad \rightarrow \quad C = -2$$

Por lo tanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s} - \frac{4}{s + 1} - \frac{2}{s - 1} \right\} = 6\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1} \right\} - 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - 1} \right\}$$

$$\boxed{y(t) = 6 - 4e^{-t} - 2e^t}$$

**Problema 17**

Resuelva la siguiente transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 6s + 18} \right\}$$

**Antecedentes**

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

**Conceptos básicos para destacar**

- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Transformada inversa de Laplace.

**Solución**

Primero, se agrega un 3 y un  $-3$  en el numerador de la función y se completa el trinomio en el denominador

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 6s + 18}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3 - 3}{s^2 + 6s + 9 + 9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3 - 3}{(s + 3)^2 + 9}\right\}$$

Asociando términos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 6s + 18}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 9}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s + 3)^2 + 9}\right\}$$

Se resuelve la transformada inversa de Laplace aplicando el primer teorema de traslación

$$\boxed{y(t) = e^{-3t} \cos(3t) - e^{-3t} \operatorname{sen}(3t)}$$

**Problema 18**

Obtenga la transformada inversa de Laplace de la siguiente función

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 4}$$

**Antecedentes**

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

**Conceptos básicos para destacar**

- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Transformada inversa de Laplace.

**Solución**

Completando la función  $F(s)$  para poder aplicar la transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2s + 4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 2s + 1) + 3}\right\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2 + 3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1) - 1}{(s+1)^2 + 3}\right\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2 + 3}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 3}\right\} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2 + 3}\right\}$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace es

$$f(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$$

## Problema 19

Calcule  $f(t)$  de la siguiente función

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8} + \frac{1}{s^2 + 4s - 8}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.
- Cálculo Integral: Función hiperbólica.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada inversa de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .

**Solución**

Completando la función  $F(s)$  para obtener una expresión a la cual se le pueda aplicar la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4 + 4} + \frac{1}{s^2 + 4s + 4 - 4 - 8} = \frac{1}{(s+2)^2 + 4} + \frac{1}{(s+2)^2 - 12}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+2)^2 + 4} \right\} + \frac{1}{\sqrt{12}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{12}}{(s+2)^2 - 12} \right\}$$

Del primer teorema de traslación

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \text{sen}(2t) + \frac{1}{\sqrt{12}} e^{-2t} \text{senh}(\sqrt{12}t)$$

**Problema 20**

Obtenga la transformada inversa de Laplace de la siguiente función

$$F(s) = e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 3} \right\}$$

**Antecedentes**

- Álgebra: Sustituciones. Exponentes.

**Conceptos básicos para destacar**

- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Transformada inversa de Laplace.

**Solución**

La función tiene el término  $e^{-t}$  lo que indica un desplazamiento en el dominio de  $s$ . Completando la transformada inversa de Laplace para obtener  $f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 3} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3} \right\}$$

$$f(t) = e^{-t} \left( \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}(\sqrt{3}t) \right)$$

## Problema 21

Obtenga la transformada de Laplace de la siguiente función

$$\mathcal{L}\{u(t - 5)\}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.

### Solución

La transformada de la función escalón unitario es

$$\mathcal{L}\{g(t - t_0)\} = e^{-t_0s} \mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-t_0s} G(s)$$

Obteniendo la transformada de Laplace de la función

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t - 5)\} = \frac{e^{-5s}}{s}}$$

## Problema 22

Obtenga la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ e^t, & t \geq 2 \end{cases}$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Funciones escalón unitario.

### Solución

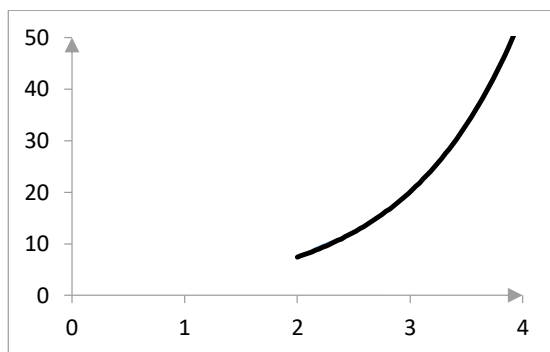
Recordando del segundo teorema de traslación

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ g(t - t_0), & t \geq t_0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de función escalón unitario es

$$\mathcal{L}\{g(t - t_0) u(t - t_0)\} = e^{-t_0 s} G(s)$$

Graficando la función  $f(t)$  se tiene



La función  $f(t)$  también se puede expresar con una regla de correspondencia de la siguiente forma

$$f(t) = u(t - 2)e^t$$

Para poder obtener la transformada de Laplace, ambas funciones deben tener el mismo traslado en  $t = 2$ . Completando este traslado en  $e^t$  sumando y restando un 2 en el exponente

$$f(t) = u(t - 2)e^{t-2+2} = u(t - 2)e^{(t-2)}e^2$$

Aplicando la transformada de Laplace

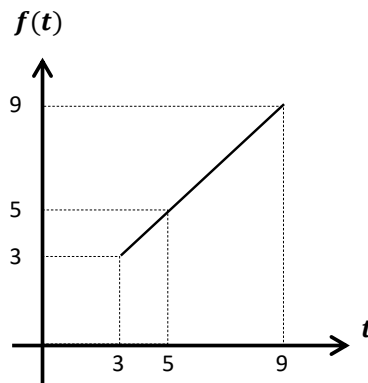
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^2 u(t-2)e^{(t-2)}\}$$

$$F(s) = e^2 \mathcal{L}\{u(t-2)e^{(t-2)}\} = e^2 \left( \frac{e^{-2s}}{s-1} \right)$$

$$F(s) = \frac{e^{-2s+2}}{s-1}$$

## Problema 23

Utilizando la función escalón y rampa, obtenga  $\mathcal{L}\{f(t)\}$



### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Función rampa.

**Solución**

Recordando del segundo teorema de traslación

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ g(t - t_0), & t \geq t_0 \end{cases}$$

La transformada de esta función definida por partes es

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-t_0s} \mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-t_0s} G(s)$$

La transformada de Laplace de la función escalón unitario es

$$\mathcal{L}\{g(x - x_0)u(x - x_0)\} = e^{-x_0s} G(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t - t_0)\} = \frac{e^{-t_0s}}{s}$$

La transformada de Laplace de la función rampa

$$\mathcal{L}\{r(t - t_0)\} = \frac{e^{-t_0s}}{s^2}$$

De la gráfica se puede observar que la función  $t$  está restringida para valores de  $t \geq 3$ .

Es decir, la función  $f(t)$  se puede expresar como

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t, & t \geq 3 \end{cases}$$

Lo anterior se obtiene multiplicando la función  $t$  por un escalón trasladado 3 unidades a la derecha

$$f(t) = tu(t - 3)$$

Donde vale cero para  $t < 3$  y uno para  $t \geq 3$ . Ahora bien, para aplicar el segundo teorema de traslación, se tiene que restar 3 y sumar 3 para no alterar la función

$$f(t) = [(t - 3) + 3]u(t - 3) = (t - 3)u(t - 3) + 3u(t - 3)$$

Se identifica la función rampa  $(t - 3)u(t - 3) = r(t - 3)$

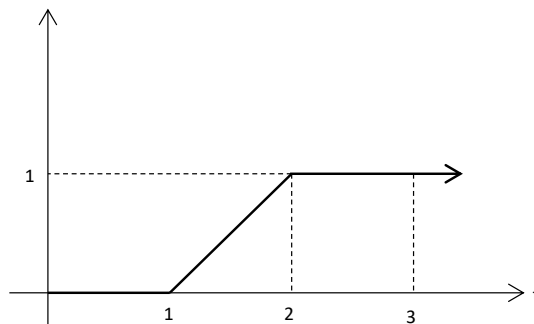
$$F(s) = \mathcal{L}\{r(t - 3)\} + 3\mathcal{L}\{u(t - 3)\}$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la función es

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2} + 3\frac{e^{-3s}}{s}$$

## Problema 24

Dada la siguiente gráfica



- Expresarla en función escalón unitario.
- Encontrar su transformada.

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes. Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Derivada de una transformada.

### Solución

a) A partir de la gráfica y de la función escalón unitario

$$f(t) = (t - 1)u(t - 1) - (t - 1)u(t - 2) + u(t - 2)$$

Desarrollando la función

$$f(t) = tu(t - 1) - u(t - 1) - tu(t - 2) + u(t - 2) + u(t - 2)$$

$$f(t) = tu(t - 1) - u(t - 1) - tu(t - 2) + 2u(t - 2)$$

b) Transformando la función

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tu(t - 1)\} - \mathcal{L}\{u(t - 1)\} - \mathcal{L}\{tu(t - 2)\} + 2\mathcal{L}\{u(t - 2)\}$$

Haciendo uso de derivada de una transformada

$$\mathcal{L}\{t^n g(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} G(s)$$

Identificando los términos a los que se les puede aplicar esta propiedad con  $n = 1$

$$\mathcal{L}\{tu(t - 1)\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-s}}{s} \right) = \frac{-se^{-s} - e^{-s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{tu(t - 1)\} = \frac{e^{-s}(s + 1)}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{tu(t-2)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right) = \frac{2se^{-2s} + e^{-2s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{tu(t-2)\} = \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2}$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}(s+1)}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s}$$

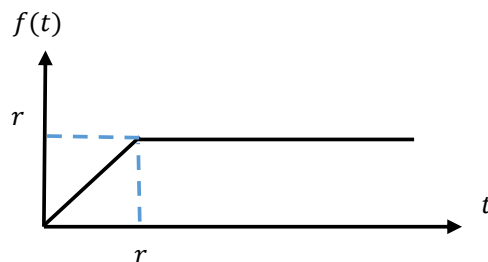
$$F(s) = \frac{se^{-s} + e^{-s} - se^{-e} - 2se^{-2s} - e^{-2s} + 2se^{-2s}}{s^2}$$

Simplificando

$$F(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s^2}$$

## Problema 25

Obtenga la transformada de Laplace de la función mostrada en la figura



Donde los valores de  $r$  mostrados en la gráfica valen una unidad.

## Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.

## Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Función rampa.

## Solución

Recordando del segundo teorema de traslación

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ g(t - t_0), & t \geq t_0 \end{cases}$$

La transformada de una función definida por partes es

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-t_0 s} \mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-t_0 s} G(s)$$

La transformada de Laplace de la función rampa

$$\mathcal{L}\{r(t - t_0)\} = \mathcal{L}\{(t - t_0)u(t - t_0)\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s^2}$$

La función rampa de la función del problema es

$$f(t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ g(t - 1), & t \geq 1 \end{cases}$$

De analizar la gráfica y de la función rampa

$$f(t) = t - (t - 1)u(t - 1)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la función

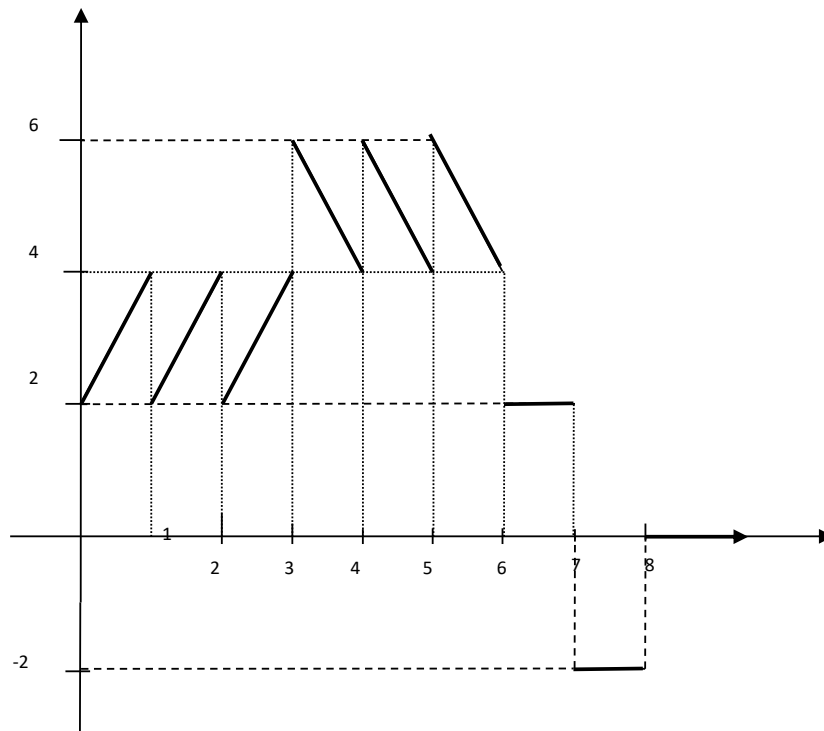
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$$

Simplificando

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}$$

## Problema 26

Plantear la siguiente función en términos de la función rampa y escalón, y encontrar su transformada de Laplace.



## Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.

## Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Función rampa.

## Solución

Planteando la función en términos de la función rampa y escalón unitario

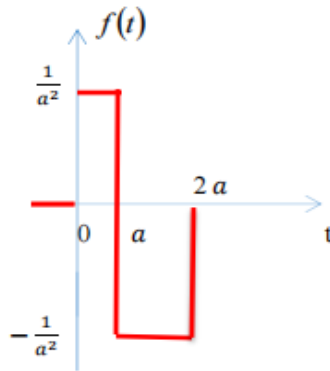
$$\begin{aligned}
 f(t) = & 2u(t) + 2r(t) - 2u(t-1) - 2u(t-2) - 2r(t-3) + 2u(t-3) \\
 & - 2r(t-3) + 2u(t-4) + 2u(t-5) + \\
 & + 2r(t-6) - 2u(t-6) - 4u(t-7) + 2u(t-8)
 \end{aligned}$$

Su transformada de Laplace es

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 F(s) = & \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} + \frac{2e^{-3s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} \\
 & + \frac{2e^{-4s}}{s} + \frac{2e^{-5s}}{s} + \frac{2e^{-6s}}{s^2} - \frac{2e^{-6s}}{s} - \frac{4e^{-7s}}{s} + \frac{2e^{-8s}}{s}
 \end{aligned}
 }$$

## Problema 27

Obtenga la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  mostrada en la figura



### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Transformada inversa de Laplace.

### Solución

La gráfica de la función se escribe en términos de la función escalón unitario  $u(t)$

$$f(t) = \frac{1}{a^2}u(t) - \frac{2}{a^2}u(t - a) + \frac{1}{a^2}u(t - 2a)$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2}u(t)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{a^2}u(t - a)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2}u(t - 2a)\right\}$$

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{a^2} \mathcal{L}^{-1}\{u(t)\} - \frac{2}{a^2} \mathcal{L}^{-1}\{u(t-a)\} + \frac{1}{a^2} \mathcal{L}^{-1}\{u(t-2a)\} \\
 &= \frac{1}{a^2 s} - \frac{2e^{-as}}{a^2 s} + \frac{e^{-2as}}{a^2 s} \\
 F(s) &= \frac{1}{a^2 s} (1 - 2e^{-as} + e^{-2as})
 \end{aligned}$$

De tal manera que se simplifica a

$$F(s) = \frac{1}{a^2 s} (1 - e^{-as})^2$$

## Problema 28

Utilice la antitransformada de Laplace para la siguiente expresión

$$Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{5e^{-2s}}{s^2} - \frac{3e^{-6s}}{s^2} + \frac{4e^{-10s}}{s^2 + 9}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Transformada inversa de Laplace.
- Función escalón unitario.

### Solución

Como  $Y(s)$  presenta en traslaciones en el dominio de  $t$ , su transformada inversa de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = e^{-t_0 s} \mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-t_0 s} G(s)$$

Además, la transformada inversa de Laplace de la función escalón unitario y de la función rampa son

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-t_0s}}{s}\right\} = u(t - t_0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-t_0s}}{s^2}\right\} = r(t - t_0) = (t - t_0)u(t - t_0)$$

De acuerdo a lo anterior, se obtiene  $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{5e^{-2s}}{s^2} - \frac{3e^{-6s}}{s^2} + \frac{4e^{-10s}}{s^2 + 9}\right\}$$

$$y(t) = 4 + 5(t - 2)u(t - 2) - 3(t - 6)u(t - 6) + \frac{4}{3}\text{sen}(3(t - 10))u(t - 10)$$

## Problema 29

Obtener la antitransformada de la siguiente expresión

$$Y(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + 4s + 16}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada inversa de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.

**Solución**

Completando el trinomio cuadrado perfecto del denominador

$$Y(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + 4s + 4 + 12} = \frac{se^{-2s}}{(s + 2)^2 + 12}$$

Sumando y restando 2 en el numerador y asociando términos

$$Y(s) = \frac{[(s + 2) - 2]e^{-2s}}{(s + 2)^2 + 12} = \frac{(s + 2)e^{-2s}}{(s + 2)^2 + 12} - \frac{2e^{-2s}}{(s + 2)^2 + 12}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s + 2)e^{-2s}}{(s + 2)^2 + 12}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s + 2)^2 + 12}\right\}$$

La transformada inversa de Laplace también tiene una traslación en el dominio de  $s$ , por lo tanto su resultado es

$$y(t) = e^{-2(t-2)} \left[ \cos(\sqrt{12}(t-2)) - \frac{2}{\sqrt{12}} \operatorname{sen}(\sqrt{12}(t-2)) \right] u(t-2)$$

**Problema 30**

Resuelva la siguiente transformada inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}(s + 2)}{s^2 + 10s + 30}\right\}$$

**Antecedentes**

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada inversa de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .

### Solución

Primero, se completa la función dada para poder obtener su transformada inversa de Laplace. Por lo tanto, se agrega un 3 y un  $-3$  en el numerador de la función y se completa el trinomio en el denominador

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}(s+2)}{s^2+10s+30}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2+3-3)e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+10s+25+5}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+5)e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+5)^2+5} - \frac{3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+5)^2+5}\right\}\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el primer y segundo teorema de traslación a la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}(s+2)}{s^2+10s+30}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+5)e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+5)^2+5}\right\} - \frac{3}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+5)^2+5}\right\}$$

$$f(t) = e^{\sqrt{5}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} \left[ \cos\left(\sqrt{5}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) \right] u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

## Problema 31

Obtenga la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Sujeto a las condiciones  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -2$ ,  $z(0) = 3$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales. Números complejos.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Reescribiendo el sistema de ecuaciones

$$x' - 2x = 3$$

$$y' - 3y = -1$$

$$z' + z = \cos(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace al sistema

$$sX(s) - x(0) - 2X(s) = \frac{3}{s}$$

$$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = -\frac{1}{s}$$

$$sZ(s) - z(0) + Z(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -2$  y  $z(0) = 3$

$$sX(s) - 1 - 2X(s) = \frac{3}{s}$$

$$sY(s) + 2 - 3Y(s) = -\frac{1}{s}$$

$$sZ(s) - 3 + Z(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Simplificando

$$X(s)(s - 2) = \frac{3}{s} + 1$$

$$Y(s)(s - 3) = -\frac{1}{s} - 2$$

$$Z(s)(s + 1) = \frac{s}{s^2 + 1} + 3$$

Despejando las funciones

$$X(s) = \frac{3 + s}{s} \left( \frac{1}{s - 2} \right) = \frac{3 + s}{s(s - 2)}$$

$$Y(s) = \frac{-2s - 1}{s} \left( \frac{1}{s - 3} \right) = \frac{-2s - 1}{s(s - 3)}$$

$$Z(s) = \frac{3s^2 + s + 3}{s^2 + 1} \left( \frac{1}{s + 1} \right) = \frac{3s^2 + s + 3}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

Aplicando descomposición mediante fracciones parciales para  $X(s)$

$$\frac{3 + s}{s(s - 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 2}$$

$$3 + s = A(s - 2) + Bs$$

Si  $s = 0$ :

$$3 = A(-2) \rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

Si  $s = 2$ :

$$5 = B(2) \rightarrow B = \frac{5}{2}$$

Análogamente para  $Y(s)$

$$\frac{-2s - 1}{s(s - 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 3}$$

$$-2s - 1 = A(s - 3) + Bs$$

Si  $s = 0$ :

$$-1 = A(-3) \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Si  $s = 3$ :

$$-7 = B(3) \rightarrow B = -\frac{7}{3}$$

Ahora para  $Z(s)$

$$\frac{3s^2 + s + 3}{(s^2 + 1)(s + 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$

$$3s^2 + s + 3 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)(s + 1)$$

Si  $s = -1$ :

$$5 = A(2) \rightarrow A = \frac{5}{2}$$

Si  $s = i$ :

$$i = -B + Bi + C + Ci$$

Por igualdad de números complejos

$$\begin{cases} \mathbb{R}: & -B + C = 0 \rightarrow B = C \\ \mathbb{C}: & B + C = 1 \rightarrow 2B = 1 \end{cases}$$

$$B = C = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, las funciones  $X(s)$ ,  $Y(s)$  y  $Z(s)$  quedan como

$$X(s) = \frac{3+s}{s(s-2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{s} + \frac{\frac{5}{2}}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{-2s-1}{s(s-3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} + \frac{-\frac{7}{3}}{s-3}$$

$$Z(s) = \frac{3s^2 + s + 3}{(s^2 + 1)(s + 1)} = \frac{\frac{5}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}$$

Aplicando la antitransformada de Laplace

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{7}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{7}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}}$$

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) + \frac{5}{2}e^{-t}}$$

## Problema 32

Obtenga la transformada de Laplace de la ecuación diferencial

$$y' - 3y = e^{2t}$$

bajo la condición  $y(0) = 1$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Sustituciones. Factorización con factor común.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Para obtener la transformada de Laplace de la función  $y^n(x)$  se utiliza la siguiente expresión

$$\mathcal{L}\{y^n(x)\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

Sustituyendo la condición inicial y despejando  $Y(s)$

$$(s-3)Y(s) = 1 + \frac{1}{s-2} \rightarrow (s-3)Y(s) = \frac{s-1}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s-3)}$$

## Problema 33

Utilizando la transformada de Laplace resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 6$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto. Factorización. Números complejos. Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Para obtener la transformada de Laplace de una derivada se utiliza la siguiente expresión

$$\mathcal{L}\{y^n(x)\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{-\frac{s}{4}}{s^2 + \frac{1}{4}}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando  $Y(s)$

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) - s - 6 + 6 = \frac{-\frac{s}{4}}{s^2 + \frac{1}{4}} \rightarrow (s - 3)^2 Y(s) = \frac{-\frac{s}{4}}{s^2 + \frac{1}{4}} + s$$

$$(s-3)^2 Y(s) = \frac{s^3 + \frac{s}{4} - \frac{s}{4}}{s^2 + \frac{1}{4}} \rightarrow (s-3)^2 Y(s) = \frac{s^3}{s^2 + \frac{1}{4}}$$

$$Y(s) = \frac{s^3}{\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)(s-3)^2}$$

Desarrollando en fracciones parciales

$$\frac{s^3}{\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)(s-3)^2} = \frac{As+B}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{(s-3)^2}$$

$$(As+B)(s-3)^2 + C\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)(s-3) + D\left(s^2 + \frac{1}{4}\right) = s^3$$

Dando algunos valores a  $s$  para encontrar los valores de las constantes

Si  $s = 3$ :

$$D\left(9 + \frac{1}{4}\right) = 27 \rightarrow \frac{37}{4}D = 27$$

$$D = \frac{108}{37}$$

Si  $s = \frac{i}{2}$ :

$$\left(\frac{Ai}{2} + B\right)(s^2 - 6s + 9) = s^3 \rightarrow \left(\frac{Ai}{2} + B\right)\left(-\frac{1}{4} - \frac{6i}{2} + 9\right) = -\frac{i}{8}$$

$$\left(\frac{Ai}{2} + B\right)\left(-\frac{6i}{2} + \frac{35}{4}\right) = -\frac{i}{8} \rightarrow \left(\frac{Ai}{2} + B\right)\left(-3i + \frac{35}{4}\right) = -\frac{i}{8}$$

$$\frac{3}{2}A - 3Bi + \frac{35}{8}Ai + \frac{35}{4}B = -\frac{i}{8}$$

Por igualdad de números complejos

Para la parte real

$$\mathbb{R}: \frac{3}{2}A + \frac{35}{4}B = 0$$

Para la parte imaginaria

$$\mathbb{C}: \frac{35}{8}A - 3B = -\frac{1}{8}$$

Despejando el valor de A de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda

$$\frac{3}{2}A = -\frac{35}{4}B \quad \rightarrow \quad A = -\frac{70}{12}B$$

$$\frac{35}{8}\left(-\frac{70}{12}B\right) - 3B = -\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad -\frac{2450}{96}B - 3B = -\frac{1}{8}$$

$$B\left(\frac{-2450 - 288}{96}\right) = -\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{-2738}{96}\right)B = -\frac{1}{8}$$

$$B = \frac{96}{8(2738)} = \frac{12}{2738} = \frac{6}{1369}$$

$$B = \frac{6}{1369}$$

$$A = -\frac{70}{12}B = -\frac{70}{12}\left(\frac{6}{1369}\right)$$

$$A = -\frac{35}{1369}$$

Si  $s = 0$ :

$$9B - \frac{3}{4}C + \frac{1}{4}D = 0 \quad \rightarrow \quad 9B + \frac{1}{4}D = \frac{3}{4}C$$

$$9\left(\frac{6}{1369}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{108}{37}\right) = \frac{3}{4}C \quad \rightarrow \quad \frac{54}{1369} + \frac{108}{148} = \frac{3}{4}C$$

$$\frac{4}{3} \left( \frac{54}{1369} + \frac{108}{148} \right) = C \quad \rightarrow \quad C = \frac{1404}{1369}$$

Sustituyendo los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$

$$\frac{s^3}{\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)(s-3)^2} = \frac{\left(-\frac{35}{1369}\right)s + \frac{6}{1369}}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1404}{s-3} + \frac{108}{(s-3)^2}$$

$$\frac{s^3}{\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)(s-3)^2} = \frac{\left(-\frac{35}{1369}\right)s + \frac{6}{1369}}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1404}{s-3} + \frac{3996}{(s-3)^2}$$

Factorizando

$$Y(s) = \frac{1}{1369} \left( \frac{-35s + 6}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1404}{s-3} + \frac{3996}{(s-3)^2} \right)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{1}{1369} \left( -35 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} \right\} + \frac{6}{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}} \right\} + 1404 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 3996 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^2} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{1369} \left( 12 \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) - 35 \cos \left( \frac{t}{2} \right) + 1404 e^{3t} + 3996 t e^{3t} \right)}$$

## Problema 34

Haciendo uso de la transformada de Laplace obtenga la solución de la ecuación diferencial

$$x'' + 9x = 18 \cos(3t)$$

con la condición  $x(0) = 0$  y  $x'(2\pi) = 0$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.
- Cálculo Diferencial: Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada inversa de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Derivada de una transformada.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Para obtener la transformada de Laplace de una derivada se utiliza la siguiente expresión

$$\mathcal{L}\{x^n(x)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

La transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 9X(s) = \frac{18s}{s^2 + 9}$$

Aplicando la condición inicial  $x(0) = 0$  y como no se tiene un valor para  $x'(0)$ , entonces solo se dejará expresada

$$s^2 X(s) - x'(0) + 9X(s) = \frac{18s}{s^2 + 9}$$

Despejando  $X(s)$

$$(s^2 + 9)X(s) = \frac{18s}{s^2 + 9} + x'(0) \rightarrow X(s) = \frac{18s}{(s^2 + 9)(s^2 + 9)} + \frac{x'(0)}{(s^2 + 9)}$$

$$X(s) = \frac{18s}{(s^2 + 9)^2} + \frac{x'(0)}{(s^2 + 9)}$$

Como se observa que el primer término del lado derecho de la igualdad

$$\frac{18s}{(s^2 + 9)^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{-9}{s^2 + 9} \right)$$

equivale a usar la expresión para la derivada de una transformada

$$\mathcal{L}\{t^n g(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} G(s)$$

Con  $n = 1$ . Es decir

$$X(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{-9}{s^2 + 9} \right) + \frac{x'(0)}{(s^2 + 9)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$x(t) = 3t \operatorname{sen}(3t) + \frac{x'(0)}{3} \operatorname{sen}(3t)$$

Haciendo  $x'(0) = C$

$$x(t) = \left( \frac{1}{3}C + 3t \right) \operatorname{sen}(3t)$$

## Problema 35

Obtenga la transformada de Laplace del siguiente problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = 1 - 2t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Se aplica la transformada de Laplace a cada término de la ecuación

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{-2y\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{-2t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$$

Después se sustituyen las condiciones iniciales y se reagrupa la variable  $Y(s)$

$$s^2Y(s) - 4 + sY(s) - 2Y(s) = \frac{s-2}{s^2} \quad \rightarrow \quad (s^2 + s - 2)Y(s) = \frac{s-2}{s^2} + 4$$

$$(s+2)(s-1)Y(s) = \frac{4s^2 + s - 2}{s^2} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4s^2 + s - 2}{s^2(s+2)(s-1)}$$

Planteando la  $Y(s)$  en fracciones parciales

$$\frac{4s^2 + s - 2}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1}$$

$$4s^2 + s - 2 = As(s + 2)(s - 1) + B(s + 2)(s - 1) + Cs^2(s - 1) + Ds^2(s + 2)$$

$$4s^2 + s - 2 = (A + C + D)s^3 + (A + B - C + 2D)s^2 + (-2A + B)s - 2B$$

Al igualar componentes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$A + C + D = 0$$

$$A + B - C + 2D = 4$$

$$-2A + B = 1$$

$$-2B = -2$$

Al resolver el sistema se obtiene

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 1$$

Sustituyendo estos valores

$$Y(s) = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

Por lo tanto, la solución es

$$y(t) = t - e^{-2t} + e^t$$

## Problema 36

Resuelva la siguiente ecuación

$$y'' + 6y' + 9y = u(t - 2)$$

si se sabe que está sujeta a las siguientes condiciones  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

La transformada de Laplace de una derivada está dada por la expresión

$$\mathcal{L}\{y^n(x)\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

Aplicando lo anterior a la ecuación diferencial

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = e^{-2s}$$

De las condiciones iniciales

$$(s^2 Y(s) - s(1) - 0) + 6(sY(s) - 1) + 9Y(s) = e^{-2s}$$

Despejando  $Y(s)$

$$s^2Y(s) - s + 6sY(s) - 6 + 9Y(s) = e^{-2s} \quad \rightarrow \quad (s^2 + 6s + 9)Y(s) = e^{-2s} + s + 6$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s} + s + 6}{s^2 + 6s + 9} = \frac{e^{-2s} + s + 6}{(s + 3)^2}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 6s + 9} + \frac{s + 6}{s^2 + 6s + 9}$$

Simplificando

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s + 3)^2} + \frac{s + 3 + 3}{(s + 3)^2} = \frac{e^{-2s}}{(s + 3)^2} + \frac{s + 3}{(s + 3)^2} + \frac{3}{(s + 3)^2}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s + 3)^2} + \frac{1}{s + 3} + \frac{3}{(s + 3)^2}$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace y considerando que en  $Y(s)$  se involucran el primero y segundo teoremas de traslación

$$y(t) = (t - 2)e^{-3(t-2)}u(t - 2) + e^{-3t} + 3te^{-3t}$$

## Problema 37

Resuelva el problema de valor inicial

$$x'' + 4x' + 4x = 1 + \delta(t - 2); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto. Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función delta de Dirac.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Primero, cabe destacar la presencia de la delta de Dirac y cuya transformada tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}, \quad t > 0$$

Obteniendo la transformada de Laplace a cada término de la ecuación

$$\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{4x'\} + \mathcal{L}\{4x\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\delta(t - 2)\}$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4(sX(s) - x(0)) + 4X(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando para  $X(s)$

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 4X(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s} \quad \rightarrow \quad (s^2 + 4s + 4)X(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}$$

Separando las componentes

$$X_1(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$X_2(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}$$

Proponiendo lo siguiente para obtener la transformada inversa de Laplace a  $X(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s) + X_2(s)\} = x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

Al desarrollar  $X_1(s)$  en fracciones parciales

$$X_1(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$1 = A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs = (A+B)s^2 + (4A+2B+C)s + 4A$$

Formando el siguiente el sistema de ecuaciones para encontrar los valores de las constantes  $A, B$  y  $C$

$$A + B = 0$$

$$4A + 2B + C = 0$$

$$4A = 1$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}$$

Reescribiendo  $X_1(s)$

$$X_1(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s} + \frac{-1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{2} \frac{1}{(s+2)^2}$$

Obteniendo  $x_1(t)$  mediante la transformada inversa de Laplace

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2s} - \frac{1}{2} t e^{-2s}$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace a  $X_2(s)$  para obtener  $x_2(t)$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}\right\}$$

$$x_2(t) = (t-2)e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

Finalmente

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2s} - \frac{1}{2}te^{-2s} + (t-2)e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

## Problema 38

Resolver la siguiente ecuación diferencial haciendo uso de la transformada de Laplace

$$y'' + 2y = tu(t) + 4u(t - 2\pi)$$

Para  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 1$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales. Números complejos.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Derivada de una transformada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

**Solución**

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y\} = \mathcal{L}\{tu(t) + 4u(t - 2\pi)\}$$

Para la función  $tu(t)$  del lado izquierdo de la igualdad se obtiene la derivada de una transformada

$$\mathcal{L}\{tu(t) + 4u(t - 2\pi)\} = (-1) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) + 4e^{-2\pi s} = \frac{1}{s^2} + 4e^{-2\pi s}$$

Por lo tanto, la transformada de la ecuación diferencial queda como

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + 4e^{-2\pi s}$$

De las condiciones iniciales

$$s^2 Y(s) - s(1) - (1) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + 4e^{-2\pi s}$$

Se despeja la incógnita

$$Y(s)(s^2 + 2) = \frac{1}{s^2} + s + 1 + 4e^{-2\pi s} \quad \rightarrow \quad Y(s)(s^2 + 2) = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2} + 4e^{-2\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)} + \frac{4e^{-2\pi s}}{(s^2 + 2)}$$

La transformada inversa de Laplace de  $Y(s)$  es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 2} \right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)} \right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 2} \right\}$$

Para el primer término se realiza una descomposición en fracciones parciales

$$\frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2}$$

$$s^3 + s^2 + 1 = As(s^2 + 2) + B(s^2 + 2) + (Cs + D)s^2$$

De resolver la expresión anterior se tiene que los valores de las constantes son

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 1, \quad D = \frac{1}{2}$$

$$\frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + 2}$$

La transformada inversa de Laplace queda como

$$y(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 2} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2} \right\} + 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 2} \right\}$$

Completando el resto de los términos

$$y(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 2} \right\} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} \right\} + \frac{4}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2} e^{-2\pi s}}{s^2 + 2} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} t + \cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{4}{\sqrt{2}} \text{sen}(\sqrt{2}(t - 2\pi)) u(t - 2\pi)$$

## Problema 39

Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante el uso de la transformada de Laplace

$$2x'' + 4x = (t - 2\pi)u(t - 2\pi)$$

para  $x(0) = 1$  y  $x'(0) = 0$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales. Números complejos.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Aplicando transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\{2x''\} + \mathcal{L}\{4x\} = \mathcal{L}\{(t - 2\pi)u(t - 2\pi)\}$$

$$2(s^2X(s) - sx'(0) - x(0)) + 4X(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2}$$

De las condiciones iniciales

$$2(s^2X(s) - s(1) - 0) + 4X(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2}$$

Despejando  $X(s)$

$$X(s)(2s^2 + 4) = 2s + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} = \frac{2s}{2s^2 + 4} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2(2s^2 + 4)}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s^2 + 2)}$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace de la expresión anterior

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2}\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s^2 + 2)}\right\}$$

Para resolver la segunda inversa se realiza una descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2}$$

$$1 = As(s^2 + 2) + B(s^2 + 2) + (Cs + D)s^2$$

Donde los valores de las constantes son

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{-1/2}{s^2 + 2}$$

La transformada inversa de Laplace queda como

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2}\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{se^{-2\pi s}}{s^2 + 2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2}\right\} + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2}\right\} - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 2}\right\} \end{aligned}$$

Completando

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + 2} \right\} + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} \right\} - \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}e^{-2\pi s}}{s^2 + 2} \right\}$$

Se resuelven las transformadas inversas

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{4} \left[ (t - 2\pi) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}(t - 2\pi)) \right] u(t - 2\pi)$$

## Problema 40

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = \delta(t - 1)$$

Si  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 0$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función delta de Dirac.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

**Solución**

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = e^{-s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = e^{-s}$$

Despejando la incógnita  $Y(s)$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 1) = e^{-s} \quad \rightarrow \quad Y(s) = e^{-s} \left( \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \right)$$

$$Y(s) = e^{-s} \left( \frac{1}{(s+1)^2} \right)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace considerando que se tiene una traslación en el dominio de  $s$

$$\boxed{y(t) = (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)}$$

**Problema 41**

Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + y = f(t); \quad f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ e^{t-2}, & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

$$y(0) = 0 \text{ y } y'(0) = 0.$$

## Antecedentes

- Álgebra: Números complejos.
- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.

## Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Primer teorema de traslación en el dominio de  $s$ .
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

## Solución

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Con la traslación

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{t-2}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando  $Y(s)$

$$Y(s)(s^2 + 1) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

Utilizando descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B + Cs}{s^2 + 1}$$

$$1 = A(s^2 + 1) + B(s + 1) + Cs(s + 1)$$

Si  $s = -1$ :

$$1 = A(2) \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Si  $s = 0$ :

$$1 = \frac{1}{2} + B(1) \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Si  $s = 1$ :

$$1 = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(2) + C(2) \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores y aplicando la transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}e^{-2s}}{s + 1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}e^{-2s}}{s^2 + 1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{2}se^{-2s}}{s^2 + 1} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s}}{s + 1} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s}}{s^2 + 1} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{se^{-2s}}{s^2 + 1} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} [e^{(t-2)} + \text{sen}(t - 2) - \cos(t - 2)]u(t - 2)$$

## Problema 42

Obtenga la solución  $x(t)$  del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace.

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$$

Con las condiciones iniciales  $x(0) = 0, y(0) = 0$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformadas de Laplace en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Primero, se aplica la transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} 2\mathcal{L}\{x'\} + \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{1\} \\ \mathcal{L}\{x'\} + \mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{x\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(sX(s) - x(0)) + sY(s) - y(0) - 2X(s) = \frac{1}{s} \\ sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) - 3X(s) - 3Y(s) = \frac{2}{s} \end{cases}$$

Después se evalúan las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 2sX(s) + sY(s) - 2X(s) = \frac{1}{s} \\ sX(s) + sY(s) - 3X(s) - 3Y(s) = \frac{2}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2s - 2)X(s) + sY(s) = \frac{1}{s} & \dots (1) \\ (s - 3)X(s) + (s - 3)Y(s) = \frac{2}{s} & \dots (2) \end{cases}$$

Se despeja  $Y(s)$  de la ecuación (1)

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{1}{s} + (-2s + 2)X(s) \right)$$

Sustituyendo esta última en la ecuación (2)

$$(s - 3)X(s) + (s - 3) \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{1}{s} + (-2s + 2)X(s) \right) \right] = \frac{2}{s}$$

Simplificando

$$\left( (s - 3) + \frac{(s - 3)(-2s + 2)}{s} \right) X(s) = \frac{2}{s} - \frac{(s - 3)}{s^2}$$

Al despejar  $X(s)$  queda

$$X(s) = \frac{s}{s(s - 3) + (s - 3)(-2s + 2)} \left( \frac{2s - s + 3}{s^2} \right) = \frac{s}{-s^2 + 5s - 6} \left( \frac{2s - s + 3}{s^2} \right)$$

$$X(s) = \frac{s + 3}{s(s - 2)(s - 3)}$$

Reescribiendo la función  $X(s)$  en fracciones parciales

$$\frac{s+3}{s(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

$$s+3 = A(s-2)(s-3) + Bs(s-3) + Cs(s-2)$$

$$\rightarrow s+3 = (A+B+C)s^2 + (-5A-3B-2C)s + 6A$$

De donde se obtiene el siguiente sistema

$$A+B+C=0$$

$$-5A-3B-2C=1$$

$$6A=3$$

Los valores de las constantes son los siguientes

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{5}{2}, \quad C = 2$$

Entonces,  $X(s)$  queda como

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{-5}{2} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

Por último, la solución  $x(t)$  del sistema de ecuaciones diferenciales es

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} e^{2t} + 2e^{3t}$$

## Problema 43

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace

$$\begin{cases} x' - 2y = 4t \\ -4x + y' + 2y = -4t - 2 \end{cases}$$

Para  $x(0) = 4$  y  $y(0) = -5$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformadas de Laplace en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Aplicando la transformada de Laplace en todo el sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{t\} \\ -4\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = -4\mathcal{L}\{t\} - 2\mathcal{L}\{1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \\ -4X(s) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \end{cases}$$

De las condiciones iniciales

$$\begin{cases} sX(s) - 4 - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \\ -4X(s) + sY(s) + 5 + 2Y(s) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \end{cases}$$

Simplificando

$$\begin{cases} sX(s) - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + 4 \\ -4X(s) + Y(s)(s + 2) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s)(s) - 2Y(s) = \frac{4s^2 + 4}{s^2} \\ X(s)(-4) + Y(s)(s + 2) = \frac{-5s^2 - 2s - 4}{s^2} \end{cases}$$

Multiplicando por  $s + 2$  a la ecuación (1) y por 2 a la ecuación (2)

$$\begin{cases} (s + 2)[X(s)(s) - 2Y(s)] = (s + 2)\left(\frac{4s^2 + 4}{s^2}\right) \dots (1) \\ 2[X(s)(-4) + Y(s)(s + 2)] = 2\left(\frac{-5s^2 - 2s - 4}{s^2}\right) \dots (2) \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones del sistema

$$X(s)(s^2 + 2s - 8) = \frac{4s^3 + 8s^2 + 4s + 8 - 8 - 4s - 10s^2}{s^2}$$

Factorizando del lado izquierdo y simplificamos del lado derecho para poder despejar la incógnita

$$X(s)[(s + 4)(s - 2)] = \frac{4s^3 - 2s^2}{s^2} = 4s - 2$$

$$X(s) = \frac{4s - 2}{(s + 4)(s - 2)}$$

Se realiza una descomposición en fracciones parciales

$$\frac{4s - 2}{(s + 4)(s - 2)} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 2}$$

$$4s - 2 = A(s - 2) + B(s + 4)$$

Donde los valores de las  $A$  y  $B$  constantes son

$$A = 3, \quad B = 1$$

$$\frac{4s - 2}{(s + 4)(s - 2)} = \frac{3}{s + 4} + \frac{1}{s - 2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace para obtener el resultado para  $x(t)$

$$x(t) = \mathcal{L}\left\{\frac{3}{s + 4}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s - 2}\right\} = 3e^{-4t} + e^{2t}$$

Derivando  $x(t)$

$$x'(t) = -12e^{-4t} + 2e^{2t}$$

Sustituyendo  $x'(t)$  en la ecuación diferencial original para poder encontrar a  $y(t)$

$$x'(t) - 2y = 4t \quad \rightarrow \quad -12e^{-4t} + 2e^{2t} - 2y = 4t$$

$$y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son

$$\boxed{x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}}$$

$$\boxed{y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t}$$

## Problema 44

Utilice la transformada de Laplace para obtener la solución del sistema

$$x' + y = 1 - u(t - 2)$$

$$x + y' = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto. Regla de Cramer.
- Cálculo Integral: Funciones hiperbólicas.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformadas de Laplace en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Segundo teorema de traslación en el eje  $t$ .
- Función escalón unitario.
- Transformada de una derivada.
- Transformada inversa de Laplace.
- Condiciones iniciales.

### Solución

Aplicando la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones

$$\mathcal{L}\{x'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u(t - 2)\}$$

$$\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$sX(s) - x(0) + Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-2s}$$

$$X(s) + sY(s) - y(0) = 0$$

Sustituyendo los valores iniciales  $x(0) = 0$  y  $y(0) = 0$

$$sX(s) + Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-2s}$$

$$X(s) + sY(s) = 0$$

Aplicando la regla de Cramer para encontrar  $x(t)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 1$$

$$\det(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{s} - e^{-2s} & 1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = 1 - se^{-2s}$$

$$X(s) = \frac{\det(X)}{\det(A)} = \frac{1 - se^{-2s}}{s^2 - 1} = \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{se^{-2s}}{s^2 - 1}$$

Aplicando la antitransformada a las expresiones anteriores

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2 - 1}\right\}$$

De donde sus respectivas antitransformadas corresponden con las de las funciones seno y coseno hiperbólico, entonces:

$$\boxed{x(t) = \sinh(t) - \cosh(t - 2)u(t - 2)}$$

Análogamente para obtener la función  $y(t)$

$$\det(Y) = \begin{vmatrix} s & \frac{1}{s} - e^{-2s} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = e^{-2s} - \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\det(Y)}{\det(A)} = \frac{e^{-2s} - \frac{1}{s}}{s^2 - 1} = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 1} - \frac{\frac{1}{s}}{s^2 - 1} = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 1} - \frac{1}{s(s^2 - 1)}$$

Utilizando descomposición por fracciones parciales para el segundo término

$$-\frac{1}{s(s^2 - 1)} = \frac{-1}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

$$-1 = A(s^2 - 1) + Bs(s - 1) + Cs(s + 1)$$

Dando valores a la variable  $s$

Si  $s = 0$ :

$$-1 = A(-1) \rightarrow A = 1$$

Si  $s = -1$ :

$$-1 = B(-2) \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Si  $s = 1$ :

$$-1 = C(2) \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores y aplicando la antitransformada

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2 - 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$y(t) = \sinh(t - 2)u(t - 2) + 1 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t$$

De las funciones hiperbólicas

$$\boxed{y(t) = \sinh(t - 2)u(t - 2) - \cosh(t) + 1}$$

## Problema 45

Utilizando la transformada de Laplace de una integral, obtenga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$$

Realice la comprobación del resultado obtenido.

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Integral definida.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada inversa de Laplace.
- Transformada de una integral.

### Solución

De la expresión para encontrar la transformada de una integral

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Como

$$F(s) = \left(\frac{1}{s-a}\right); \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-a}\right)\right\} = e^{at}$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-a}\right)\right\} = \int_0^t f(t)dt$$

Sustituyendo en  $f(t)$  y resolviendo la integral

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-a}\right)\right\} = \int_0^t e^{at}dt$$

$$f(t) = e^{at}|_0^t = e^{at} - e^0$$

$$\boxed{f(t) = e^{at} - 1}$$

Para la comprobación se obtiene la transformada de Laplace de la función  $f(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at} - 1\} = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s(s-a)}}$$

## Problema 46

Utilizando el teorema de convolución, obtenga la transformada de Laplace de la función

$$\int_0^t f(t) dt$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Integral definida.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Teorema de convolución.

### Solución

Del teorema de convolución

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

Para este problema

$$f(t)|_{t=\tau} = f(\tau)$$

$$g(t) = g(t - \tau) = 1|_{t=t-\tau} = 1$$

$$\int_0^t f(t)(1)dt = \int_0^{\tau} f(\tau)(1)d\tau$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \frac{F(s)}{s}}$$

## Problema 47

Obtenga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}$$

haciendo uso del teorema de convolución.

### Antecedentes

- Álgebra: Leyes de los exponentes.
- Cálculo Integral: Integral definida.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.

**Solución**

Del teorema de convolución

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

Para este problema

$$f(t) = \frac{1}{s-1}, \quad g(t) = \frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t, \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$$

Sustituyendo estos valores en la transformada inversa de Laplace y aplicando la convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\right\} = \int_0^t e^{-4\tau} e^{(t-\tau)} d\tau = e^t \int_0^t e^{-5\tau} d\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\right\} = e^t \left(\frac{-e^{-5\tau}}{5}\right)\Bigg|_0^t = e^t \left(\frac{-e^{-5t} + 1}{5}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\right\} = \frac{e^t - e^{-4t}}{5}}$$

**Problema 48**

Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y(t) + \int_0^t (t - \tau)y(\tau) d\tau = 1$$

**Antecedentes**

- Álgebra: Factorización por factor común.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.
- Ecuación integro-diferencial.

### Solución

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t (t - \tau)y(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$Y(s) + Y(s)\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$

Despejando  $Y(s)$

$$Y(s)\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad Y(s)\left(\frac{s^2 + 1}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace

$$\boxed{y(t) = \cos(t)}$$

## Problema 49

Determine  $f(t)$  si

$$f(t) = t^2 + e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau} d\tau$$

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.
- Ecuación integro-diferencial.

### Solución

Utilizando la transformada de Laplace en la función  $f(t)$

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s+1} - F(s) \left( \frac{1}{s-1} \right)$$

Despejando  $F(s)$

$$F(s) \left( 1 + \frac{1}{s-1} \right) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s+1} \rightarrow F(s) \left( \frac{s}{s-1} \right) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{2(s-1)}{s^4} + \frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^4} + \frac{s-1}{s(s+1)}$$

Usando descomposición en fracciones parciales para la última expresión

$$\frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$s-1 = A(s+1) + Bs$$

De resolver el sistema se obtiene que los valores de las constantes  $A$  y  $B$  son

$$A = -1, \quad B = 2$$

$$\frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s+1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$f(t) = t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 1 + 2e^{-t}$$

## Problema 50

Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial

$$y'(t) - 27 \int_0^t \mu y(t - \mu) d\mu = e^{3t}$$

con  $y(0) = 0$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Descomposición en fracciones parciales.  
Trinomio cuadrado perfecto. Factorización de resta de cubos.  
Números complejos.
- Cálculo Diferencial: Derivada de un producto.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.
- Ecuación integro-diferencial.
- Condición inicial.

**Solución**

Obteniendo la transformada de Laplace de la ecuación integro-diferencial

$$sY(s) - y(0) - 27\frac{Y(s)}{s^2} = \frac{1}{s-3}$$

Sustituyendo la condición inicial y despejando  $Y(s)$

$$Y(s) \left( s - \frac{27}{s^2} \right) = \frac{1}{s-3} \rightarrow Y(s) \left( \frac{s^3 - 27}{s^2} \right) = \frac{1}{s-3}$$

$$Y(s) = \frac{s^2}{(s-3)(s^3-27)} = \frac{s^2}{(s-3)^2(s^2+3s+9)}$$

Usando descomposición en fracciones parciales

$$\frac{s^2}{(s-3)^2(s^2+3s+9)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+3s+9}$$

$$A(s-3)(s^2+3s+9) + B(s^2+3s+9) + (Cs+D)(s-3)^2 = s^2$$

Dando valores a  $s$  para encontrar los valores de las constantes

Si  $s = 3$ :

$$27B = 9 \rightarrow B = \frac{1}{3}$$

Derivando con respecto a  $s$

$$A[(s-3)(2s+3) + (s^2+3s+9)] + B(2s+3) + (Cs+D)[2(s-3)] + (s-3)^2C = 2s$$

Si  $s = 3$ :

$$27A + \frac{1}{3}(9) = 6 \rightarrow A = \frac{1}{9}$$

Si  $s=0$ :

$$\frac{1}{9}(-3)(9) + \frac{1}{3}(9) + D(9) = 0 \rightarrow D = 0$$

Si  $s=1$ :

$$\frac{1}{9}(-2)(13) + \frac{1}{3}(13) + C(4) = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{9}$$

Sustituyendo

$$Y(s) = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{s-3} \right) + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(s-3)^2} \right] - \frac{1}{9} \left[ \frac{s}{(s^2 + 3s + 9)} \right]$$

Completando términos para obtener la transformada inversa de Laplace y considerando las traslaciones

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^2} \right\} - \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{\left( (s + \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4} \right)} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^2} \right\} - \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{3}{2}}{\left( (s + \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4} \right)} \right\}$$

$$+ \left( \frac{2}{\sqrt{27}} \right) \left( \frac{1}{9} \right) \left( \frac{3}{2} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\sqrt{27}}{2}}{\left( (s + \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4} \right)} \right\}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación integro-diferencial es

$$y(t) = \frac{1}{9} e^{3t} + \frac{1}{3} t e^{3t} - \frac{1}{9} e^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{27}}{2}t\right) + \frac{1}{3\sqrt{27}} e^{\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{27}}{2}t\right)$$

## Problema 51

Encuentre la solución de la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) = 1 - \operatorname{sen}(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau; \quad y(0) = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Identidades trigonométricas.
- Cálculo Integral: Integral definida.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.
- Ecuación integro-diferencial.
- Condición inicial.

### Solución

Usando la antitransformada de Laplace en cada término de la ecuación integro-diferencial

$$\mathcal{L}^{-1}\{y'(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\{\operatorname{sen}(t)\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\}$$

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{Y(s)}{s}$$

Sustituyendo la condición inicial y despejando  $Y(s)$

$$\left(s + \frac{1}{s}\right)Y(s) = \frac{s^2 + 1 - s}{s(s^2 + 1)} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \left(\frac{s}{s^2 + 1}\right)\left(\frac{s^2 + 1 - s}{s(s^2 + 1)}\right)$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace a  $Y(s)$  con la finalidad de hallar  $y(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}\right\} \\ y(t) &= \text{sen}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}\right\}\end{aligned}$$

La obtención de la transformada inversa de Laplace de

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}\right\}$$

se hará por medio de la convolución de funciones  $f * g$

$$y(t) = \text{sen}(t) - f * g$$

Estableciendo asignaciones para  $F(s)$  y  $G(s)$

$$f * g = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$$

Donde

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+1)}$$

Considerando

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \text{sen}(t) = g(t)$$

Al realizar la integral de convolución y usando identidades trigonométricas

$$f * g = \int_0^t \cos(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau = \int_0^t \cos(\tau) (\operatorname{sen}(t)\cos(\tau) - \cos(t)\operatorname{sen}(\tau)) d\tau$$

$$f * g = \int_0^t \operatorname{sen}(t) \cos^2(\tau) d\tau - \int_0^t \cos(t) \cos(\tau) \operatorname{sen}(\tau) d\tau$$

$$f * g = \operatorname{sen}(t) \int_0^t \frac{1 + \cos(2\tau)}{2} d\tau - \cos(t) \int_0^t \cos(\tau) \operatorname{sen}(\tau) d\tau$$

$$f * g = \operatorname{sen}(t) \left[ \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\tau) \right] \Big|_0^t - \cos(t) \left[ \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\tau) \right] \Big|_0^t$$

$$f * g = \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t)(2\operatorname{sen}(t)\cos(t)) - \frac{1}{2}\cos(t)\operatorname{sen}^2(t)$$

$$f * g = \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\operatorname{sen}^2(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)$$

Finalmente, la solución de la ecuación integro-diferencial es

$$y(t) = \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)$$

## Problema 52

Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + \int_0^t y(t - \tau)e^{-\tau} d\tau = \partial\tau; \quad y(0) = 0$$

### Antecedentes

- Álgebra: Trinomio cuadrado perfecto.

### Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.
- Ecuación integro-diferencial.
- Condición inicial.

### Solución

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación integro-diferencial

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(t-\tau)e^{-\tau}d\tau\right\} = \mathcal{L}\{\delta\tau\}$$

$$sY(s) - y(0) + Y(s)G(s) = 1$$

Sustituyendo  $y(0) = 0$  en la expresión anterior

$$sY(s) + Y(s)\frac{1}{s+1} = 1$$

Factorizando  $Y(s)$

$$Y(s)\left(s + \frac{1}{s+1}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad Y(s)\left(\frac{s^2 + s + 1}{s+1}\right) = 1$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

Completando el denominador para poder obtener la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2 + s + 1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + 1}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{s^2 + 2\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\}$$

Donde el traslado en el dominio de  $s$  implica que hay una exponencial en  $t$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + \frac{3}{4}} \right\} = e^{-\frac{t}{2}} \left[ \left( \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{3}{4}} \right\} \right) + \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \frac{3}{4}} \right\} \right) \right]$$

Completando la última transformada inversa

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{3}{4}} t \right) + \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{s^2 + \frac{3}{4}} \right\} \right) \right]$$

La solución de la ecuación integro-diferencial es

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$$

## Problema 53

Encuentre el valor de  $y(t)$  para la siguiente expresión

$$y' = \operatorname{sen}(t) - \int_0^t y(t) dt + u(t-1)$$

Si  $y(0) = 1$ . Además, considere la convolución

$$\operatorname{sen}(t) * \cos(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen}(t)$$

## Antecedentes

- Álgebra: Identidades trigonométricas.

## Conceptos básicos para destacar

- Transformada de Laplace.
- Transformada de una derivada.
- Teorema de convolución.
- Transformada inversa de Laplace.
- Ecuación integro-diferencial.
- Condición inicial.

## Solución

Aplicando la transformada de Laplace y sustituyendo las condiciones iniciales

$$sY(s) - 1 = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s}Y(s) + e^{-s}$$

Despejando  $Y(s)$

$$Y(s) \left( s + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-s} + 1 \rightarrow Y(s) \left( \frac{s^2 + 1}{s} \right) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-s} + 1$$

$$Y(s) = \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) \left( \frac{s}{s^2 + 1} \right) + \frac{e^{-s}s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}s}{s^2 + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\}$$

Para el primer término se considera

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)} \rightarrow f(t) = \text{sen}(t)$$

$$G(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)} \rightarrow g(t) = \cos(t)$$

Usando la convolución proporcionada en el problema

$$y(t) = \sin(t)\cos(t) + e^{-(t-1)}\cos(t-1)u(t-1) + \cos(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t\sin(t) + e^{-(t-1)}\cos(t-1)u(t-1) + \cos(t)$$

# TEMA 4

## Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

## Problema 1

Determine si la expresión

$$u(x, y) = F(x + y) + G(x - y)$$

es solución general de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones arbitrarias.

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables.  
Regla de la cadena.

### Concepto básico para destacar

- Solución general de la ecuación diferencial en derivadas parciales.

### Solución

Primero, se encuentran las derivadas parciales de la función  $u(x, y)$  que serán sustituidas en la ecuación en derivadas parciales del problema. Se consideran los siguientes cambios de variables para funciones  $F$  y  $G$ , respectivamente

$$v = x + y$$

$$w = x - y$$

Usando la regla de la cadena para la primera derivada parcial de la función  $u(x, y)$  respecto a la variable independiente  $x$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(v)}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial x} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} + \frac{\partial G(w)}{\partial w}$$

Obteniendo la segunda derivada parcial con respecto a  $x$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(v)}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 G(w)}{\partial w^2} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G(w)}{\partial w^2}$$

Se hace lo mismo para hallar la primera derivada parcial con respecto a  $y$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(v)}{\partial y} + \frac{\partial G(w)}{\partial y} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial G(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} + \frac{\partial G(w)}{\partial w}$$

Ahora para la segunda derivada parcial con respecto a  $y$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F(v)}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 G(w)}{\partial w^2} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G(w)}{\partial w^2}$$

Sustituyendo las derivadas parciales de segundo orden en la ecuación original

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G(w)}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}}$$

Finalmente, se verifica que la función  $u(x, y)$  es solución general de la ecuación en derivadas parciales.

## Problema 2

Determine si la expresión

$$u(x, y) = F(x^2 + y^2)$$

es solución general de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

donde  $F$  es una función arbitraria.

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables.  
Regla de la cadena.

### Concepto básico para destacar

- Solución general de la ecuación diferencial en derivadas parciales.

### Solución

Primero, se encuentran las derivadas parciales de la función  $u(x, y)$  que están involucradas en la ecuación en derivadas parciales y se considera la siguiente función para utilizar la regla de la cadena

$$w = x^2 + y^2$$

La primera derivada parcial de la función respecto a  $x$  es

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(w)}{\partial x} = \frac{\partial F(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(w)}{\partial w} 2x$$

Análogamente, la primera derivada parcial de  $u(x, y)$  respecto a  $y$  es

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(w)}{\partial y} = \frac{\partial F(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(w)}{\partial w} 2y$$

Sustituyendo las derivadas obtenidas en la ecuación en derivadas parciales

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = y \left( \frac{\partial F(w)}{\partial w} 2x \right) - x \left( \frac{\partial F(w)}{\partial w} 2y \right) = 0$$

Como se verifica la igualdad, la función  $u(x, y)$  es solución general.

### Problema 3

Sea  $F$  una función arbitraria, determine si

$$u(x, y) = (x + y)F(x^2 - y^2)$$

es solución de la ecuación en derivadas parciales de

$$u(x, y) - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

#### Antecedentes

- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables.  
Regla de la cadena.

#### Concepto básico para destacar

- Solución general de la ecuación diferencial en derivadas parciales.

### Solución

Para saber si  $u(x, y)$  es solución de la ecuación en derivadas parciales, tanto dicha función como sus respectivas derivadas deben satisfacer la igualdad. Obteniendo las derivadas parciales correspondientes usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = (x + y)F'(x^2 - y^2)(-2y) + F(x^2 - y^2)(1)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = (x + y)F'(x^2 - y^2)(2x) + F(x^2 - y^2)(1)$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la ecuación del problema

$$(x + y)F(x^2 - y^2) - x[(x + y)F'(x^2 - y^2)(-2y) + F(x^2 - y^2)] \\ - y[(x + y)F'(x^2 - y^2)(2x) + F(x^2 - y^2)] = 0$$

Simplificando

$$(x + y)F(x^2 - y^2) - x(x + y)(-2y)F'(x^2 - y^2) - xF(x^2 - y^2) \\ - y(x + y)(2x)F'(x^2 - y^2) - yF(x^2 - y^2) = 0 \\ (x + y)F(x^2 - y^2) - (x + y)F(x^2 - y^2) + 2xy(x + y)F'(x^2 - y^2) \\ - 2xy(x + y)F'(x^2 - y^2) = 0 \\ 0 = 0$$

Por lo tanto, se concluye que  $u(x, y)$  sí es solución de la ecuación en derivadas parciales.

## Problema 4

Obtenga la ecuación en derivadas parciales tal que la función

$$u(x, y) = F(x + y) + G(x^2)$$

sea su solución general.

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Obtención de la ecuación en derivadas parciales a partir de una función de varias variables.
- Función esencial y función arbitraria.
- Orden de una ecuación en derivadas parciales.

### Solución

Debido a que  $u(x, y)$  está formada por dos funciones arbitrarias, se obtendrá una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Por lo tanto, se analizan las derivadas parciales de las funciones  $F$  y  $G$  para encontrar una expresión que no las contenga

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = F'(x + y) + 2xG'(x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = F''(x + y) + 4x^2G''(x^2) + 2G'(x^2) \quad \dots (A)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = F''(x + y) \quad \dots (B)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [F'(x + y) + 2xG'(x^2)]$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = F''(x + y) \quad \dots (C)$$

Como se puede observar, las expresiones (B) y (C) son iguales del lado derecho de la igualdad. Al igualarlas, la ecuación en derivadas parciales que se obtiene es

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}}$$

## Problema 5

Determine la ecuación en derivadas parciales cuya solución general es

$$u(x, y) = F(x)e^{xy} + G(x)e^{-xy} + \frac{e^y}{1 - x^2}$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables.  
Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Obtención de la ecuación en derivadas parciales a partir de una función de varias variables.
- Función esencial y función arbitraria.
- Orden de una ecuación en derivadas parciales.

### Solución

La solución general tiene dos funciones arbitrarias que son  $F(x)$  y  $G(x)$ , por lo que se derivará parcialmente dos veces para encontrar una ecuación en derivadas

parciales de segundo orden. Además, para hacer más sencillo el cálculo, se obtendrá la segunda derivada con respecto a la variable  $y$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = xF(x)e^{xy} - xG(x)e^{-xy} + \frac{e^y}{1-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = x^2F(x)e^{xy} + x^2G(x)e^{-xy} + \frac{e^y}{1-x^2}$$

$$x^2(F(x)e^{xy} + G(x)e^{-xy}) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{e^y}{1-x^2}$$

Reescribiendo la solución general

$$F(x)e^{xy} + G(x)e^{-xy} = u(x, y) - \frac{e^y}{1-x^2}$$

Finalmente, se sustituye la solución general en la segunda derivada parcial obtenida y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 \left( u(x, y) - \frac{e^y}{1-x^2} \right) &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{e^y}{1-x^2} \\ \rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{e^y}{1-x^2} - x^2 \left( u(x, y) - \frac{e^y}{1-x^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - x^2 u(x, y) + \frac{e^y}{1-x^2} (x^2 - 1) = 0}$$

## Problema 6

Obtenga la ecuación diferencial en derivadas parciales cuya solución general es

$$u(x, y) = \text{sen}(y)F(x) + xG(y)$$

### Antecedentes

- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Regla de la cadena.

### Conceptos básicos para destacar

- Obtención de ecuaciones en derivadas parciales a partir de una función de varias variables.
- Función esencial y función arbitraria.

### Solución

Esta solución tiene dos funciones arbitrarias que son  $F(x)$  y  $G(y)$ , por lo que al obtener las derivadas parciales de  $u(x, y)$  se buscará una expresión que no contenga a estas funciones

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \text{sen}(y) F'(x) + G(y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \cos(y) F(x) + xG'(y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \cos(y) F'(x) + G'(y)$$

Despejando a  $F(x)$  y a  $G(y)$  de las expresiones anteriores y sustituyéndolas en la ecuación en derivadas parciales

$$G(y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \text{sen}(y) F'(x)$$

$$F(x) = \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - xG'(y) \right) \sec(y)$$

$$u(x, y) = \operatorname{sen}(y)\sec(y) \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - xG'(y) \right) + x \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \operatorname{sen}(y) F'(x) \right)$$

Multiplicando la expresión anterior por  $\cos(y)$  y agrupando términos

$$\cos(y) u(x, y) = \operatorname{sen}(y) \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - xG'(y) \right) + x\cos(y) \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \operatorname{sen}(y)F'(x) \right)$$

$$\begin{aligned} \cos(y) u(x, y) &= \operatorname{sen}(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + x\cos(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ &\quad - x\operatorname{sen}(y)(G'(y) + \cos(y) F'(x)) \end{aligned}$$

De donde el último término es la derivada parcial  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$

$$\cos(y) u(x, y) = \operatorname{sen}(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + x\cos(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x\operatorname{sen}(y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Finalmente,

$$\cos(y) u(x, y) - \operatorname{sen}(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - x\cos(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + x\operatorname{sen}(y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$$

## Problema 7

Determine una solución completa de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{x+y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Considere una constante de separación positiva.

## Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

## Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Solución completa.

## Solución

Primero, se propone la función  $u(x, y) = F(x)G(y)$  como solución de la ecuación en derivadas parciales. Luego, se obtienen las derivadas parciales correspondientes

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = F'(x)G(y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x)G'(y)$$

Por lo tanto, la ecuación dada en el problema queda como

$$F'(x)G(y) = e^x e^y = F(x)G'(y)$$

Al ordenar términos de la expresión anterior para separar variables se obtiene

$$\frac{F'(x)}{F(x)} e^{-x} = \frac{G'(y)}{G(y)} e^y$$

Considerando la constante de separación positiva ( $\alpha > 0$ )

$$\frac{F'(x)}{F(x)} e^{-x} = \frac{G'(y)}{G(y)} e^y = \alpha$$

Resolviendo la ecuación diferencial de primer orden que depende de la variable independiente  $x$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} e^{-x} = \alpha$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \alpha e^x \quad \rightarrow \quad \int \frac{dF(x)}{F(x)} = \alpha \int e^x dx$$

$$\ln(F(x)) = \alpha e^x + C$$

Utilizando propiedades de los logaritmos y de la constante de integración

$$F(x) = C_1 e^{\alpha e^x}$$

Para la ecuación diferencial de primer orden que depende de la variable independiente  $y$ , su resolución es

$$\frac{G'(y)}{G(y)} e^y = \alpha$$

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = \alpha e^{-y} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dG(y)}{G(y)} = \alpha \int e^{-y} dy$$

$$\ln(G(y)) = -\alpha e^{-y} + C$$

Nuevamente, se utilizan propiedades de los logaritmos y de la constante de integración

$$G(y) = C_2 e^{-\alpha e^{-y}}$$

La solución completa de la ecuación en derivadas parciales resulta ser

$$u(x, y) = (C_1 e^{\alpha e^x})(C_2 e^{-\alpha e^{-y}})$$

Finalmente, haciendo  $A = C_1 * C_2$  y simplificando

$$\boxed{u(x, y) = A e^{\alpha(e^x - e^{-y})}}$$

## Problema 8

Obtenga una solución completa de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Considere una constante de separación positiva (se sugiere  $\alpha^2 > 0$ ).

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de primer y segundo orden.
- Solución completa.

### Solución

Se propone la función  $u(x, y) = F(x)G(y)$  como solución de la ecuación en derivadas parciales y se obtienen las derivadas parciales correspondientes

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = F'(x)G(y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x)G'(y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = F(x)G''(y)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación en derivadas parciales

$$xF'(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

Al ordenar términos de la expresión anterior para separar variables se obtiene

$$x \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}$$

De considerar la constante de separación positiva ( $\alpha^2 > 0$ ) se tiene

$$x \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \alpha^2$$

Resolviendo la ecuación diferencial de primer orden que depende de la variable independiente  $x$

$$x \frac{F'(x)}{F(x)} = \alpha^2$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\alpha^2}{x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dF(x)}{F(x)} = \alpha^2 \int \frac{dx}{x}$$

Integrando para obtener la solución general

$$\ln(F(x)) = \alpha^2 \ln(x) + C$$

Simplificando, y usando propiedades de los logaritmos y de la constante de integración

$$\ln(F(x)) = \ln(x^{\alpha^2}) + C$$

$$F(x) = C_1 x^{\alpha^2}$$

Para la ecuación diferencial lineal de segundo orden y homogénea que depende de la variable independiente  $y$ , su resolución es

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \alpha^2 \quad \rightarrow \quad G''(y) = -\alpha^2 G(y)$$

$$G''(y) + \alpha^2 G(y) = 0$$

Cuya ecuación auxiliar resulta ser

$$m^2 + \alpha^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = -\alpha^2$$

Dado que las raíces son complejas, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden es

$$G(y) = C_2 \cos(\alpha y) + C_3 \sin(\alpha y)$$

La solución completa es

$$u(x, y) = (C_1 x^{\alpha^2})(C_2 \cos(\alpha y) + C_3 \sin(\alpha y))$$

Haciendo  $A = C_1 * C_2$  y  $B = C_1 * C_3$ , la solución completa de la ecuación en derivadas parciales queda como

$$u(x, y) = x^{\alpha^2} (A \cos(\alpha y) + B \sin(\alpha y))$$

## Problema 9

Obtenga una solución completa de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + u(x, y) = 0$$

Considere una constante de separación positiva (se sugiere  $\alpha > 0$ ).

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de primer orden.
- Solución completa.

### Solución

Proponiendo la función  $u(x, y) = F(x)G(y)$  como solución de la ecuación en derivadas parciales. Ahora, se obtienen la derivada parcial mixta

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x)G'(y) \rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = F'(x)G'(y)$$

Sustituyendo esta derivada parcial en la ecuación del problema

$$yF'(x)G'(y) + F(x)G(y) = 0$$

Agrupando términos

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{G(y)}{yG'(y)}$$

Al considerar la constante de separación positiva ( $\alpha > 0$ ) se tiene

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{G(y)}{yG'(y)} = \alpha$$

De esta forma, es posible plantear dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \alpha$$

$$-\frac{G(y)}{yG'(y)} = \alpha$$

Resolviendo la ecuación diferencial de primer orden de variable independiente  $x$

$$\int \frac{dF(x)}{F(x)} = \int \alpha dx \quad \rightarrow \quad \ln(F(x)) = \alpha x + C$$

Aplicando propiedades de los logaritmos y de la constante de integración para despejar a  $F(x)$

$$F(x) = C_1 e^{\alpha x}$$

Agrupando términos en la ecuación diferencial de primer orden que de variable independiente  $y$

$$\frac{G(y)}{G'(y)} = -\alpha y \quad \rightarrow \quad \int \frac{dG(y)}{G(y)} = -\frac{1}{\alpha} \int \frac{dy}{y}$$

Integrando

$$\ln(G(y)) = -\frac{1}{\alpha} \ln(y) + C$$

Recurriendo a algunas propiedades de los logaritmos y de la constante de integración para simplificar esta solución

$$G(y) = C_2 y^{-\frac{1}{\alpha}}$$

La solución completa de la ecuación en diferencias parciales es

$$u(x, y) = (C_1 e^{\alpha x}) \left( C_2 y^{-\frac{1}{\alpha}} \right)$$

Haciendo  $A = C_1 * C_2$  se obtiene

$$\boxed{u(x, y) = A e^{\alpha x} y^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

## Problema 10

Determine, mediante el método de separación de variables, una solución completa de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} + 2xu(x, y) = 0$$

Considere una constante de separación positiva.

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de primer orden.
- Solución completa.

### Solución

Se propone a  $u(x, y)$  como la solución de la ecuación en derivadas parciales y la cual es un producto de dos funciones, una que depende de  $x$  y la otra únicamente de  $y$ , es decir

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

Como la ecuación en derivadas parciales contiene una derivada parcial mixta, entonces la función  $u(x, y)$  queda como

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x)G'(y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = F'(x)G'(y)$$

Sustituyendo valores en la ecuación dada en el problema

$$F'(x)G'(y) + 2xF(x)G(y) = 0$$

Separando variables

$$F'(x)G'(y) = -2xF(x)G(y) \quad \rightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = -2x \frac{G(y)}{G'(y)}$$

$$\frac{1}{x} \frac{F'(x)}{F(x)} = -2 \frac{G(y)}{G'(y)}$$

Del enunciado del problema, se igualan las expresiones anteriores a una constante de separación positiva

$$\frac{1}{x} \frac{F'(x)}{F(x)} = -2 \frac{G(y)}{G'(y)} = \alpha$$

De esta forma se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Encontrando la solución correspondiente a la función que depende  $x$ , la cual es una ecuación de variables separables

$$\frac{1}{x} \frac{F'(x)}{F(x)} = \alpha \quad \rightarrow \quad \int \frac{dF(x)}{F(x)} = \alpha \int x dx$$

$$\ln(F(x)) = \alpha \frac{x^2}{2} + C$$

Esta solución puede simplificarse empleando propiedades de los logaritmos y de la constante de separación arbitraria

$$F(x) = C_1 e^{\frac{\alpha x^2}{2}}$$

Resolviendo para la función que depende de la variable independiente  $y$

$$-2 \frac{G(y)}{G'(y)} = \alpha \quad \rightarrow \quad \int \frac{dG(y)}{G(y)} = -\frac{2}{\alpha} \int dy$$

$$\ln(G(y)) = -\frac{2}{\alpha} y + C \quad \rightarrow \quad G(y) = C_2 e^{-\frac{2y}{\alpha}}$$

Por lo tanto, la solución completa de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(x, y) = \left( C_1 e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \right) \left( C_2 e^{-\frac{2y}{\alpha}} \right)$$

Haciendo  $A = C_1 * C_2$  y usando propiedades de las funciones exponenciales

$$u(x, y) = A e^{\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{2y}{\alpha}}$$

## Problema 11

Determine mediante el método de separación de variables una solución completa de la ecuación en derivadas parciales

$$7 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^2 \partial x}$$

Considere una constante de separación  $\alpha = 3$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de segundo orden.
- Solución completa.

### Solución

Se propone como solución de la ecuación en derivadas parciales a  $u(x, y)$  que es un producto de dos funciones, una que dependa solo de  $x$  y la otra únicamente de  $y$ . Esto es

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

Obteniendo las derivadas mixtas al sustituir en la ecuación del problema

$$\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = F''(x)G'(y)$$

$$\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^2 \partial x} = F'(x)G''(y)$$

De esta forma, la ecuación en derivadas parciales queda como

$$7F''(x)G'(y) = 3F'(x)G''(y)$$

Separando variables

$$7 \frac{F''(x)}{F'(x)} = 3 \frac{G''(y)}{G'(y)}$$

Igualando ambos lados de la expresión con la constante de separación  $\alpha = 3$

$$7 \frac{F''(x)}{F'(x)} = 3$$

$$3 \frac{G''(y)}{G'(y)} = 3$$

Resolviendo para la función  $F(x)$

$$7 \frac{F''(x)}{F'(x)} = 3 \quad \rightarrow \quad 7F''(x) = 3F'(x)$$

$$7F''(x) - 3F'(x) = 0$$

La ecuación diferencial resultante es ordinaria y de segundo orden, la cual se puede resolver fácilmente con ayuda del operador derivada

$$7F''(x) - 3F'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad (7D^2 - 3D)F(x) = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$7m^2 - 3m = 0 \quad \rightarrow \quad m(7m - 3) = 0$$

Los valores de  $m$  son

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{3}{7}$$

Como las raíces de la ecuación auxiliar son reales y diferentes, la solución para  $F(x)$  es

$$F(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{3}{7}x}$$

Por otro lado, resolviendo para  $G(y)$

$$3 \frac{G''(y)}{G'(y)} = 3 \quad \rightarrow \quad 3G''(y) = 3G'(y)$$

$$3G''(y) - 3G'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad G''(y) - G'(y) = 0$$

Nuevamente, se tiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Obteniendo su ecuación auxiliar

$$(D^2 - D)G(y) = 0$$

$$m^2 - m = 0 \quad \rightarrow \quad m(m - 1) = 0$$

Los valores de  $m$  son

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1$$

Las raíces son reales y diferentes entre sí, por lo que la solución es de la forma

$$G(y) = C_3 + C_4 e^y$$

La solución completa de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(x, y) = (C_1 + C_2 e^{\frac{3}{7}x})(C_3 + C_4 e^y)$$

Haciendo  $A = C_1 * C_3$ ,  $B = C_1 * C_4$ ,  $C = C_2 * C_3$  y  $D = C_2 * C_4$  y simplificando en la solución completa

$$u(x, y) = A + B e^y + C e^{\frac{3}{7}x} + D e^{\frac{3}{7}x+y}$$

## Problema 12

Resuelva la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = u(x, y)$$

para una constante de separación negativa.

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos. Números complejos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.

- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de primer orden.
- Solución completa.

### Solución

Proponiendo a  $u(x, y)$  como solución de la ecuación en derivadas parciales la cual está compuesta por dos funciones

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

Obteniendo las derivadas parciales de  $u(x, y)$  de acuerdo con la ecuación del problema

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = F'(x)G(y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = F''(x)G(y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x)G'(y)$$

Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales y acomodando términos

$$F''(x)G(y) + yF(x)G'(y) = F(x)G(y)$$

$$\rightarrow F''(x)G(y) + F(x)(yG'(y) - G(y)) = 0$$

Agrupando términos para poder utilizar el método de variables separables e igualando a una constante de integración negativa

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{yG'(y) - G(y)}{G(y)} = -\alpha^2$$

Resolviendo primero para  $F(x)$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\alpha^2 \quad \rightarrow \quad F''(x) = -\alpha^2 F(x)$$

$$F''(x) + \alpha^2 F(x) = 0$$

Como se trata de una ecuación diferencial lineal, de segundo orden y homogénea se obtiene su ecuación auxiliar

$$(D^2 + \alpha^2)F(x) = 0$$

$$m^2 + \alpha^2 = 0$$

Donde los valores de  $m$  son un par de raíces complejas conjugadas, por lo que la solución de  $F(x)$  es

$$F(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$$

Para  $G(y)$

$$\frac{yG'(y) - G(y)}{G(y)} = -\alpha^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dG(y)}{G(y)} + (\alpha^2 - 1)\frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \frac{dG(y)}{G(y)} + (\alpha^2 - 1) \int \frac{dy}{y} = 0$$

Integrando

$$\ln(G(y)) + (\alpha^2 - 1)\ln(y) = C$$

Haciendo uso de algunas propiedades de los logaritmos y de la constante de integración arbitraria

$$\ln(G(y)) + (\alpha^2 - 1)\ln(y) = \ln(C) \quad \rightarrow \quad \ln(G(y)) + \ln(y^{\alpha^2-1}) = \ln(C)$$

$$G(y)y^{(\alpha^2-1)} = C \quad \rightarrow \quad G(y) = C_3 y^{(1-\alpha^2)}$$

Por último, la solución completa de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(x, y) = (C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha x))(C_3 y^{(1-\alpha^2)})$$

Haciendo  $A = C_1 * C_3$  y  $B = C_2 * C_3$

$$\boxed{u(x, y) = (A \cos(\alpha x) + B \operatorname{sen}(\alpha x))y^{(1-\alpha^2)}}$$

## Problema 13

Utilice el método de separación de variables para hallar, si es posible, una solución producto para la ecuación en derivadas parciales

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad k > 0$$

con la constante de separación negativa:  $\lambda = -1$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos. Números complejos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de segundo orden.
- Solución completa.

### Solución

Se plantea la siguiente solución conformada por el producto de las funciones  $F(x)$  y  $G(t)$

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Después, se obtienen las derivadas parciales de  $u(x, t)$  que se sustituirán en la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = F'(x)G(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = F(x)G'(t)$$

La ecuación en derivadas parciales queda como

$$kF''(x)G(t) - F(x)G(t) = F(x)G'(t)$$

Reagrupando términos

$$kF''(x)G(t) = F(x)G'(t) + F(x)G(t) \rightarrow kF''(x)G(t) = F(x)(G'(t) + G(t))$$

$$k \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t) + G(t)}{G(t)}$$

Se procede a la separación de variables y se iguala con la constante de separación  $\lambda = -1$

$$k \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t) + G(t)}{G(t)} = -1$$

Resolviendo para  $F(x)$

$$k \frac{F''(x)}{F(x)} = -1 \rightarrow kF''(x) + F(x) = 0$$

Como se obtienen una ecuación diferencial lineal de segundo orden, es posible obtener su solución a partir de una ecuación auxiliar

$$k(D^2 + 1)F(x) = 0$$

$$km^2 + 1 = 0$$

Los valores de  $m$  son

$$m_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}i$$

A partir de los valores de  $m$  se tiene que la solución homogénea de  $F(x)$  es

$$F(x) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k}}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}x\right)$$

Ahora para  $G(t)$

$$\frac{G'(t) + G(t)}{G(t)} = -1$$

Reescribiendo la ecuación

$$G'(t) + G(t) = -G(t) \rightarrow G'(t) + 2G(t) = 0$$

La cual es una ecuación diferencial lineal de segunda orden, homogénea y de coeficientes constantes. Por lo tanto, se puede encontrar su solución a partir de una ecuación auxiliar. Primero, expresando a la ecuación en términos del operador diferencial

$$(D + 2)G(t) = 0$$

Donde la ecuación auxiliar y su solución son

$$m + 2 = 0 \rightarrow m = -2$$

La solución de  $G(t)$  es

$$G(t) = C_3 e^{-2t}$$

La solución producto  $u(x, t) = F(x)G(t)$  de la ecuación diferencial parcial es

$$u(x, t) = \left( C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k}}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}x\right) \right) (C_3 e^{-2t})$$

Haciendo  $C_1 * C_3 = A$  y  $C_2 * C_3 = B$

$$u(x, t) = \left( A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k}}x\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}x\right) \right) e^{-2t}$$

## Problema 14

Utilice el método de separación de variables para resolver la ecuación en derivadas parciales dada

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

con la constante de separación  $\lambda = 1$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales.
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de primer orden.
- Solución completa.

### Solución

Se plantea a  $u(x, y) = F(x)G(y)$  como solución de la ecuación en derivadas parciales. A continuación, se obtienen las derivadas parciales correspondientes de la función  $u(x, y)$  que se sustituirán en la ecuación del problema

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = F'(x)G(y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(x)G'(y)$$

Al sustituir en la ecuación en derivadas parciales se tiene

$$yF'(x)G(y) + xF(x)G'(y) = 0$$

Haciendo la separación de variables

$$\frac{F'(x)}{xF(x)} = -\frac{G'(y)}{yG(y)}$$

Igualando con la constante de separación  $\lambda = 1$

$$\frac{F'(x)}{xF(x)} = -\frac{G'(y)}{yG(y)} = 1$$

Se procede a resolver para  $F(x)$

$$\frac{F'(x)}{xF(x)} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = x$$

$$\text{como } F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

entonces se tiene

$$\int \frac{dF(x)}{F(x)} = \int x dx$$

Integrando

$$\ln(F(x)) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Usando propiedades de los logaritmos y de la constante arbitraria de integración para simplificar la solución general

$$F(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} e^C \quad \rightarrow \quad F(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Ahora, obteniendo  $G(y)$

$$-\frac{G'(y)}{yG(y)} = 1$$

Reacomodando términos

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = -y \rightarrow \int \frac{dG(y)}{G(y)} = - \int y dy$$

Al integrar se tiene que la solución general es

$$\ln(G(y)) = -\frac{1}{2}y^2 + C$$

Usando propiedades de los logaritmos y de la constante arbitraria de integración

$$G(y) = C_2 e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Entonces la solución producto  $u(x, y) = F(x)G(y)$  de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(x, y) = \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}\right) \left(C_2 e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)$$

Haciendo  $C_1 * C_2 = A$  para simplificar la solución completa

$$u(x, y) = A e^{\frac{1}{2}(x^2 - y^2)}$$

## Problema 15

Resuelva la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{du(x, t)}{dt} = 3 \frac{d^2u(x, t)}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$$

para una constante de separación negativa (se sugiere  $\alpha^2 < 0$ ). Asimismo, encuentre la solución que satisface las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 4\text{sen}(x)$$

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Derivada parcial de una función de varias variables. Integración inmediata. Constante de integración.

### Conceptos básicos para destacar

- Ecuación en derivadas parciales
- Método de separación de variables.
- Constante de separación.
- Ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y de primer orden.
- Solución completa.

### Solución

Se plantea a la función  $u(x, t) = F(x)G(t)$  como solución de la ecuación en derivadas parciales y se obtienen sus correspondientes derivadas parciales

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = F'(x)G(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = F(x)G'(t)$$

Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales

$$F(x)G'(t) = 3F''(x)G(t)$$

Como la ecuación resultante puede resolverse empleando el método de variables separables, se agrupan términos y se iguala a la constante de separación  $\alpha^2 < 0$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{3G(t)} = -\alpha^2$$

Resolviendo la ecuación diferencial que depende de la variable  $x$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\alpha^2 \quad \rightarrow \quad F''(x) = -\alpha^2 F(x)$$

$$F''(x) + \alpha^2 F(x) = 0$$

Como se trata de una ecuación diferencial lineal, homogénea y de segundo orden; puede ser expresada en términos de su operador diferencial y así obtener su ecuación auxiliar

$$(D^2 + \alpha^2)F(x) = 0$$

$$m^2 + \alpha^2 = 0$$

Dado que la solución de la ecuación auxiliar es un par conjugado de raíces complejas, la solución queda como

$$F(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$$

Ahora, para la ecuación diferencial que depende de la variable  $y$

$$\frac{G'(t)}{3G(t)} = -\alpha^2 \quad \rightarrow \quad \int \frac{dG(t)}{G(t)} = -3\alpha^2 \int dt$$

$$\ln(G(t)) = -3\alpha^2 t + C$$

Aplicando propiedades de los logaritmos y de la constante de integración para despejar a la variable  $G(t)$

$$G(t) = C_3 e^{-3\alpha^2 t}$$

La solución completa de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha x)] [C_3 e^{-3\alpha^2 t}]$$

Aplicando la condición de frontera  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0$$

$$[C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0)] C_3 e^{-3\alpha^2 t} = 0 \quad \rightarrow \quad [C_1(1) + C_2(0)] C_3 e^{-3\alpha^2 t} = 0$$

$$C_1 e^{-\alpha^2 t} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Ahora, para la condición de frontera  $u(\pi, t) = 0$

$$u(\pi, t) = F(\pi)G(t) = 0$$

$$[C_1 \cos(\alpha\pi) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha\pi)] C_3 e^{-3\alpha^2 t} = 0$$

De la condición de frontera anterior se obtuvo que  $C_1 = 0$ . Para que  $C_2$  sea distinto de cero, entonces  $\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0$ . Haciendo  $\alpha = n$  y  $C_2 * C_3 = C_n$

$$u(x, t) = C_n \operatorname{sen}(n\pi) e^{-3n^2 t}$$

Proponiendo la sumatoria

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

Sustituyendo valores

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi) e^{-3n^2 t}$$

Aplicando  $u(x, t) = 4\text{sen}(t)$

$$4\text{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}(nx) e^{-3n^2 t} = C_1 \text{sen}(x) e^{-3t} + C_2 \text{sen}(2x) e^{-3(2)^2 t} + \dots$$

De donde  $C_1 = 4$

$$u(x, t) = 4\text{sen}(x) e^{-3t}$$

## Problema 16

Obtenga los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = -x$$

en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Identidades trigonométricas.
- Cálculo Diferencial: Funciones pares e impares.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida. Integración por partes. Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Serie trigonométrica de Fourier.
- Serie seno de Fourier.

### Solución

La serie trigonométrica de Fourier está dada por la expresión

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

La función  $f(x)$  del problema es una función impar dado que cumple con la propiedad  $f(-a) = -f(a)$ , lo que significa que los coeficientes  $a_0$  y  $a_n$  sean cero. Por lo que se usará la serie seno de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Donde el coeficiente  $b_n$  de la serie se obtiene con la expresión

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Dado que  $f(x) = -x$  y  $L = \pi$ , el coeficiente  $b_n$  se expresa como

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx$$

La integral definida se resuelve con el método de integración por partes

$$I = uv - \int v du$$

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(nx) dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$$

Al sustituir términos

$$I = -\frac{x}{n} \cos(nx) + \int \frac{1}{n} \cos(nx) dx$$

Al desarrollar la integral por partes con los valores de integración se obtiene

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{\pi} \left[ \left( -\frac{x}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right] \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{n} \cos(nx) + \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^\pi \right] \end{aligned}$$

Dado que

$$\left( \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^\pi = 0$$

Entonces, el coeficiente  $b_n$  es

$$b_n = \frac{2}{n} \cos(\pi x)$$

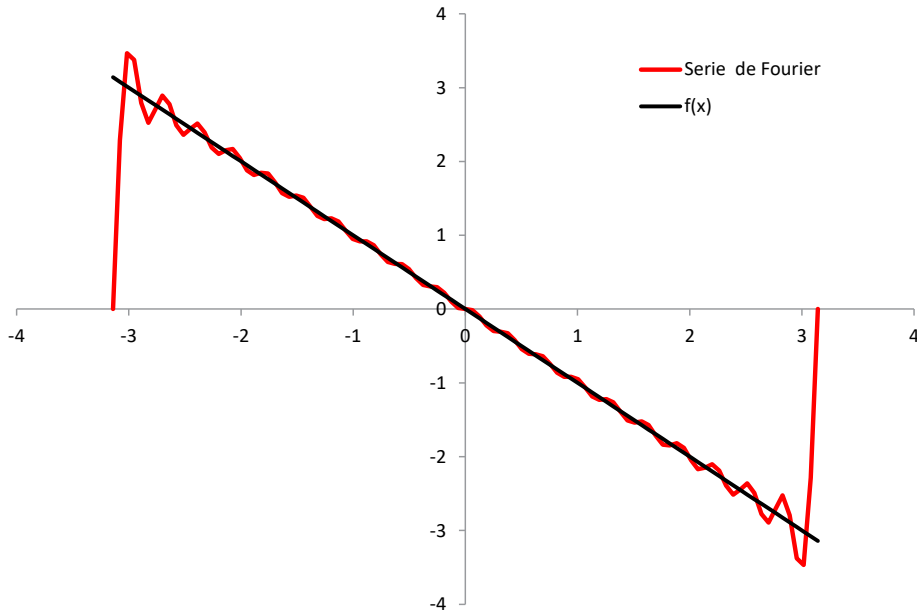
O bien, al aplicar una identidad trigonométrica, se puede escribir como

$$b_n = \frac{2}{n} (-1)^n$$

Finalmente, la serie seno de Fourier de la función es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^n \operatorname{sen}(nx)$$

En la siguiente gráfica se puede observar una aproximación a la función dada con los primeros 20 coeficientes de la serie de Fourier.



## Problema 17

Obtenga los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2$$

en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

### Antecedentes

- Álgebra: Identidades trigonométricas.
- Cálculo Diferencial: Funciones pares e impares.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración por partes. Integración inmediata.  
Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Serie trigonométrica de Fourier.
- Serie coseno de Fourier.

### Solución

La serie trigonométrica de Fourier está dada por la expresión

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

La función  $f(x)$  es una función par ya que cumple con la propiedad  $f(-a) = f(a)$ . Por lo tanto, el coeficiente  $b_n$  será igual a cero y la serie de Fourier se reduce a una serie coseno

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Donde los coeficientes  $a_0$  y  $a_n$  de la serie se obtienen con las expresiones

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Con  $L = \pi$  como el semiperiodo, el coeficiente  $a_0$  queda como

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] dx$$

Resolviendo la integral definida

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{1}{3\pi^2} x^3\right) \Big|_0^{\pi} = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$a_0 = \frac{4}{3}$$

Ahora, para el coeficiente  $a_n$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\pi} \right)^2 \right] \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx - \frac{2}{\pi^3} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) \, dx$$

Donde la primera integral definida se resuelve con un cambio de variable

$$a_n = \left( \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^3} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) \, dx$$

Debido a que

$$\left( \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} = 0$$

El coeficiente  $a_n$  se reduce a

$$a_n = -\frac{2}{\pi^3} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$a_n = -\frac{2}{\pi^3} \left[ \left( \frac{x^2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx \right]$$

Donde nuevamente

$$\left( \frac{x^2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} = 0$$

Por lo tanto,  $a_n$  queda como

$$a_n = \frac{4}{n\pi^3} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx$$

Aplicando nuevamente integración por partes

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{n\pi^3} \left[ \left( -\frac{\pi}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right] \\
 &= \frac{4}{n\pi^3} \left[ \left( -\frac{\pi}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^\pi \right] \\
 a_n &= -\frac{4}{n^2\pi^2} \cos(nx)
 \end{aligned}$$

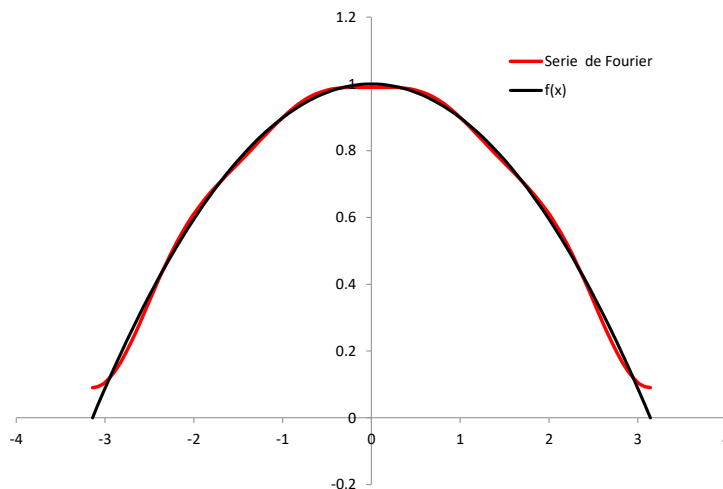
Empleando una identidad trigonométrica y simplificando el coeficiente  $a_n$

$$a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n = -\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (-1)^n$$

Finalmente, la serie coseno de Fourier de la función dada es

$$f(x) = \frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (-1)^n \cos(nx)$$

En la siguiente gráfica se puede observar una aproximación a la función dada con los primeros 4 coeficientes de la serie de Fourier.



## Problema 18

Obtenga la serie de Fourier de la función siguiente

$$f(x) = x$$

En el intervalo  $-2 < x < 2$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Funciones pares e impares
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.
- Integración por partes. Integración inmediata.
- Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Serie seno de Fourier.

### Solución

La función  $f(x)$  es impar porque cumple con la propiedad  $f(-a) = -f(a)$ . Por lo tanto, se procede a obtener la serie seno de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Donde el coeficiente  $b_n$  de la serie se obtiene con la expresión

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Se calcula el coeficiente  $b_n$  con  $L = 2$  y  $f(x) = x$  esto es

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Para la integral definida se usará el método de integración por partes

$$I = uv - \int vdu$$

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx, \quad v = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{2}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right) \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left(-\frac{2}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right) \Big|_0^2 \end{aligned}$$

Al evaluar la integral y simplificando

$$b_n = -\frac{4}{n\pi} (-1)^n = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

Al sustituir el coeficiente  $b_n$  en la función  $f(x)$  de la serie seno de Fourier se obtiene

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

## Problema 19

Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes. Funciones par e impar.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración inmediata. Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Serie trigonométrica de Fourier.

### Solución

La serie completa de Fourier se obtiene de la expresión

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

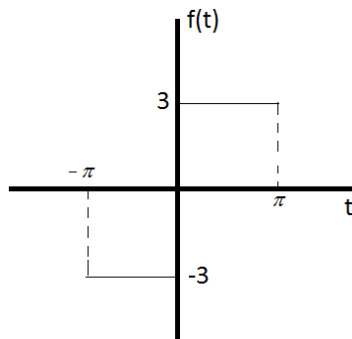
Sin embargo, como la función  $f(x)$  es impar entonces  $a_0 = 0$  y  $a_n = 0$ . La serie de Fourier queda definida como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

que es la serie seno de Fourier; para obtener  $b_n$  se utiliza la expresión

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

Para el valor de  $L$  (que es el semiperiodo) se analiza la gráfica



Así como el periodo va de  $-\pi$  a  $\pi$ , se emplea una propiedad de la integral definida para establecer que  $L = \pi$  sustituyendo  $f(x) = 3$  y  $L = \pi$  en la serie seno

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{6}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(nx) dx$$

$$b_n = \left[ \left(\frac{6}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{n}\right) \cos(nx) \right]_0^\pi = \left(-\frac{6}{n\pi}\right) [ -(-1)^n + 1 ]$$

$$b_n = \left(\frac{6}{n\pi}\right) [(-1)^n + 1]$$

Por lo tanto, la función  $f(x)$  queda expresada como

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n} \right) \operatorname{sen}(nx)$$

## Problema 20

Obtenga la serie coseno de Fourier de

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq L$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Funciones pares e impares
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración inmediata. Integración por partes.  
Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Serie coseno de Fourier.

**Solución**

La serie coseno de Fourier está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Donde los coeficientes  $a_0$  y  $a_n$  de la serie se obtienen de las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

Del intervalo del problema  $-p = 0$ ,  $p = L$  y  $f(x) = x$ . Sustituyendo estos valores en  $a_0$  y resolviendo la integral definida resultante

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{2}{L} \int_0^L x dx$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^L = \frac{2}{L} \left(\frac{L^2}{2}\right)$$

$$a_0 = L$$

Ahora, sustituyendo para  $a_n$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{n\pi x}{L}, \quad du = \frac{n\pi}{L} dx$$

Empleando propiedades de la integral definida para reagrupar las constantes

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \cos(u) du$$

La nueva integral se resuelve por integración por partes

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[ (u \operatorname{sen}(u)) \Big|_0^{n\pi} - \int_u^{n\pi} \operatorname{sen}(u) du \right]$$

Como  $(u \operatorname{sen}(u)) \Big|_0^{n\pi} = 0$

$$a_n = \left( \frac{2L}{n^2\pi^2} \cos(u) \right) \Big|_0^{n\pi} = \frac{2L}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$

Sustituyendo el valor de las constantes  $a_0$  y  $a_n$  en la serie coseno de Fourier

$$f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

## Problema 21

Obtenga la serie seno de Fourier de

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq L$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Funciones pares e impares.
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración inmediata. Integración por partes.  
Integración por cambio de variable.

## Concepto básico para destacar

- Serie seno de Fourier.

## Solución

La serie seno de Fourier está definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Donde el coeficiente  $b_n$  es

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

Del intervalo del problema  $-p = 0$ ,  $p = L$ . Sustituyendo estos valores en  $a_0$  y resolviendo la integral definida resultante

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Realizando el siguiente de variable

$$u = \frac{n\pi x}{L}, \quad du = \frac{n\pi}{L} dx$$

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \operatorname{sen}(u) du$$

Usando integración por partes

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[ (-u \cos(u)) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(u) du \right] = \frac{2L}{n^2\pi^2} (-u \cos(u) + \operatorname{sen}(u)) \Big|_0^{n\pi}$$

Como  $(\operatorname{sen}(u))\Big|_0^{n\pi} = 0$

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} [-n\pi(-1)^n] = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

Al sustituir el valor del coeficiente  $b_n$  en la serie seno de Fourier esta queda como

$$f(x) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

## Problema 22

Obtener la serie de Fourier de la función siguiente

$$f(x) = \pi^2 - x^2$$

en el intervalo abierto  $-\pi < x < \pi$ .

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Funciones pares e impares
- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración inmediata. Integración por partes.  
Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Serie coseno de Fourier.

### Solución

La función  $f(x)$  es par en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  por lo que se usa la serie de cosenos de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

El coeficiente  $a_0$  se calcula

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

Donde  $L$  es el semiperiodo que va de 0 a  $\pi$ . Sustituyendo valores

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx \right] = \frac{2}{\pi} \left( \pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{4}{3} \pi^2$$

El coeficiente  $a_n$  se calcula del siguiente modo

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Sustituyendo valores

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right]$$

Usando una propiedad de linealidad de la integral definida

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \pi^2 \int_0^{\pi} \cos(nx) dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \pi^2 \left( \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right] \end{aligned}$$

Como

$$\left( \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} = 0$$

Entonces  $a_n$  se reduce a

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

Para esta integral se usa integración por partes

$$I = uv - \int vdu$$

$$u = x^2, \quad dv = \cos(nx) \, dx$$

$$du = 2x \, dx, \quad v = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

$$I = \frac{x^2}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{2}{n} \int x \operatorname{sen}(nx) \, dx$$

Utilizando nuevamente integración por partes

$$u = x, \quad dv = \operatorname{sen}(nx) \, dx$$

$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$$

$$I = \frac{x^2}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{2}{n} \left( -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx) \, dx \right)$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{x^2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^\pi + \left( \frac{2x}{n^2} \cos(nx) \right) \Big|_0^\pi - \frac{2}{n^2} \int_0^\pi \cos(nx) \, dx \right]$$

Como

$$\left( \frac{x^2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^\pi = 0$$

Entonces

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{2x}{n^2} \cos(nx) \right) \Big|_0^\pi - \frac{2}{n^3} (\operatorname{sen}(nx)) \Big|_0^\pi \right]$$

Como

$$-\frac{2}{n^3}(\operatorname{sen}(nx))\Big|_0^\pi = 0$$

Entonces

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{2x}{n^2} \cos(nx) \right) \Big|_0^\pi \right] = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{2\pi}{n^2} \cos(\pi n) \right)$$

$$a_n = -\frac{4}{n^2} \cos(\pi n) = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}$$

De tal forma que al sustituir  $a_0$  y  $a_n$ , la serie que se aproxima a la función inicial es

$$f(x) = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)$$

Entonces, la serie de coseno de Fourier queda como

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$$

## Problema 23

Obtenga los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi; & -\pi \leq x < 0 \\ 0; & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

### Antecedentes

- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.  
Funciones pares e impares.

- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración por partes. Integración inmediata.  
Integración por cambio de variable.

### Concepto básico para destacar

- Serie trigonométrica de Fourier.

### Solución

La función dada no es función tipo par o impar, por lo que se obtiene la serie completa de Fourier dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  de la serie son

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

El dominio de la función  $f(x) = x + \pi$  va de 0 a  $\pi$ , por lo que se plantean los coeficientes de la serie como las siguientes integrales

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \operatorname{sen}(nx) dx$$

Ahora, resolviendo la integral del coeficiente  $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{x^2}{2} + \pi x \right) \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{2} - \pi^2 \right)$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Para el coeficiente  $a_n$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos(nx) dx$$

Donde la integral se resuelve por partes

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{(x + \pi)}{n} \operatorname{sen}(nx) \right] \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(nx) dx \right\}$$

Debido a que

$$\frac{(x + \pi)}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^0 = 0$$

El coeficiente  $a_n$  se reduce a

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(nx) dx = \left( \frac{1}{\pi n^2} \cos(nx) \right) \Big|_{-\pi}^0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} (1 - \cos(-\pi n))$$

Haciendo uso de una identidad trigonométrica

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} [1 - (-1)^n]$$

Resolviendo el coeficiente  $b_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \operatorname{sen}(nx) dx$$

Utilizando integración por partes

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{(x + \pi)}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{(x + \pi)}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^0 \right\} \end{aligned}$$

Debido a que

$$\left( \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_{-\pi}^0 = 0$$

Entonces solo se evalúa la primera solución de la integral

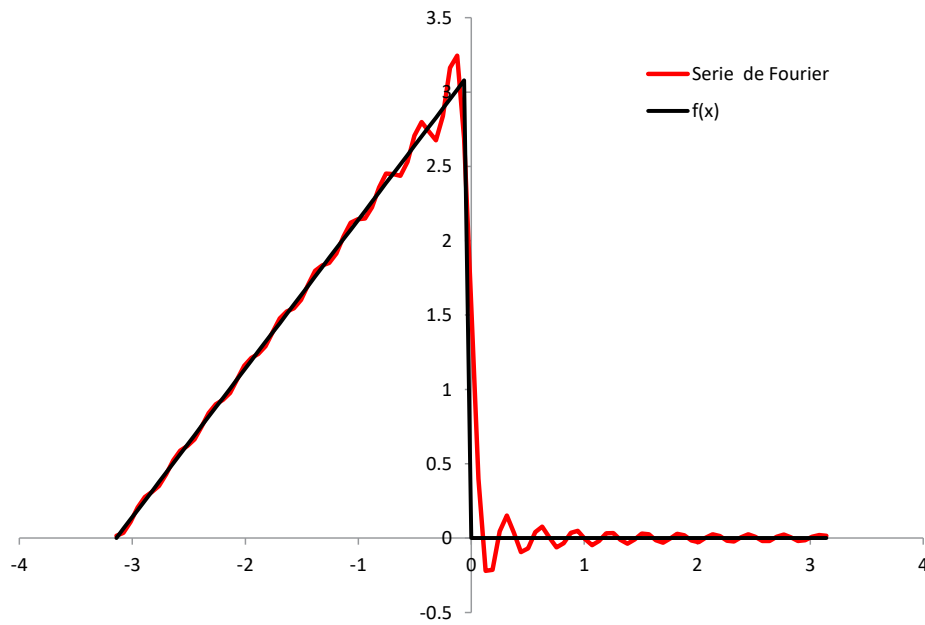
$$\left[ -\frac{(x + \pi)}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 = \left( -\frac{\pi}{n} \cos(0) \right) - \left[ -\frac{(-\pi + \pi)}{n} \cos(-\pi n) \right] = -\frac{\pi}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{n} \right) = -\frac{1}{n}$$

Finalmente, la serie de Fourier para la función dada es

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\pi n^2} \cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

En la siguiente gráfica se puede observar una aproximación a la función dada con los primeros 20 coeficientes de la serie completa de Fourier



## Problema 24

Obtenga la serie de Fourier de la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \cos(x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

### Antecedentes

- Álgebra: Identidades trigonométricas.
- Cálculo Diferencial: Función definida por partes.  
Funciones pares e impares.

- Cálculo Integral: Propiedades de la integral definida.  
Integración por partes. Integración inmediata.  
Integración por cambio de variable.

### Conceptos básicos para destacar

- Serie trigonométrica de Fourier.
- Serie coseno de Fourier.
- Serie seno de Fourier.

### Solución

Dado que la función  $f(x)$  no es impar ni par, se procede a obtener la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

El coeficiente  $a_0$  se calcula de la siguiente manera

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \right) = \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}$$

Para el coeficiente  $a_n$  se procede

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(2nx) dx$$

Usando la siguiente identidad trigonométrica para poder resolver la integral definida

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} (\cos(A - B) + \cos(A + B))$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos(x - 2nx) + \cos(x + 2nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((1 - 2n)x) + \cos((1 + 2n)x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{1 - 2n} \right) \operatorname{sen}((1 - 2n)x) + \left( \frac{1}{1 + 2n} \right) \operatorname{sen}((1 + 2n)x) \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1 - 2n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \pi n\right) + \frac{1}{1 + 2n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \right)$$

Simplificando la primera función seno con una identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}(A) \cos(B) - \cos(A) \operatorname{sen}(B)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \pi n\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\pi n) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\pi n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Análogamente, empleando otra identidad trigonométrica para la segunda función seno

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A) \cos(B) + \cos(A) \operatorname{sen}(B)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\pi n) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\pi n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

El coeficiente  $a_n$  queda como

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1 - 2n} (-1)^n + \frac{1}{1 + 2n} (-1)^n \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(1 + 2n) + (1 - 2n)}{(1 - 2n)(1 + 2n)} (-1)^n \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1-2n} (-1)^n + \frac{1}{1+2n} (-1)^n \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(1+2n)(-1)^n + (1-2n)(-1)^n}{(1-2n)(1+2n)} \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1-2n} (-1)^n + \frac{1}{1+2n} (-1)^n \right] = \frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \right)$$

Ahora, para el coeficiente impar  $b_n$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{p} \right) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} \right) dx \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \operatorname{sen}(2nx) dx \right)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos(A) \operatorname{sen}(B) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B))$$

$$\cos(x) \operatorname{sen}(2nx) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x+2nx) - \operatorname{sen}(x-2nx))$$

Resolviendo la integral definida

$$b_n = \left( \frac{2}{\pi} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(1+2n)x - \operatorname{sen}(1-2n)x) dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{1+2n} \cos(1+2n)x + \frac{1}{1-2n} \cos(1-2n)x \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{1+2n} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) - 1 \right) + \frac{1}{1-2n} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - n\pi \right) - 1 \right) \right]$$

Empleando las identidades trigonométricas para simplificar el resultado del coeficiente  $b_n$

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(n\pi)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(n\pi)$$

Simplificando

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{1+2n} (-1) + \frac{1}{1-2n} (-1) \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-(1-2n)(-1) + (1+2n)(-1)}{(1+2n)(1-2n)} \right]$$

En síntesis, el coeficiente buscado es

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)4n}{1-4n^2} \right)$$

Ahora, sustituyendo  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  en la serie trigonométrica de Fourier

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)4n}{1-4n^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \right) \cos(2nx) + \left( \frac{-2n}{1-4n^2} \right) \operatorname{sen}(2nx) \right]$$

ÍNDICE

TEMA 1

TEMA 2

TEMA 3

TEMA 4

APLICACIONES

# Aplicaciones

## EJEMPLO 1. Crecimiento poblacional

Gracias a ciertos estudios realizados se sabe que la mosca del Mediterráneo crece en proporción al número presente en cada momento. Después de 2 horas de observación se forman 800 familias de la mosca y después de 5 horas se forman 2000 familias. Encuentre:

- la ecuación que representa el número de familias en función del tiempo, y
- el número de familias que había al inicio.

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Método de separación de variables.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Modelado con ecuaciones diferenciales.

### Solución

- Sea  $y(t)$  el número de familias y  $\frac{dy(t)}{dt}$  la rapidez con que crece el número de familias. Entonces se tiene

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Separando e integrando se obtiene

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt \quad \rightarrow \quad \ln(y) = kt + C$$

Empleando propiedades de los logaritmos y de la constante arbitraria de integración

$$y(t) = Ce^{kt}$$

En  $t = 2$  se sabe que  $y(t) = 800$

$$800 = Ce^{2k} \quad \dots (1)$$

Para  $t = 5$  se sabe que  $y = 2000$

$$2000 = Ce^{5k} \quad \dots (2)$$

Despejando  $C$  de las ecuaciones (1) y (2) e igualándolas

$$\frac{800}{e^{2k}} = \frac{2000}{e^{5k}}$$

Multiplicando la expresión anterior por  $e^{5k}$

$$800e^{3k} = 2000 \quad \rightarrow \quad e^{3k} = \frac{20}{8}$$

Aplicando propiedades de los logaritmos para despejar  $k$

$$k = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{20}{8}\right) = 0.305$$

Sustituyendo este valor en (1) y despejando  $C$

$$C = \frac{800}{e^{2(0.305)}} = 434.681$$

Finalmente, sustituyendo  $C$  y  $k$  en la solución general

$$y(t) = (434.681)e^{0.305t}$$

b) Para  $t = 0$  (tiempo inicial) en la expresión anterior para obtener el número de familias que se tenían

$$y(0) = (434.681)e^0 = (434.681)(1)$$

$$\boxed{y(0) = 434.681}$$

## EJEMPLO 2. Ley de enfriamiento de Newton

Un cuerpo que tiene una temperatura de  $70^{\circ}\text{C}$  es depositado, en el tiempo  $t = 0$ , en un lugar donde la temperatura se mantiene a  $40^{\circ}\text{C}$ . Después de 3 minutos, la temperatura del cuerpo ha disminuido a  $60^{\circ}\text{C}$ .

- ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 min?
- ¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo esté a  $50^{\circ}\text{C}$ ?

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Método de separación de variables.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Modelado con ecuaciones diferenciales.

### Solución

Si  $T(t)$  es la temperatura del cuerpo en  $^{\circ}\text{C}$  después de  $t$  minutos, encontrar la ecuación diferencial que modela a

$$T'(t) = k(T(t) - Ta)$$

Donde  $Ta = 40^{\circ}\text{C}$  es la temperatura del medio ambiente. La condición inicial es  $T(0) = 70^{\circ}\text{C}$  y una condición adicional es  $T(3) = 60^{\circ}\text{C}$ . Luego, la temperatura  $T(t)$  está dada por la solución del problema de valor inicial.

$$T'(t) = k(T(t) - 40)$$

Separando e integrando

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 40) \quad \rightarrow \quad \int \frac{dT}{T - 40} = k \int dt$$

$$\ln(T - 40) = kt + C$$

Aplicando propiedades de los logaritmos y de la constante de integración y así poder simplificar la solución general

$$T(t) = Ce^{kt} + 40$$

Usando el valor de  $T(0) = 70$

$$T(0) = 70 \rightarrow T(0) = Ce^{k(0)} + 40 = 70$$

$$C + 40 = 70 \rightarrow C = 30$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$T(t) = 30e^{kt} + 40$$

Para  $T(3) = 60$

$$T(3) = 60 \rightarrow T(3) = 30e^{k(3)} + 40 = 60$$

$$e^{3k} = \frac{60 - 40}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\ln(e^{3k}) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow 3k = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$k = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -0.135$$

Sustituyendo el valor de  $k$  en la solución particular

$$T(t) = 30e^{-0.135t} + 40$$

La temperatura del cuerpo después de 5 minutos es

$$T(5) = 30e^{-0.135(5)} + 40 = 55.259^\circ\text{C}$$

El tiempo que debe pasar para que el cuerpo este a  $50^{\circ}\text{C}$  es

$$T(t) = 50 \rightarrow 30e^{-0.135t} + 40 = 50$$

$$e^{-0.135t} = \frac{50 - 40}{30} = \frac{1}{3}$$

Usando propiedades de los logaritmos para despejar a  $t$

$$-0.135t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow -0.135t = -\ln(3)$$

$$t = \frac{\ln(3)}{0.135} = 8.126 \text{ min}$$

### EJEMPLO 3. Dinámica de una partícula

Un punto material de masa igual a 1 g se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo calculado desde el instante  $t = 0$ , e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante  $t = 10$  s la velocidad era igual a  $50 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ , y la fuerza, igual a 4 dinas.

¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

Nota: Una dina equivale a

$$1 \text{ dina} = 1 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$$

#### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Método de separación de variables.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Modelado con ecuaciones diferenciales.

### Solución

De acuerdo con el enunciado y a la segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento es la suma de fuerzas netas aplicadas sobre la partícula y la aceleración

$$\sum F = m \frac{dv}{dt}$$

Así

$$m \frac{dv}{dt} = k \frac{t}{v}$$

Donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Separando e integrando la expresión anterior se tiene

$$m \int v dv = k \int t dt$$

Resolviendo las integrales para obtener la solución general

$$m \frac{v^2}{2} = k \frac{t^2}{2} + C$$

Utilizando las condiciones iniciales del problema para obtener el valor de la constante  $k$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$v = 50 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$k = \frac{50 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 4 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}}{10 \text{ s}} = 20 \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^4}$$

Para evaluar la constante de integración  $C$ , también se usa la condición  $v(10) = 50$ , así la ecuación queda como

$$(1) \frac{(50)^2}{2} - 20 \frac{(10)^2}{2} + C \rightarrow C = 1250 - 1000 = 250$$

Sustituyendo los valores de  $k$  y  $C$  en la solución general y despejando a  $v$  se obtiene

$$v = \pm \sqrt{20t^2 + 500}$$

Así, la velocidad del punto al cabo de un minuto será

$$v(t) = \pm \sqrt{20(60)^2 + 500} \approx 269.258 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

#### EJEMPLO 4. Circuito R-L en serie

Un circuito R-L en serie tiene una fem de 12 V, una inductancia de 1 H, una resistencia de 50  $\Omega$  y no tiene corriente inicial.

- Determinar la corriente en el circuito para cualquier tiempo  $t$ .
- ¿Qué valor de corriente alcanza el circuito cuando alcanza el estado permanente?

El circuito R-L se esquematiza en la figura 1

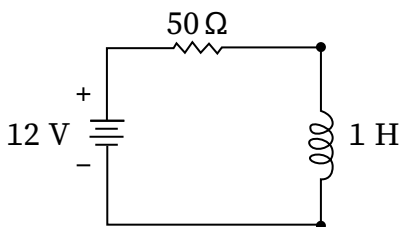


Figura 1

### Antecedentes

- Álgebra: Propiedades de los logaritmos.
- Cálculo Integral: Integración inmediata.

### Conceptos básicos para destacar

- Método de separación de variables.
- Ecuación diferencial con condiciones iniciales.
- Modelado con ecuaciones diferenciales.

### Solución

- a) De acuerdo con la segunda ley de Kirchoff, la cantidad de corriente  $I$  [A] queda expresada por la ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

Según los datos proporcionados, el problema de valor inicial que se debe resolver es

$$\frac{dI}{dt} + 50I = 12$$

Sujeta a  $I(0) = 0$

Como la ecuación ya está expresada en forma estándar, entonces se tiene que calcular el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$$

Se identifica a  $p(t) = 50$ , así

$$\mu(t) = e^{50 \int dt} = e^{50t}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación diferencial por el factor integrante

$$e^{50t} \frac{dI}{dt} + 50e^{50t} I = 12e^{50t}$$

El miembro izquierdo de la expresión anterior se puede expresar como la derivada del producto de  $e^{50t}I$ , esto es

$$\frac{d}{dt}(e^{50t}I) = 12e^{50t}$$

Separando variables e integrando se obtiene

$$e^{50t}I = \int 12e^{50t} dt \rightarrow e^{50t}I = \frac{12}{50}e^{50t} + C$$

Entonces la corriente para cualquier tiempo  $t$  es

$$I(t) = \frac{6}{25} + Ce^{-50t}$$

que es la solución general. Aplicando las condiciones iniciales  $I(0) = 0$

$$0 = \frac{6}{25} + Ce^0 \rightarrow C = -\frac{6}{25}$$

Entonces, la solución particular es

$$I(t) = \frac{6}{25} - \frac{6}{25}e^{-50t} A$$

b) El estado permanente se alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ , de la solución particular se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{6}{25} - \frac{6}{25}e^{-\infty} = \frac{6}{25} - \frac{6}{25}(0)$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{6}{25} A}$$



*Guía de estudio para preparar exámenes  
de Ecuaciones Diferenciales*  
se publicó digitalmente en el repositorio  
de la Facultad de Ingeniería en noviembre de 2024.  
Primera edición electrónica de un ejemplar  
(5 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron a cargo  
de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad  
de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas  
fueron Cambria y Rubik con sus  
respectivas variantes.